

Question 4:

- (a) (/7) Donner une expression de $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$ avec le détail des calculs intermédiaires.
- (b) (/9) Calculer l'intégrale indéfinie suivante :

$$\int (t^2 + t) \cos(7t) dt.$$

- (c) (/9) Calculer l'intégrale définie suivante :

$$\int_0^{\arcsin \frac{1}{3}} \sin x e^{\cos x} dx.$$

Plus aucune fonction trigonométrique ne doit apparaître dans votre réponse.

Réponse question 4 :

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \sin(3x) \\
 &= \sin(x+2x) \\
 &= \sin x \cos(2x) + \cos x \sin(2x) \\
 &= \sin x (2\cos^2 x - 1) + \cos x 2\sin x \cos x \\
 &= 2\cos^2 x \sin x - \sin x + 2\cos^2 x \sin x \\
 &= \sin x (4\cos^2 x - 1) \\
 &= \sin x (4(1 - \sin^2 x) - 1) \\
 &= -4\sin^3 x + 3\sin x
 \end{aligned}$$

Réponse question 4 (suite) :

$$(b) \int (t^2 + t) \cos(7t) dt$$

$$u_1 = t^2 + t \Rightarrow u_1' = 2t + 1$$

$$v_1 = \frac{1}{7} \sin(7t) \Rightarrow v_1' = \cos(7t)$$

$$= \frac{1}{7} (t^2 + t) \sin(7t) - \frac{1}{7} \int (2t + 1) \cdot \sin(7t) dt$$

$$u_2 = 2t + 1 \Rightarrow u_2' = 2$$

$$v_2 = -\frac{1}{7} \cos(7t) \Rightarrow v_2' = \sin(7t)$$

$$= \frac{1}{7} (t^2 + t) \sin(7t) - \frac{1}{7} \left[-\frac{1}{7} (2t + 1) \cos(7t) + \frac{2}{7} \int \cos(7t) dt \right]$$

$$= \frac{1}{7} (t^2 + t) \sin(7t) + \frac{1}{49} (2t + 1) \cos(7t) - \frac{2}{343} \sin(7t) + \text{cte}$$

$$(c) \int_0^{\arcsin \frac{1}{3}} \sin x e^{\cos x} dx$$

$$= \left[-e^{\cos x} \right]_{x=0}^{\arcsin \frac{1}{3}}$$

$$= -e^{\cos(\arcsin \frac{1}{3})} - (-e)$$

$$\stackrel{(*)}{=} e - e^{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$(*) \text{ On a } -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{1}{3} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Donc } \cos(\arcsin \frac{1}{3}) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{et } \cos &= \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin \frac{1}{3})} \\ &= \sqrt{1 - (\frac{1}{3})^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$