

Fonctions de plusieurs variables 1

(Syllabus Chapitre XIV et Chapitre XVI, parties 1 et 2)

Pourquoi des fonctions de plusieurs variables?

Notre but est ici de généraliser l'étude des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ au cadre des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, où m et n sont des entiers quelconques.

C'est-à-dire des fonctions qui dépendent de n variables et qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

Exemple

Ces fonctions apparaissent naturellement dans des contextes physiques très différents. Par exemple, la fonction qui

- ▶ à un point du plan associe son image par la rotation d'un angle θ autour de l'origine, est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Ici on a décrit le plan par deux coordonnées, donc par $\mathbb{R}^2$.
- ▶ à un point de la terre associe la température en ce point: c'est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$
- ▶ à un point d'une rivière associe la vitesse instantanée du courant [et](#) la température de l'eau en ce point: c'est une fonction d'une partie de $\mathbb{R}^3$ (la rivière) dans $\mathbb{R}^2$.

Contenu de la section

Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Définition

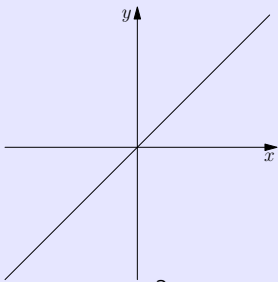
Définition

Une *fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles* est une fonction f définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$: $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

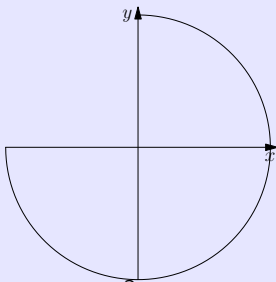
Une telle fonction décrit par exemple la trajectoire d'un point. À chaque valeur de la variable $t \in I$ correspond un point $f(t) \in \mathbb{R}^m$: on pense alors à $f(t)$ comme décrivant **le déplacement du point dans $\mathbb{R}^m$** lorsque t évolue. La valeur de m indique dans quel espace la courbe "vit" :

- ▶ Si $m = 1$, le mobile se déplace le long d'une droite ;
- ▶ si $m = 2$, le mobile se déplace dans un plan ;
- ▶ si $m = 3$, le mobile se déplace dans l'espace.

Exemple



$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, t)$$



$$f : [-\pi, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

Dans les exemples ci-dessus, c'est **l'ensemble image $\text{Im } f$** – c'est-à-dire **la trajectoire** du point – qui est représenté. Attention, ce n'est *pas* le graphe de f (f n'est plus une fonction réelle!).

Contenu de la section

Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Régularité des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Courbes paramétrées

Re-paramétrage d'une courbe paramétrée

Longueur d'une courbe paramétrée

Accélération et vecteur normal

Composantes de f

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction.

Dire que f est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ signifie que, pour chaque valeur de t , $f(t)$ peut être repéré par m valeurs: ses coordonnées. Nous les noterons $f_1(t), \dots, f_m(t)$.

On peut en particulier écrire: $\forall t \in I$,

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t)).$$

Les $(f_i(t))_{1 \leq i \leq m}$ sont appelés **les composantes** (ou coordonnées) de la fonction f et sont des fonctions $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Il est naturel de vouloir étudier les propriétés de régularité pour des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Ces propriétés **se déduiront entièrement des propriétés des fonctions coordonnées f_i** .

Limites et continuité

Définition

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application, $a \in I$, et $\mathbf{L} = (L_1, \dots, L_m) \in \mathbb{R}^m$. On dit que la limite de f en a est $\mathbf{L}$ si

$$\forall 1 \leq i \leq m, \quad \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = L_i.$$

On écrit dans ce cas

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \mathbf{L}.$$

Définition

Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est *continue en $a \in I$* si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

La fonction f est dite *continue* si elle est continue en chaque point.

Dérivabilité

Définition

Une application $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dérivable en $a \in I$ si $\forall i = 1 \dots m$, $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a . Dans ce cas, la dérivée de f en a est donnée par

$$f'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_m(a)).$$

Attention $f'(a)$ est un élément de $\mathbb{R}^m$: c'est un vecteur. Si f est dérivable en a $f'(a)$ peut aussi s'obtenir comme:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right),$$

en remarquant que le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est désormais un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

Contenu de la section

Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Régularité des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Courbes paramétrées

Re-paramétrage d'une courbe paramétrée

Longueur d'une courbe paramétrée

Accélération et vecteur normal

Courbes paramétrées

Définition

Une *courbe paramétrée* de $\mathbb{R}^m$ est une application *dérivable*

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Une courbe paramétrée décrit la trajectoire d'un mobile au cours du temps en apportant des informations sur le mouvement du mobile.

Définition

- ▶ Le *vecteur vitesse* ou *vecteur tangent* d'une courbe paramétrée γ à l'instant t est donné par le vecteur $\gamma'(t)$.
- ▶ Sa norme $\|\gamma'(t)\|$ est parfois appelée la *vitesse numérique* à l'instant t .
- ▶ Le vecteur $\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ est appelé *vecteur tangent unitaire* à l'instant t et est noté $T(t)$. Sa norme est toujours égale à 1.

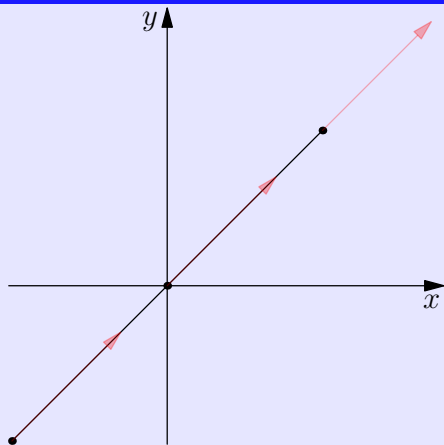
Rappel: la norme d'un vecteur $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$ dans $\mathbb{R}^m$ est donnée par:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2}.$$

Elle se calcule aussi en fonction du produit scalaire comme suit:

$$\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle.$$

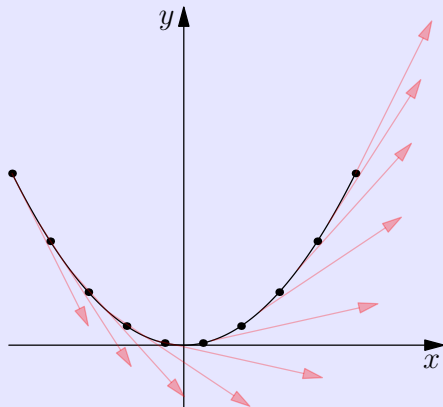
Exemple



$$\gamma(t) = (t, t) \text{ donc } \gamma'(t) = (1, 1),$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2} \text{ et}$$

$$T(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$



$$\gamma(t) = (t, t^2), \quad \gamma'(t) = (1, 2t),$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2} \text{ et}$$

$$T(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1 + 4t^2}} \right).$$

Contenu de la section

Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Régularité des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Courbes paramétrées

Re-paramétrage d'une courbe paramétrée

Longueur d'une courbe paramétrée

Accélération et vecteur normal

Reparamétrages

On peut parcourir une trajectoire donnée par une courbe paramétrée

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ de plusieurs manières :

- ▶ dans un sens ou dans l'autre,
- ▶ ou à différentes vitesses.

Ces comportements s'illustrent en changeant le paramétrage d'une courbe paramétrée:

Définition

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ une courbe paramétrée, où $I \subset \mathbb{R}$. Soit $J \subset \mathbb{R}$ un autre intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $\alpha : J \rightarrow I$ **une bijection dérivable**. On dit que la nouvelle courbe paramétrée

$$\eta : \begin{cases} J \rightarrow \mathbb{R}^m \\ t \mapsto \gamma \circ \alpha(t) = \gamma(\alpha(t)) \end{cases}$$

est **une re-paramétrisation de γ** . On dit que γ et η ont *même orientation* si l'application α **est croissante**.

Exemple de reparamétrage

On considère les deux paramétrages de la droite $y = x$:

$$\gamma(t) = (t, t), t \in \mathbb{R}, \text{ et } \eta(s) = (\ln s, \ln s), s \in]0, \infty[.$$

Le reparamétrage est ici donné par $\eta = \gamma \circ \alpha$ où:

$$\alpha: \begin{cases} J =]0, +\infty[\rightarrow I = \mathbb{R} \\ s \mapsto \ln s \end{cases}$$

Dans les deux cas, la droite est parcourue en entier, car lorsque $s \rightarrow 0_+$, $\ln s \rightarrow -\infty$ et lorsque $s \rightarrow +\infty$, $\ln s \rightarrow +\infty$. Mais elle n'est pas parcourue à la même vitesse: les vecteurs vitesse sont en effet:

$$\gamma'(t) = (1, 1), \quad \eta'(s) = \left(\frac{1}{s}, \frac{1}{s}\right)$$

et les vitesses instantanées sont:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}, \quad \|\eta'(s)\| = \frac{\sqrt{2}}{s}.$$

Le premier paramétrage est donc parcouru à vitesse constante alors que le deuxième est parcouru de plus en plus lentement quand on augmente l'abscisse des points, c'est-à-dire quand $s \rightarrow +\infty$.

Contenu de la section

Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Régularité des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Courbes paramétrées

Re-paramétrage d'une courbe paramétrée

Longueur d'une courbe paramétrée

Accélération et vecteur normal

Longueur d'une courbe paramétrée

Définition

Si $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dérivable et si $a, b \in I$, la *longueur* de la portion de courbe $\gamma([a, b])$ est donnée par l'intégrale :

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Exemple

Le cercle trigonométrique est paramétré par:

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

- ▶ Son vecteur tangent est donné par $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$,
- ▶ sa vitesse instantanée par $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$,
- ▶ et donc sa longueur est donnée par:

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Contenu de la section

Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Régularité des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Courbes paramétrées

Re-paramétrage d'une courbe paramétrée

Longueur d'une courbe paramétrée

Accélération et vecteur normal

Accélération et vecteur normal

Ici $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une courbe paramétrée deux fois dérivable.

Définition

Le *vecteur accélération* de γ à l'instant t est le vecteur $\gamma''(t)$.

Exemple

La courbe $\gamma(t) = (t, t)$ vérifie $\gamma''(t) = (0, 0)$: elle est bien parcourue à vitesse constante.

Définition

En un point où $T'(t) \neq 0$, le *vecteur normal unitaire* est donné par

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}.$$

Ici $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ est le vecteur tangent unitaire. On a

$$\langle T(t), N(t) \rangle = 0 \quad \forall t \in I.$$

Remarque

- ▶ La notion de vitesse d'une courbe **dépend du paramétrage choisi**.
- ▶ La longueur d'une courbe entre deux points, en revanche, **ne dépend pas** du paramétrage choisi

Contenu de la section

Cas général des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Contenu de la section

Cas général des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Graphe

Applications $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, du plan vers la droite

Graphe d'une application

Définition

Le graphe d'une application $f : A \rightarrow B$ est l'ensemble $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in A \times B\}$.

Lorsque $A, B \subset \mathbb{R}$, c'est-à-dire lorsque $m = n = 1$, il était naturel de dessiner cet ensemble dans le plan muni d'un repère cartésien.

Dans le cas général, on ne pourra plus dessiner le graphe de manière aussi simple: car lorsque $A \subset \mathbb{R}^n$ et $B = \mathbb{R}^m$, il faudrait pouvoir "dessiner" dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$, ce qu'on ne peut en général pas faire.

Graphe dans des cas particuliers

Notre représentation de l'espace étant assez limitée, il est impossible pour nous de voir des espaces de dimension plus grande que 3 ; ceci laisse les possibilités suivantes pour (n, m) :

- ▶ $(1, 1)$: fonctions réelles (on connaît bien la notion de graphe, ici)
- ▶ $(1, 2)$: fonctions d'une variable réelle à valeurs dans le plan (on n'utilise pas beaucoup la notion de graphe, qui est une courbe dans l'espace)
- ▶ $(2, 1)$: nouveau cas: fonctions de deux variables, à valeurs réelles. Le graphe est **une surface dans l'espace**.

Contenu de la section

Cas général des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Graphe

Applications $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, du plan vers la droite

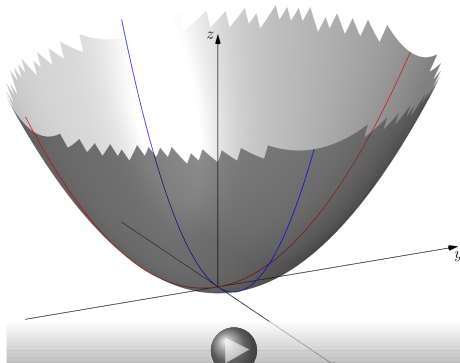
Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Définition

Pour une application $f : \text{dom } f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, le graphe est

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) \text{ t.q. } x, y \in \text{dom } f\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des solutions de l'équation $z = f(x, y)$.
Bien souvent cet ensemble décrit une surface de l'espace (en coordonnées cartésiennes).



Exemple

Voici quelques expressions de fonctions $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, et l'interprétation géométrique du graphe :

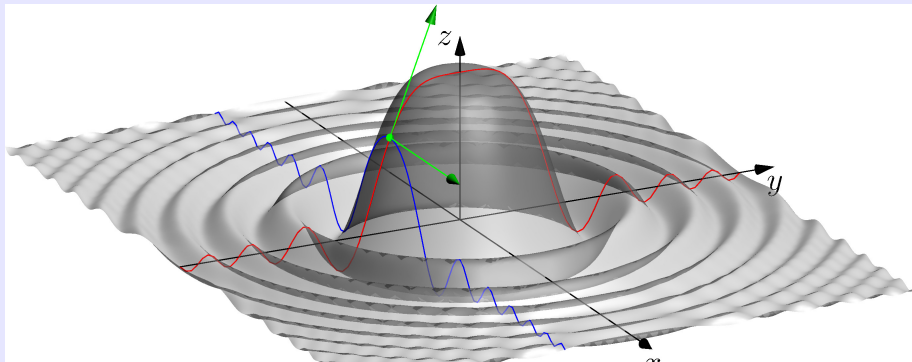
- ▶ $f(x,y) = k$, où $k \in \mathbb{R}$ est une constante : le graphe est le plan d'équation $z = k$, c'est-à-dire un plan parallèle au plan contenant les axes de coordonnées, à "hauteur" (positive ou négative) k ;
- ▶ $f(x,y) = ax + by$, où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des constantes : le graphe est le plan d'équation $z = ax + by$;
- ▶ $f(x,y) = x^2 + y^2$: la hauteur est donnée par le carré de la distance entre (x,y) et l'origine, on appelle cela un parabolôïde de révolution ;
- ▶ $f(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, où $r > 0$ est une constante : il s'agit d'une surface dont les points vérifient l'équation $z^2 + x^2 + y^2 = r^2$, c'est donc un morceau de la sphère centrée en l'origine de rayon r – il s'agit de l'hémisphère supérieur.

Trace d'une surface

Définition

La *trace* d'une surface dans un plan est l'intersection de la surface avec le plan.

Exemple



Dans l'exemple précédent :

En bleu Une trace obtenue avec un plan dont la coordonnée y est constante.

En rouge Une trace obtenue sur un plan dont la coordonnée x est constante égale à 0.

En vert Les vecteurs tangents de ces courbes.

Courbes de niveau

Définition

La *courbe de niveau k* de la fonction $f : \text{dom } f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est la courbe représentant l'ensemble des points "d'altitude k ":

$$\{(x, y) \in \text{dom } f \text{ t.q. } f(x, y) = k\}.$$

C'est l'ensemble des points du graphe de f d'altitude k .

