

Question 3.

Considérer la fonction réelle $f : x \mapsto \frac{x^3}{(x-1)^2}$.

- (a) (/2) Donner le (plus grand) domaine $\text{dom} f$ de f .
- (b) (/4) Montrer que $f(x) = x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2}$ pour tout $x \in \text{dom} f$.
- (c) (/4) Trouver les première et seconde dérivées de f .
- (d) (/6) Donner les équations de toutes les asymptotes de f .
- (e) (/5) Esquisser le graphe de f .
- (f) (/4) Sur base du graphe esquissé en (e), la fonction $f : \text{dom} f \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle surjective ? (Justifier)

Réponse question 3 :

$$(a) \quad x \in \text{dom} f \Leftrightarrow (x-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$(b) \quad x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2} = \frac{(x+2)(x-1)^2 + 3x-2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(x+2)(x^2-2x+1) + 3x-2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 4x + 2 + 3x - 2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^3}{(x-1)^2} = f(x) \quad \forall x \in \text{dom} f$$

Réponse question 3 (suite) :

$$(e) \quad f(x) = x + 2 + \frac{3x - 2}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{3(x-1)^2 - (3x-2)2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= 1 + \frac{3x - 3 - 6x + 4}{(x-1)^3}$$

$$= 1 + \frac{1 - 3x}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 - 3x}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-3(x-1)^3 - (1-3x)3(x-1)^2}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{-3x + 3 - 3 + 9x}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{6x}{(x-1)^4}$$

(d) Asymptotes verticales?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$$

En $x=1$ à gauche à droite

Asymptotes obliques?

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3x-2}{x(x-1)^2} \right) = 1$$

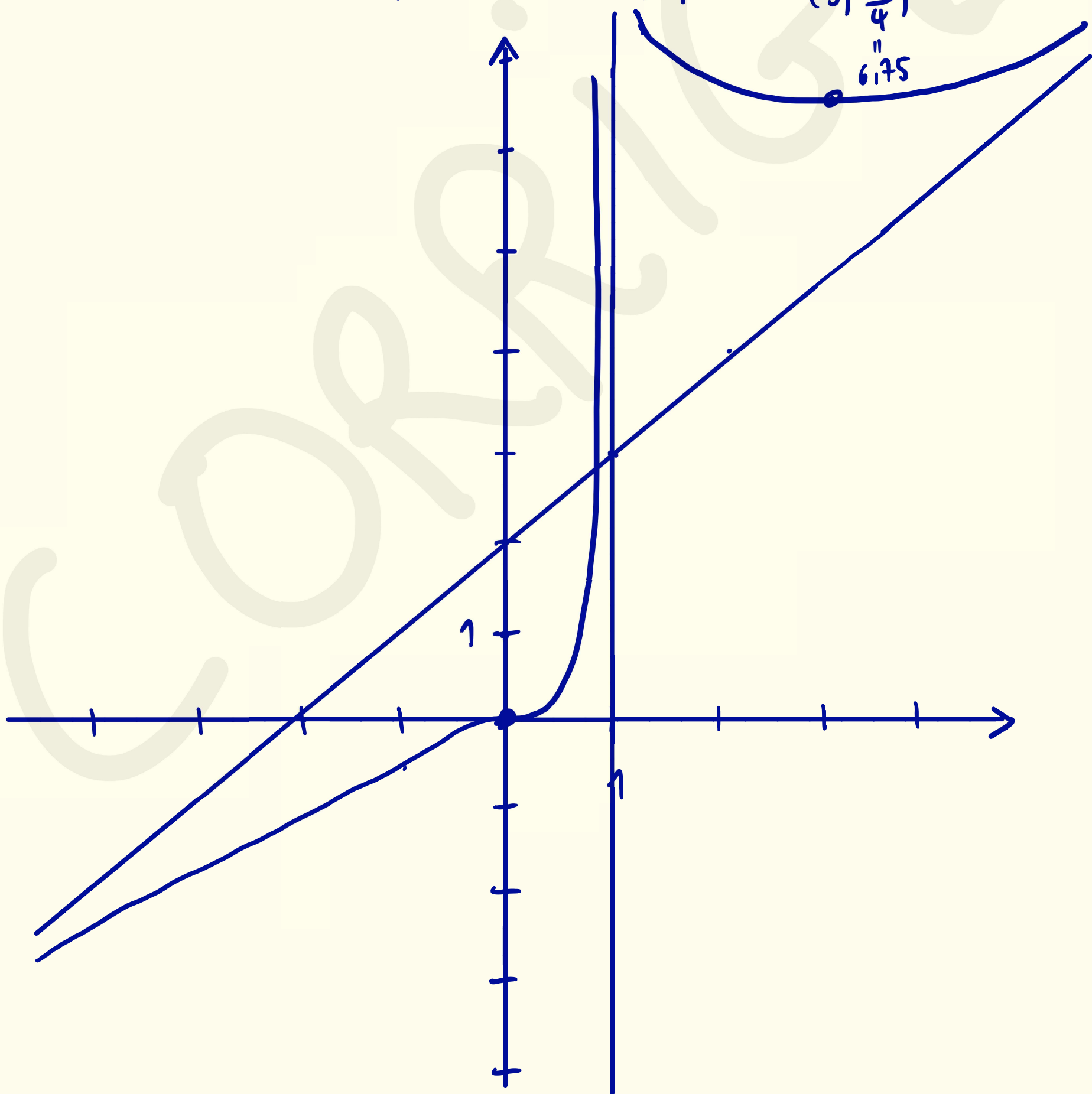
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2} \right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

En $y = x+2$ en $+$ et $-\infty$

Pas d'asymptote horizontale
puisque il y a déjà une oblique.

(e)

		0		1		3	
f'	+	0	+		-	0	+
f	$\nearrow$	inflexion	$\nearrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$
		(0,0)				$(3, \frac{27}{4})$	



(f) On a $\text{Im } f = \mathbb{R}$ (le graphe intersecte toutes les droites horizontales d'équations $y = \text{cst}$) donc f est surjective.