

Nombres complexes

(Syllabus Chapitre XIX, parties 1 à 3)

Contenu de la section

Motivation

Rotations

Considérons dans le plan $\mathbb{R}^2$ la rotation de centre $(0,0)$ et d'angle φ , notée R .

C'est une transformation du plan, qui s'écrit naturellement en coordonnées polaires comme :

$$R(\rho, \theta) = (\rho, \theta + \varphi).$$

Pour l'écrire en coordonnées cartésiennes il suffit d'écrire les coordonnées cartésiennes du point d'arrivée $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\theta)$ et de développer grâce aux formules trigonométriques :

$$\begin{aligned} R(x, y) &= (\rho \cos(\theta + \varphi), \rho \sin(\theta + \varphi)) \\ &= (\rho \cos(\theta) \cos(\varphi) - \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) + \rho \sin(\theta) \cos(\varphi)) \\ &= (x \cos(\varphi) - y \sin(\varphi), x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi)) \end{aligned}$$

L'application $R(x, y) = (x \cos(\varphi) - y \sin(\varphi), x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi))$ représente donc la rotation d'angle φ en coordonnées cartésiennes.

Une multiplication sur $\mathbb{R}^2$

Nous décidons d'interpréter cette transformation comme **une certaine multiplication** entre couples de nombres de $\mathbb{R}^2$.

Définition

Si (a, b) et (c, d) sont des éléments de $\mathbb{R}^2$, on définit leur **produit complexe**, qui est encore un élément de $\mathbb{R}^2$, par:

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Ceci n'a rien à voir avec le produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$!

Exemple

On choisit $(a, b) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$: alors

$$(\cos \varphi, \sin \varphi)(x, y) = (x \cos(\varphi) - y \sin(\varphi), x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi)).$$

L'image du point (x, y) par la rotation d'angle φ s'interprète donc comme le produit complexe de $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ et (x, y) .

Si $(a, b) = (k, 0)$, on trouve de même $(k, 0)(x, y) = (kx, ky)$: ce qui décrit donc une homothétie de rapport k .

Notations

Définition

On notera à partir de maintenant par i le point du plan donné par:

$$i = (0, 1).$$

De la sorte tout point (a, b) du plan s'écrit comme:

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + ib$$

Dorénavant les éléments de $\mathbb{R}^2$ munis de la multiplication complexe qu'on vient de définir seront appelés **nombre complexes** et notés sous la forme $a + ib$ (ou $a + bi$).

La formule du produit complexe se réécrit donc comme :

$$\begin{aligned}(a + ib)(c + id) &= (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc) \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc)\end{aligned}$$

On a en particulier:

$$i^2 = (0 + 1 \cdot i)(0 + 1 \cdot i) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1.$$

Contenu de la section

Définitions et premières propriétés

Définitions

Définition

L'ensemble des *nombre complexes* est l'ensemble noté

$$\mathbb{C} = \{a + bi \text{ t.q. } a, b \in \mathbb{R}\},$$

et muni de la multiplication complexe. C'est donc l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels muni de la multiplication complexe définie précédemment.

Remarque

Lorsque nous dirons “Soit z un nombre complexe, ...” nous entendrons donc que z s'écrit sous la forme $z = a + bi$ pour certains réels a, b .

Résultat

Deux nombres complexes $a + bi$ et $c + di$ sont égaux si et seulement si $a = c$ et $b = d$.

Partie réelle et imaginaire

Définition

Si $z = a + bi$ est un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$, on appelle a sa *partie réelle* et b sa *partie imaginaire*.

Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelé un nombre *imaginaire pur*.

Exemple

$i, -i, 2i, \dots$ sont imaginaires purs.

Remarque

Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle ... *est un nombre réel*.

Contenu de la section

Définitions et premières propriétés

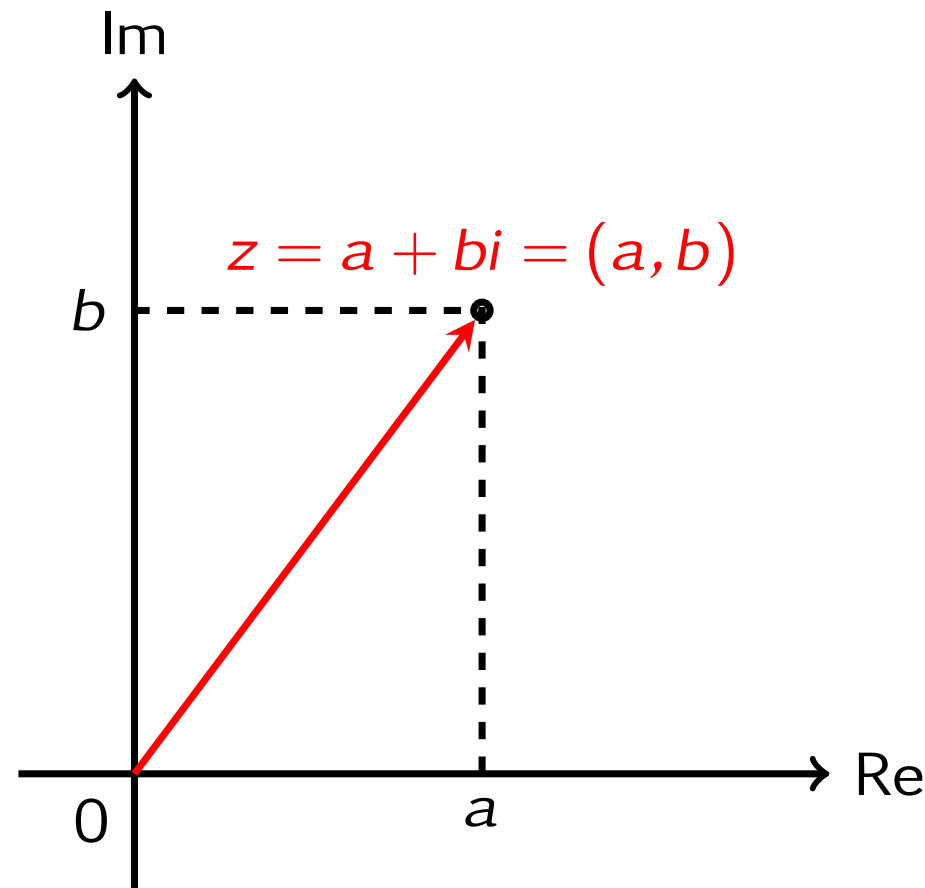
Le Plan de Gauß

Opérations sur les nombres complexes

Module d'un nombre complexe

Inverse d'un nombre complexe

On a vu que l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est juste l'ensemble des points du plan $\mathbb{R}^2$ qu'on a muni d'une opération particulière de produit. Lorsque le plan est vu comme l'ensemble des nombres complexes, on l'appelle *le plan de Gauß*:



La plupart des opérations sur les nombres complexes auront une interprétation géométrique dans ce plan.

Contenu de la section

Définitions et premières propriétés

Le Plan de Gauß

Opérations sur les nombres complexes

Module d'un nombre complexe

Inverse d'un nombre complexe

Somme

Puisque les nombres complexes sont des couples de nombres réels, nous définissons:

Définition

La **somme de deux nombre complexes** $z = a + bi$ et $z' = c + di$ est définie par

$$z + z' = (a + c) + (b + d)i.$$

L'addition de deux complexes vérifie **toutes les propriétés usuelles de l'addition sur $\mathbb{R}$** , en particulier l'existence d'un opposé: pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z + (-z) = 0,$$

où 0 est le complexe nul $0 = 0 + 0i$ et $-z$ est le complexe obtenu à partir de $z = a + bi$ comme: $-z = -a - bi$.

Exemple

► $(1 + i) + (2 + i) =$

► $(-1 + i) + (3 - i) =$

► $-1 + 2i + 1 + 2i =$

Interprétation géométrique

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 = a + bi$. L'application $z \mapsto z_0 + z$ correspond à une translation dans le plan de vecteur (a, b) .

Exemple

- ▶ $(1 + i) + (2 + i) = 3 + 2i$
- ▶ $(-1 + i) + (3 - i) = 2$
- ▶ $-1 + 2i + 1 + 2i = 4i$

Interprétation géométrique

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 = a + bi$. L'application $z \mapsto z_0 + z$ correspond à une translation dans le plan de vecteur (a, b) .

Produit

Définition

Comme expliqué, le produit complexe sur $\mathbb{C}$ est défini par :

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Dans le cas particulier où $b = 0$ la multiplication de $(c + di)$ par un réel a donne précisément le produit par un scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$.

La propriété fondamentale des nombres complexes est la suivante:

Résultat

$$i^2 = -1.$$

Les nombres complexes sont ainsi un ensemble dans lequel on peut donner un sens à “la racine carrée de -1 ”.

Le produit des nombres complexes a les mêmes propriétés que le produit sur $\mathbb{R}$:

Résultat

Pour tous $z, z', z'' \in \mathbb{C}$:

- ▶ $(zz')z'' = z(z'z'')$ (associativité)
- ▶ $zz' = z'z$ (commutativité)
- ▶ $1z = z$ (existence d'un neutre : 1)
- ▶ $z(z' + z'') = zz' + zz''$ (distributivité par rapport à l'addition)
- ▶ Si $z \neq 0$, il existe $z^{-1} \neq 0$ tel que $zz^{-1} = 1$ (existence d'un inverse)

Toutes ces propriétés s'obtiennent immédiatement à partir de la définition; sauf l'existence de l'inverse z^{-1} que nous verrons dans un instant.

Conséquences pratiques pour les calculs:

Connaissant ces règles pour le produit, on peut “oublier” la formule du produit complexe **et se contenter de distribuer et d'utiliser la règle $i^2 = -1$** :

$$\begin{aligned}(a + ib)(c + id) &= ac + aid + ibc + ibid \\ &= ac + i(ad + bc) + bdi^2 \\ &= ac - bd + i(ad + bc).\end{aligned}$$

Exemple

- ▶ $12(2 + i) =$
- ▶ $(2 - i)(4 + i) =$
- ▶ $(1 + i)(1 + i) =$
- ▶ $(1 + i)(1 - i) =$

Conséquences pratiques pour les calculs:

Connaissant ces règles pour le produit, on peut “oublier” la formule du produit complexe **et se contenter de distribuer et d'utiliser la règle $i^2 = -1$** :

$$\begin{aligned}(a + ib)(c + id) &= ac + aid + ibc + ibid \\ &= ac + i(ad + bc) + bdi^2 \\ &= ac - bd + i(ad + bc).\end{aligned}$$

Exemple

- ▶ $12(2 + i) = 24 + 12i$
- ▶ $(2 - i)(4 + i) = 9 - 2i$
- ▶ $(1 + i)(1 + i) = 2i$
- ▶ $(1 + i)(1 - i) = 2$

Conjugaison d'un nombre complexe

Définition

Si $z = a + ib$ est un nombre complexe, on définit son *conjugué* par
$$\bar{z} = a - ib.$$

Exemple

Quelques exemples :

► $\overline{2 + i} = 2 - i$

► $\overline{2 - i} = 2 + i$

À partir de la définition on obtient:

Résultat

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe. Alors:

$$a = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad b = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Résultat

La conjugaison complexe vérifie : pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$,

- ▶ $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- ▶ $z = \overline{\overline{z}}$ (involutivité)
- ▶ $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$
- ▶ $\overline{z^2} = \overline{z}^2 ; \overline{z^3} = \overline{z}^3 ; \text{etc.}$

Ceci se démontre comme pour le produit en écrivant $z = a + bi$.

Exemple

$$\overline{3 + 2i(1 - 5i)} = \overline{3} + \overline{2i(1 - 5i)} = 3 + \overline{2i}(\overline{1 - 5i}) = 3 + (-2i)(1 + 5i) = 3 - 2i + 10 = 13 - 2i.$$

Interprétation géométrique: dans le plan de Gauss, le conjugué d'un point z est le symétrique de z par rapport à l'axe des abscisses.

Contenu de la section

Définitions et premières propriétés

Le Plan de Gauß

Opérations sur les nombres complexes

Module d'un nombre complexe

Inverse d'un nombre complexe

Module d'un complexe

Remarque

Si $z = a + ib$, alors

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2.$$

Le produit d'un nombre complexe avec son conjugué est donc **un nombre réel positif ou nul**, qui est nul si et seulement si z est le nombre complexe nul $0 = 0 + 0i$.

Définition

Le **module** de $z = a + bi$ est le nombre réel $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Le module de $z = a + bi$ est aussi **la norme du vecteur (a, b) dans le plan**. En particulier, si $z = a + 0i$ est réel, le module de z est $\sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$. C'est la valeur absolue dans ce cas.

Résultat

Les propriétés suivantes sont vérifiées pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$:

- ▶ $|zz'| = |z||z'|$
- ▶ $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- ▶ $|z| \geq 0$
- ▶ $|z| = 0 \iff z = 0$

Les trois dernières propriétés viennent du fait que $|a + bi|$ est la norme du vecteur (a, b) (en particulier la deuxième est l'inégalité triangulaire).

La première s'obtient en écrivant $z = a + bi$ et $z' = c + di$ et en calculant (essayez de le faire).

Contenu de la section

Définitions et premières propriétés

Le Plan de Gauß

Opérations sur les nombres complexes

Module d'un nombre complexe

Inverse d'un nombre complexe

Inverse d'un complexe

Nous avons annoncé que chaque nombre complexe non-nul z admettait un inverse. On va le calculer ici.

Soit $z = a + bi$. Comme z est **non-nul**, on a $a^2 + b^2 > 0$. Comme

$$|z|^2 = z\bar{z} = a^2 + b^2$$

nous en déduisons

$$z \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2} = 1.$$

Ceci montre que l'inverse de z , **encore noté** $\frac{1}{z}$ ou z^{-1} , est donné par:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Concrètement, l'inverse d'un nombre complexe se calcule en multipliant en haut et en bas par le conjugué du dénominateur.

Exemple

On veut calculer l'inverse de $5 - i$. Le conjugué de $5 - i$ est $5 + i$ et on écrit donc:

$$\frac{1}{5 - i} = \frac{1}{5 - i} \times \frac{5 + i}{5 + i} = \frac{5 + i}{(5 - i)(5 + i)} = \frac{5 + i}{5^2 - (i^2)} = \frac{5}{26} + \frac{i}{26}.$$

Contenu de la section

Forme polaire ou trigonométrique

Contenu de la section

Forme polaire ou trigonométrique

Argument d'un nombre complexe

Notation exponentielle

Argument d'un complexe

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe, avec $a, b \in \mathbb{R}$. On décide de repérer le vecteur (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ **par ses coordonnées polaires**:

$$(a, b) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) = \rho(\cos(\theta), \sin(\theta)), \quad \text{avec } \theta \in [0, 2\pi[.$$

On sait déjà que, par définition du module, $\rho = |z|$.

Définition

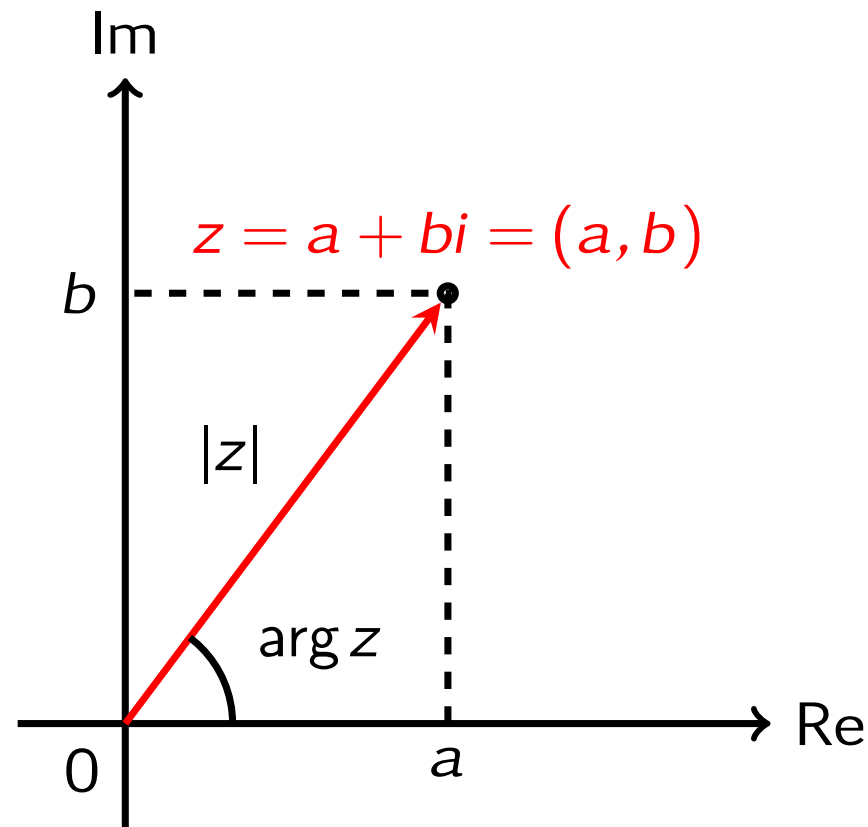
L'argument du nombre complexe z , noté $\arg z$, est l'angle θ lorsqu'on voit z comme un point du plan de Gauß.

Remarque

La mesure de cet angle n'est définie qu'à un multiple entier de 2π près. Généralement on prend $\arg z$ entre 0 et 2π (on parle alors de **détermination principale de l'argument**).

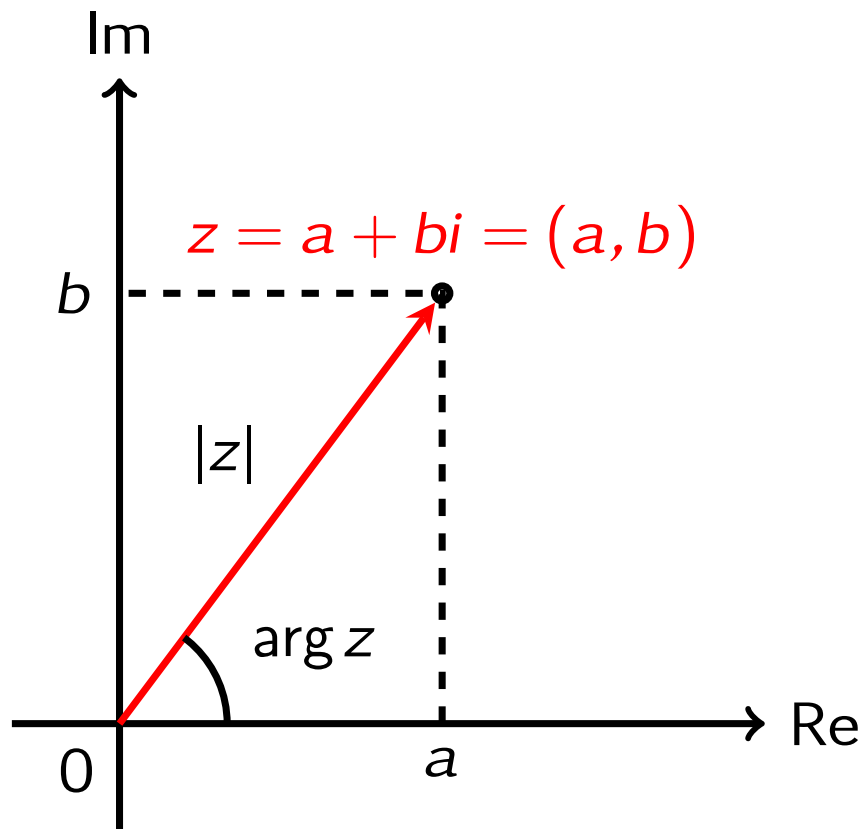
Attention: l'argument du nombre complexe nul n'est pas défini.

Illustration dans le plan de Gauss



Exemple

Le nombre complexe $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ a pour argument θ et pour module ρ . (C'est juste une autre manière de dire que les coordonnées polaires de $z \in \mathbb{R}^2$ sont (ρ, θ) .)



Exemple

Voici la détermination principale des arguments de quelques complexes :

- ▶ $\arg i = \frac{\pi}{2}$
- ▶ $\arg r = 0$ si r est un réel positif
- ▶ $\arg r = \pi$ si r est un réel strictement négatif
- ▶ $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$

Comment déterminer l'argument d'un nombre complexe?

Comme $(|z|, \arg z)$ sont les coordonnées polaires de $z \in \mathbb{R}^2$ on peut écrire:

$$z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)) = a + ib.$$

On se sert de cette formule pour trouver l'argument d'un complexe $z = a + ib$:

- ▶ On commence par calculer $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- ▶ On en déduit la valeur de l'argument, qui vérifie:

$$\cos(\arg(z)) = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\arg(z)) = \frac{b}{|z|}.$$

Exemple

On va déterminer le module et l'argument du complexe $z = -1 - i$.

Le module de z est donné par:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

L'argument θ de $z = -1 - i$ vérifie alors:

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ceci donne donc, à 2π près:

$$\theta = \frac{5\pi}{4}.$$

On retrouve la valeur de l'argument en représentant ce complexe dans le plan de Gauss.

Propriétés de l'argument

Résultat

Pour des complexes z et z' (à un multiple entier de 2π près) :

$$\arg(zz') = \arg z + \arg z'.$$

En particulier:

$$\arg \bar{z} = -\arg z \quad \text{et} \quad \arg(-z) = \pi + \arg z.$$

Nous admettons la preuve de ces propriétés. Toutes ces propriétés se retrouvent en représentant graphiquement les nombres complexes en question dans le plan de Gauss.

Contenu de la section

Forme polaire ou trigonométrique

Argument d'un nombre complexe

Notation exponentielle

Forme polaire et notation exponentielle

Dans le plan de Gauß, un complexe z représente un point. Le passage des coordonnées polaires (ρ, θ) aux coordonnées cartésiennes (a, b) donne deux formules équivalentes:

$$a + bi = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

Définition

La première formule $a + ib$ est appelée *forme cartésienne*, et la seconde est la *forme polaire*.

La forme exponentielle permet de raccourcir la forme polaire:

Définition

On *définit*, pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\exp(i\theta) := \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

et on peut alors noter z sous *forme exponentielle* :

$$z = \rho \exp(i\theta), \quad \text{avec } \rho > 0 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[$$

Remarque

- ▶ Si $z = \rho \exp(i\theta)$, à 2π près, on a bien $\theta = \arg(z)$.
- ▶ Avec cette définition, $\exp(i\theta)$ est défini pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, et on a:

$$\exp(i(\theta + 2\pi)) = \exp(i\theta).$$

- ▶ De même:

$$\exp(i(\theta + \pi)) = -\exp(i\theta).$$

- ▶ La notation $z = \rho \exp(i\theta)$ n'est utilisée que si $\rho > 0$.

Exemple

$$1 = \exp(i0), \quad i = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right), \quad -1 = \exp(i\pi), \quad 1 + \sqrt{3}i = 2\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right).$$

On vérifie ces égalités en calculant explicitement ce qui se cache dans la notation exponentielle (en revenant à la définition).