

Approximation de Taylor

(Syllabus Chapitre XI, partie 5)

Contenu de la section

Approximation de Taylor

Motivation

On a vu comment les dérivées permettent de prédire les variations d'une fonction et sa convexité. Ce sont des informations **globales**.

Souvent on a besoin de calculer précisément les valeurs d'une fonction en un point donné, et on aurait juste besoin de connaître ces valeurs de manière approchée: on voudrait juste des informations **locales**.

Nous allons voir une manière canonique d'approcher une fonction au voisinage d'un point donné via ses dérivées en ce point: ce qu'on va appeler les **Approximations de Taylor** (aussi appelées: développements limités).

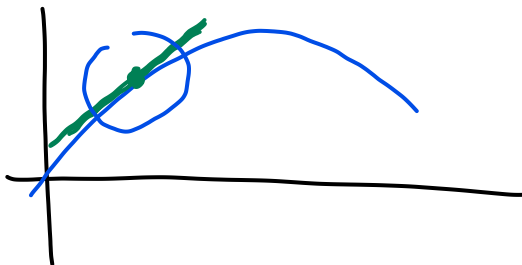
Contenu de la section

Approximation de Taylor

Ordre 1

Ordre 2

Polynômes de Taylor d'ordre supérieur



Rappel

Définition

$f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in]c, d[$ si la limite suivante existe dans $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

En d'autres termes, s'il existe un réel, noté $f'(a)$, tel que

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = 0$$

Ce qu'on peut encore écrire, en mettant au même dénominateur :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - [f(a) + f'(a)(x - a)]}{x - a} = 0.$$

On note alors :

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

fonc du 1^{er} degré.

Dire que f est dérivable en a revient donc à dire que

Notation pour

$$f(x) - T_1(x) = o(x - a) \text{ pour } x \rightarrow a.$$

se lit "petit o"

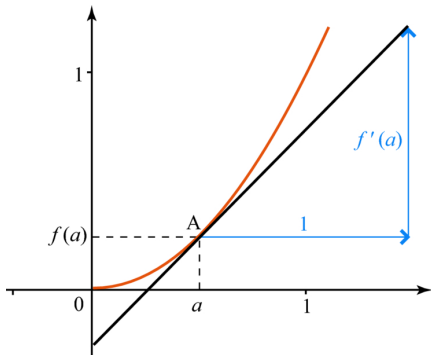
Que représente $T_1(x)$?

Remarque

Si f est dérivable au point a , la droite d'équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) = T_1(x)$$

est la **droite tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$** ou droite tangente de f en a .



$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ est donc une fonction polynômiale de degré 1 dont le graphe est simplement la **tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$** .

Polynôme de Taylor d'ordre 1

Le polynôme $T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ est une bonne approximation de f près de $x = a$:

si on note $R(x) = f(x) - T_1(x)$, on a vu que $R(x)$ tend vers 0 **plus vite** que $(x - a)$ pour $x \rightarrow a$, c'est-à-dire:

$$R(x) = o(x - a) \text{ lorsque } x \rightarrow a.$$

Définition

T_1 défini par $T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ est **le polynôme de Taylor d'ordre 1 de la fonction f au point a .**

T_1 est alors le polynôme d'ordre 1 **qui approche le mieux f près de a .**

Questions de notations

$$f(x) - T_1(x) = o(x-a)$$

Quand on écrit $f(x) = T_1(x) + o(x-a)$ on peut écrire :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

lorsque $x \rightarrow a$

ou de manière équivalente:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$$

où le $o(h)$ est pris lorsque $h \rightarrow 0$ dans le deuxième cas.

On a en fait juste posé $h = x - a$.

Les physiciens écrivent parfois aussi:

$$f(a + \delta a) = f(a) + f'(a)\delta a + o(\delta a)$$

pour indiquer que δa est "une petite variation autour de a ".

Récapitulons

Remarque

- ▶ Idée générale : si f est une fonction quelconque on veut l'approcher, le mieux possible, par des fonctions plus simples: **des polynômes**.
- ▶ Si on essaye d'approcher par des polynômes de degré plus élevé, a-t-on une meilleure approximation ? **Oui!** (on va le voir dans un instant)
- ▶ Il n'est pas forcément possible de bien approcher f *partout*, donc on se contentera ici de l'approcher près d'un point a fixé dans le domaine.
- ▶ On pourrait aussi approcher f par autre chose que des polynômes, mais on ne le verra pas ici.

Contenu de la section

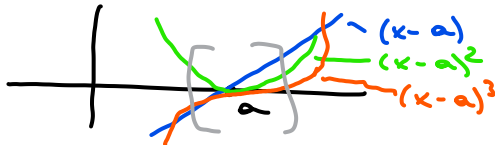
Approximation de Taylor

Ordre 1

Ordre 2

Polynômes de Taylor d'ordre supérieur

But: de meilleures approximations



Nous cherchons maintenant une approximation au second ordre: c'est-à-dire que nous cherchons une fonction T_2 telle que

$f(x) - T_2(x)$ tend vers 0 plus vite que $(x - a)^2$ lorsque $x \rightarrow a$.

Ce qui veut dire précisément:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_2(x)}{(x - a)^2} = 0 \text{ lorsque } x \rightarrow a.$$

But: de meilleures approximations

Pourquoi ce $(x - a)^2$ est une meilleure approximation? Parce que $(x - a)^2$ est bien plus petit que $(x - a)$ près de a : c'est ce qu'on avait écrit sous la forme:

$$(x - a)^2 = o(x - a) \text{ lorsque } x \rightarrow a.$$

(Ce qui est vrai car $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0$.)

On choisira pour T_2 un polynôme d'ordre 2 particulier, le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f en a .

$$\text{Rq: } (x - a)^3 = o((x - a)^2)$$

$$L_{\text{oussi}} = o(x - a).$$

Polynôme de Taylor d'ordre 2

Définition

Le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f en a est donné par:

$$T_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2.$$

On rappelle que $2! = 2$.

T_2 est l'unique polynôme de degré (au plus) 2 dont les dérivées première et secondes en a coïncident avec celles de f . En effet:

$$T_2'(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) \quad \text{donc} \quad T_2'(a) = f'(a)$$

Et ensuite:

$$T_2''(x) = f''(a) \quad \text{donc} \quad T_2''(a) = f''(a).$$

Un exemple

Exemple

Soit la fonction $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

On va déterminer son polynôme de Taylor d'ordre 2 en $a = 0$ et en $a = 1$.

On commence par calculer:

$$f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2.$$

Donc

$$f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2 \quad \text{et} \quad f'(1) = 2, \quad f''(1) = 2.$$

Le polynôme de Taylor de f à l'ordre 2 en 0 est donc

$$T_{2,0}(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} = x^2.$$

Celui en 1 est alors:

$$T_{2,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1)\frac{(x-1)^2}{2!}$$

$$= 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 = \cancel{1} + \cancel{2x} - \cancel{2} + x^2 - \cancel{2x} + \cancel{1}$$

Questions de précision

Le fait d'approcher f par T_2 au voisinage de a se base sur les idées suivantes:

- ▶ Un polynôme est beaucoup plus simple à calculer qu'une fonction quelconque
- ▶ Le polynôme T_2 est **proche de f à l'ordre 2 au voisinage de a** : ceci signifie que $f - T_2$, $(f - T_2)'$ et $(f - T_2)''$ tendent vers 0 lorsque $x \rightarrow a$. Et donc que

$$f(x) - T_2(x) = o\left((x - a)^2\right).$$

- ▶ Est-ce qu'on pourrait obtenir de cette manière n'importe quelle précision? **Oui!**

Contenu de la section

Approximation de Taylor

Ordre 1

Ordre 2

Polynômes de Taylor d'ordre supérieur

Un rappel: dérivées des fonctions puissance

Soit $n \geq 1$ un entier naturel et $a \in \mathbb{R}$.

- ▶ On sait que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (x - a)^n$ est dérivable et que

$$f'(x) = n(x - a)^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- ▶ La fonction f' est encore elle-même dérivable, et de la même manière on a

$$f''(x) = n(n-1)(x - a)^{n-2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

si $n \geq 2$ (si $n = 1$, $f''(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$).

- ▶ On peut continuer ce calcul par récurrence. Si k est un entier : $1 \leq k \leq n$, on aura:

$$f^{(k)}(x) = n(n-1) \cdots (n - (k-1))(x - a)^{n-k} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En particulier, $f^{(n)}(x) = n! \quad \forall x \in \mathbb{R}$, et donc

la dérivée d'ordre n de $\frac{(x-a)^n}{n!}$ est la fonction constante égale à 1.

Polynôme de Taylor d'ordre n

Définition

Le polynôme de Taylor d'ordre n de f en a est donné par:

$$\begin{aligned}
 T_n(x) &= \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} \\
 &= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!}
 \end{aligned}$$

Handwritten notes: $k=1$ under $f'(a)$, $k=2$ under $f''(a)$, and $k=0$ under $f(a)$. A note below the sum states: $f^{(2)}(a) \frac{(x-a)^2}{2!} = f(a) \cdot \frac{1}{2}$.

où $f^{(k)}(a)$ désigne la dérivée k -ème de f au point a ($1 \leq k \leq n$).

$$T_n(a) = f^{(n)}(a) \underbrace{\left[\frac{(x-a)^n}{n!} \right]^n}_{\text{voir plus haut}} = f^{(n)}(a).$$

Les dérivées de T_n et f coïncident à l'ordre n .

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^n(a)\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

T_n est à chaque fois obtenu en rajoutant un terme à T_{n-1} .

Et les dérivées de f et de T_n en a coïncident jusqu'à l'ordre n .

► En effet, $T_n(a) = f(a)$.

► Ensuite,

$$T'_n(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + \cdots + f^n(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!},$$

donc $T'_n(a) = f'(a)$.

► En continuant à dériver on trouve de même

$$T''_n(x) = f''(a) + \cdots + f^n(a)\frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!}$$

et donc $T''_n(a) = f''(a)$.

► Et ainsi de suite jusqu'à $T^n_n(a) = f^n(a)$.

La fonction $T_n - f$ est donc “très plate” au voisinage de a . C'est d'ailleurs la motivation pour choisir T_n de cette forme.

Théorème de Taylor

Le théorème suivant exprime que le polynôme de Taylor est la meilleure approximation polynomiale de f près de a :

Théorème

Supposons que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est n fois dérivable en a , où n est un entier $n \geq 1$. Le polynôme de Taylor T_n est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n vérifiant:

$$f(x) - T_n(x) = o\left((x - a)^n\right) \quad \text{lorsque } x \rightarrow a.$$

Nous omettons la preuve de ce théorème.

Un exemple: la fonction sin

Ecrivons le polynôme de Taylor de $f(x) = \sin x$ d'ordre 5 autour de $a = 0$. On commence par calculer ses dérivées:

$$f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x \quad f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \quad \text{et} \quad f^{(5)}(x) = \cos x.$$

Dès lors :

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 1 \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) = -1 \quad f^{(4)}(0) = 0 \quad f^{(5)}(0) = 1.$$

Un exemple: la fonction sin

Et donc nous avons :

$$\sin(0) + \underbrace{(\sin(x))'_{x=0}}_{f'(0) \text{ avec } f = \sin.} (x-0)$$

$$T_0(x) = 0$$

$$T_1(x) = 0 + 1 \cdot x = x$$

$$T_2(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2} = x$$

$$T_3(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2} + (-1) \cdot \frac{x^3}{3!} = x - \frac{x^3}{6}$$

$$T_4(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 + (-1) \cdot \frac{x^3}{3!} + 0 \cdot \frac{x^4}{4!} = x - \frac{x^3}{6}$$

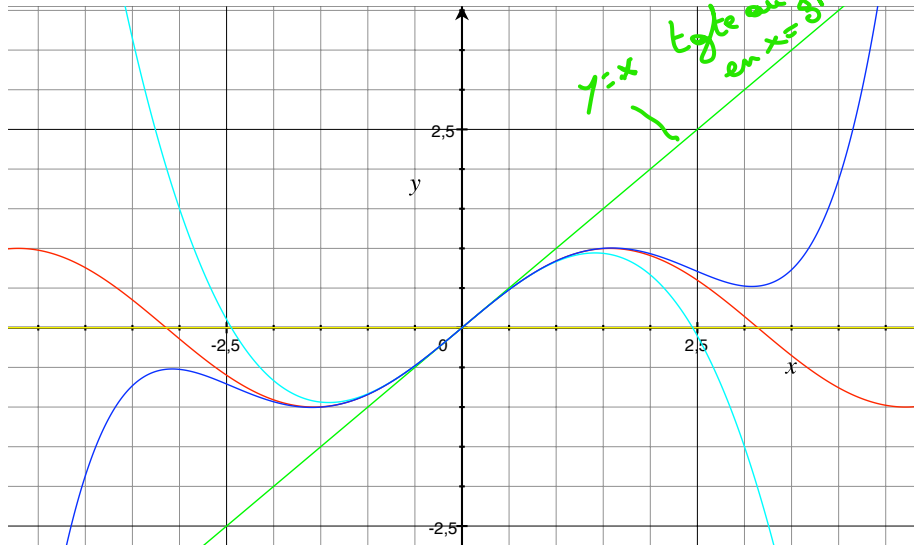
$$T_5(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 + (-1) \cdot \frac{x^3}{3!} + 0 \cdot \frac{x^4}{4!} + 1 \cdot \frac{x^5}{5!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Application: $\sin\left(\frac{\pi}{180}\right) \approx \frac{\pi}{180} - \frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^3}{6} + \frac{\left(\frac{\pi}{180}\right)^5}{120}$.

petit, proche de 0.

Une illustration

La fonction **sin** est **en rouge**, T_0 en jaune, T_1 et T_2 en vert, T_3 et T_4 en bleu clair et T_5 en bleu foncé.



Encore un exemple: la fonction $\ln$ à l'ordre 3

Prenons maintenant $f(x) = \ln x$ et $a = 1$.

$$f'(x) = x^{-1} \quad f''(x) = -x^{-2} \quad f'''(x) = 2x^{-3}$$

évaluons maintenant les dérivées de f en $a = 1$:

$$f(1) = 0 \quad f'(1) = 1 \quad f''(1) = -1 \quad f'''(1) = 2$$

-ln(x)

Les polynômes de Taylor de $f(x) = \ln x$ en $a = 1$ sont donc :

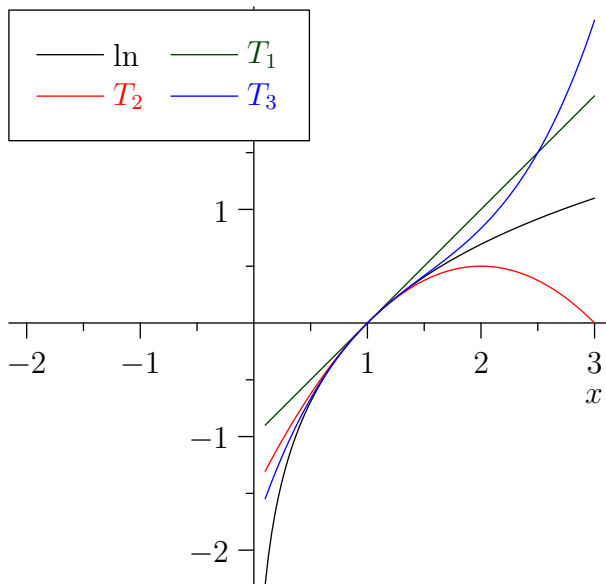
$$T_1(x) = 0 + 1 \cdot (x - 1) = x - 1,$$

$$T_2(x) = 0 + 1 \cdot (x - 1) - 1 \frac{(x - 1)^2}{2}$$

$$= x - 1 - \frac{1}{2}(x - 1)^2,$$

$$T_3(x) = 0 + 1 \cdot (x - 1) - 1 \frac{(x - 1)^2}{2} + 2 \frac{(x - 1)^3}{6}$$

$$= x - 1 - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3.$$



Polynôme de Taylor d'ordre quelconque pour $\ln(x)$

En calculant les dérivées de $f(x) = \ln(x)$ on devine une formule générale pour $f^k(x)$, valable pour $k \geq 1$:

$$f^k(x) = (-1)^{k-1} (k-1)! x^{-k}.$$

(On la démontre rigoureusement par récurrence).

$$f^k(1) = (-1)^{k-1} (k-1)!.$$

On en déduit la formule suivante pour le polynôme de Taylor d'ordre n de $\ln$, valable pour tout entier $n \geq 1$:

$$T_n(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}(x-1)^n.$$

(Essayez de démontrer cette formule!)

$$T_n(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1) \frac{(x-1)^2}{2!} + \overbrace{f^{(3)}(1)}^{2!} \frac{(x-1)^3}{3!} + \dots$$