

Équations différentielles Ordinaires 3

(Syllabus Chapitre XVIII, parties 3.1 et 3.2)

Contenu de la section

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants (suite)

Rappels

Définition

Une *équation linéaire du second ordre à coefficients constants* est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

pour certaines *constantes* a, b, c et une fonction donnée f .

Définition

L'équation linéaire homogène associée (ÉLHA) est l'équation où on a choisi $f \equiv 0$:

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Le *polynôme caractéristique* de l'équation homogène est:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c$$

Méthode de résolution

La résolution d'une telle équation se fait en quatre étapes:

1. Résolution de l'équation linéaire **homogène** associée (ÉLHA) :

$$y_{SGEH}(x) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x),$$

où la forme de g_1 et g_2 dépend **du discriminant du polynôme caractéristique**. (Nous avons vu cette étape au dernier cours).

2. Trouver une solution particulière $y_{SPEL}(x)$ de l'équation linéaire.

3. Écrire la solution générale de l'équation linéaire (EL) comme:

$$y(x) = y_{SGEH}(x) + y_{SPEL}(x).$$

4. Si des conditions initiales sont présentes, les prendre en compte pour déterminer les valeurs de C_1 et C_2 .

On commence par donner un exemple de résolution d'une équation **homogène** ($f = 0$), où les étapes 2 et 3 peuvent être sautées.

On verra ensuite plusieurs méthodes **pour effectuer l'étape 2** et trouver des solutions particulières en fonction de la forme de f .

Exemple

Résolvons le problème de Cauchy

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad y'_0 = 0.$$

Cette équation linéaire **est déjà homogène**, donc il n'y a que les étapes 1 et 4 à considérer.

Étape 1: le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 3\lambda + 2$; ses racines sont 2 et 1. Ceci nous place dans le cas 1 du théorème, et donc la solution générale est :

$$y(x) = C_1 \exp(2x) + C_2 \exp(x).$$

Étape 4: prendre en compte les conditions initiales. Par définition la solution cherchée vérifie $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$ soit

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

dont on tire $C_1 = -1$ et $C_2 = 2$. La solution du problème de Cauchy est donc :

$$y(x) = -\exp(2x) + 2\exp(x).$$

Contenu de la section

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants (suite)

Étape 2 pour les équations du second ordre: déterminer une solution particulière de l'équation non-homogène à partir de la forme du second membre f

Déterminer une solution particulière

Comme dans le cas des équations du premier ordre, il faut trouver une solution particulière y_{SPEL} de l'équation linéaire (EL) de départ.

Mais contrairement aux équations du premier ordre la méthode de variation de la constante ne s'applique plus.

On va expliquer comment deviner la solution particulière à partir de la forme du second membre dans les cas où la fonction f est:

- ▶ un polynôme
- ▶ une somme de fonctions exponentielles
- ▶ une somme de fonctions trigonométriques

Il arrive aussi (rarement) qu'une solution soit facile à identifier; c'est en général le cas pour les solutions constantes.

Exemple

L'équation linéaire du second ordre:

$$y'' + 3y' + y = 1$$

admet $y \equiv 1$ comme solution particulière.

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants (suite)

Étape 2 pour les équations du second ordre: déterminer une solution particulière de l'équation non-homogène à partir de la forme du second membre f

Polynômes

Exponentielles

Fonctions Trigonométriques

Second membre polynomial

Résultat

Soit l'équation:

$$ay'' + by' + cy = f.$$

Si f est *un polynôme de degré n* , on cherchera y_{SPEL} sous la forme d'un polynôme :

- ▶ *de degré n si $c \neq 0$*
- ▶ *de degré $n + 1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$*
- ▶ *de degré $n + 2$ si $c = 0, b = 0$ et $a \neq 0$.*

Dans le cas où (par exemple) $b = c = 0$, l'équation devient juste

$$ay'' = f.$$

Il est donc normal de chercher y comme un polynôme *de degré $n + 2$* , puisque la dérivée seconde d'un polynôme de degré $n + 2$ est un polynôme de degré n .

Exemple

Soit l'équation

$$y'' + y' + 2y = x^2.$$

On va trouver une solution particulière qui est un polynôme de degré 2. On cherche donc trois nombres réels p, q, r pour que:

$y(x) = px^2 + qx + r$ soit solution de l'équation. On calcule alors:

$$\begin{aligned} y'' + y' + 2y &= 2p + (2px + q) + 2(px^2 + qx + r) \\ &= 2px^2 + (2q + 2p)x + 2p + q + 2r \end{aligned}$$

Cette fonction y vérifie l'équation si et seulement si:

$$2px^2 + (2q + 2p)x + 2p + q + 2r = x^2 \iff \begin{cases} 2p = 1 \\ 2q + 2p = 0 \\ 2p + q + 2r = 0 \end{cases}$$

On trouve donc $p = -q = \frac{1}{2}$ et $r = -\frac{1}{4}$ et la solution particulière est:

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants (suite)

Étape 2 pour les équations du second ordre: déterminer une solution particulière de l'équation non-homogène à partir de la forme du second membre f

Polynômes

Exponentielles

Fonctions Trigonométriques

Second membre en exponentielles

Le polynôme caractéristique rentre cette fois en jeu:

Résultat

On considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = f$$

et son polynôme caractéristique $a\lambda^2 + b\lambda + c$. Si f a la forme

$$f(x) = A \exp(kx),$$

pour des constantes A et k , alors on cherchera y_{SPEL} de la forme :

- ▶ $\beta \exp(kx)$, si k n'est pas racine du polynôme caractéristique
- ▶ $\beta x \exp(kx)$, si k est racine simple du polynôme caractéristique
- ▶ $\beta x^2 \exp(kx)$, si k est racine double du polynôme caractéristique.

Dans ces trois exemples β est un nombre réel à déterminer.

On dit que λ_0 est:

- ▶ racine simple d'un polynôme P si $P(\lambda_0) = 0$ mais $P'(\lambda_0) \neq 0$
- ▶ racine double de P si $P(\lambda_0) = P'(\lambda_0) = 0$.

Exemple

Soit l'équation

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

Nous allons trouver une solution particulière avec la règle précédente. Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ dont les racines sont 1 et 2. Ici $e^x = e^{1 \cdot x}$, et 1 est **racine simple de P** . Par le critère précédent on cherche donc une solution sous la forme

$$y(x) = \beta x e^x$$

pour un $\beta \in \mathbb{R}$ à déterminer. On a alors: $y'(x) = \beta(1 + x)e^x$,
 $y''(x) = \beta(2 + x)e^x$ et:

$$y'' - 3y' + 2y = \beta \left((2 + x)e^x - 3(1 + x)e^x + 2xe^x \right) = -\beta e^x.$$

On choisira donc **$\beta = -1$** , ce qui donne la solution particulière:

$$y(x) = -xe^x.$$

Équations linéaires du second ordre à coefficients constants (suite)

Étape 2 pour les équations du second ordre: déterminer une solution particulière de l'équation non-homogène à partir de la forme du second membre f

Polynômes

Exponentielles

Fonctions Trigonométriques

Second membre en fonctions trigonométriques

On considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = f$$

et son polynôme caractéristique $a\lambda^2 + b\lambda + c$. On rappelle la grandeur

$$\omega = \frac{1}{2a} \sqrt{4ac - b^2}$$

qui intervient dans la résolution de l'équation homogène.

Résultat

On suppose que $f(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$ pour certaines constantes A, B, k . Alors:

- Si $b^2 - 4ac > 0$, on cherchera y_{SPEL} sous la forme

$$y_{SPEL} = \alpha \cos(kx) + \beta \sin(kx).$$

- Si $b^2 - 4ac \leq 0$, et si $k = \omega$, on cherchera y_{SPEL} sous la forme

$$y_{SPEL} = x(\alpha \cos(kx) + \beta \sin(kx)).$$

Dans ces exemples α et β sont des nombres réels à déterminer.

Linéarité des équations

Dans le cas où le second membre f appartient à plusieurs des catégories décrites précédemment, il suffit de **sommer les solutions pour chaque composante de f** .

Exemple

Imaginons que

$$f(x) = \cos(3x) + x^2 + 1 + e^{-3x}.$$

Pour trouver une solution particulière d'une équation du type

$$ay'' + by' + cy = f$$

il suffit d'appliquer trois fois séparément les critères qu'on vient de voir: respectivement à $\cos(3x)$, $x^2 + 1$ et e^{-3x} . Ceci donne trois solutions différentes, et la solution cherchée pour f est la somme de ces trois solutions.

Contenu de la section

Exemples de résolution d'équations d'ordre 2

Un exemple

Nous considérons l'ÉDO linéaire du second ordre à coefficients constants suivante :

$$y'' - 9y = x + \exp(2x) + \exp(3x).$$

Le problème de Cauchy n'est pas précisé ici, donc on procède à sa résolution en suivant les étapes 1 à 3.

Étape 1: Le polynôme caractéristique de l'équation est $\lambda^2 - 9$, qui a **deux racines distinctes, 3 et -3**. Ceci qui nous place dans le cas 1 du théorème. Dès lors la solution générale **de l'équation homogène** $y'' - 9y = 0$ est donnée par :

$$y_{SGEH}(x) = C_1 \exp(3x) + C_2 \exp(-3x)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

Étape 2: le second membre est **une somme** de plusieurs termes:

$$y'' - 9y = x + \exp(2x) + \exp(3x).$$

Dans cette situation, nous allons :

- ▶ appliquer **à chaque terme** la méthode correspondante pour trouver une solution, et
- ▶ faire la somme des solutions particulières.

Faisons cela:

- ▶ le terme x , est un polynôme **de degré 1**. La méthode indique donc de chercher une solution sous forme d'un polynôme de degré 1, c'est-à-dire de la forme $\alpha x + \beta$;
- ▶ le terme $\exp(2x)$ est une exponentielle et 2 **n'est pas racine du polynôme caractéristique**. Il faut donc chercher une solution de la forme $\gamma \exp(2x)$;
- ▶ le terme $\exp(3x)$ est une exponentielle et 3 **est racine simple du polynôme caractéristique**. Il faut donc chercher une solution de la forme $\phi x \exp(3x)$.

Ici $\alpha, \beta, \gamma, \phi$ sont **des constantes réelles à déterminer**.

Nous cherchons donc une solution particulière qui a la forme suivante :

$$y_{SPEL}(x) = (\alpha x + \beta) + \gamma \exp(2x) + \phi x \exp(3x).$$

Pour faire ça, nous imposons que cette fonction soit solution de l'équation linéaire de départ:

$$y'' - 9y = x + \exp(2x) + \exp(3x).$$

Pour cela nous calculons:

$$y_{SPEL}''(x) = 0 + 4\gamma \exp(2x) + \phi(6 + 9x) \exp(3x)$$

et insérons cela dans l'équation :

$$\begin{aligned} 4\gamma \exp(2x) + \phi(6 + 9x) \exp(3x) - 9\left((\alpha x + \beta) + \gamma \exp(2x) + \phi x \exp(3x)\right) \\ = x + \exp(2x) + \exp(3x) \end{aligned}$$

ce qui se simplifie en :

$$\begin{aligned} -9\alpha x - 9\beta - 5\gamma \exp(2x) + 6\phi \exp(3x) \\ = x + \exp(2x) + \exp(3x). \end{aligned}$$

Cette équation est donc vérifiée dès que

$$\alpha = \frac{-1}{9}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{-1}{5}, \quad \phi = \frac{1}{6}$$

En remplaçant les valeurs de α, β, γ et ϕ par les valeurs trouvées, la solution particulière est donc:

$$y_{SPEL}(x) = -\frac{1}{9}x - \frac{1}{5}\exp(2x) + \frac{1}{6}x\exp(3x).$$

Étape 3: c'est ici une étape de récapitulation : la solution générale de l'équation linéaire de départ est donc

$$y(x) = C_1 \exp(3x) + C_2 \exp(-3x) \\ - \frac{1}{9}x - \frac{1}{5}\exp(2x) + \frac{1}{6}x\exp(3x).$$

Étape 4: elle prend les conditions initiales en compte, mais nous n'en avons donné aucune ici. Les conditions initiales serviraient, sinon, à déterminer les constantes C_1 et C_2 .

Un autre exemple

Nous considérons cette fois l'équation linéaire suivante avec problème de Cauchy :

$$y'' + y = \cos(2x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Étape 1: le polynôme caractéristique est $\lambda^2 + 1$. L'équation homogène associée:

$$y'' + y = 0$$

n'a pas de racines réelles et se trouve donc dans le cas 3 du théorème), avec $\rho = 0$ et $\omega = 1$. (Ceci revient à dire que les racines complexes de $\lambda^2 + 1$ sont $\pm i$.) La solution générale de l'ÉLHA est alors :

$$y_{SGEH}(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

pour des constantes réelles C_1 et C_2 .

Étape 2: on cherche maintenant une solution particulière de

$$y'' + y = \cos(2x).$$

Le second membre est de la forme $A \cos(kx) + B \sin(kx)$ avec

$$A = 1, \quad B = 0, \quad k = 2.$$

On cherche donc une solution particulière avec la méthode pour un second membre trigonométrique. Comme ici $\omega = 1$ on a $k \neq \omega$ et on cherche une solution particulière de la forme :

$$y_{SPEL} = \alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)$$

avec α et β des réels à déterminer. Imposons que cette fonction soit solution de l'équation linéaire de départ. On calcule alors:

$$y'_{SPEL} = -2\alpha \sin(2x) + 2\beta \cos(2x)$$

$$y''_{SPEL} = -4\alpha \cos(2x) - 4\beta \sin(2x)$$

et on remplace dans l'équation :

$y''_{SPEL}(x) + y_{SPEL}(x) = \cos(2x) \iff -3\alpha \cos(2x) - 3\beta \sin(2x) = \cos(2x).$
Ceci est vérifié pour $\alpha = -\frac{1}{3}$ et $\beta = 0$. La solution particulière est donc:

$$y_{SPEL}(x) = \frac{-\cos(2x)}{3}.$$

Étape 3: la solution générale de l'équation linéaire de départ est ainsi

$$y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) - \frac{1}{3} \cos(2x).$$

Étape 4: Il reste à utiliser les conditions initiales $y(0) = 1, y'(0) = 0$ pour déterminer les valeurs de C_1 et C_2 . L'expression ci-dessus donne:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 - \frac{1}{3} = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = \frac{4}{3} \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

La solution cherchée est ainsi:

$$y(x) = \frac{4}{3} \cos(x) - \frac{1}{3} \cos(2x).$$