

Fonctions de plusieurs variables 1

(Syllabus Chapitre XIV et Chapitre XVI, parties 1 et 2)

Pourquoi des fonctions de plusieurs variables?

Notre but est ici de généraliser l'étude des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ au cadre des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, où m et n sont des entiers quelconques.

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_m) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

C'est-à-dire des fonctions qui dépendent de n variables et qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

Exemple

Ces fonctions apparaissent naturellement dans des contextes physiques très différents. Par exemple, la fonction qui

- ▶ à un point du plan associe son image par la rotation d'un angle θ autour de l'origine, est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Ici on a décrit le plan par deux coordonnées, donc par $\mathbb{R}^2$.
- ▶ à un point de la terre associe la température en ce point: c'est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$
- ▶ à un point d'une rivière associe la vitesse instantanée du courant [et](#) la température de l'eau en ce point: c'est une fonction d'une partie de $\mathbb{R}^3$ (la rivière) dans $\mathbb{R}^2$.

Contenu de la section

Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Définition

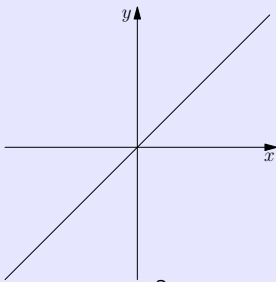
Définition

Une *fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles* est une fonction f définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$: $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

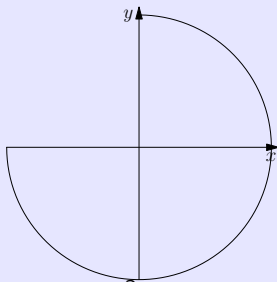
Une telle fonction décrit par exemple la trajectoire d'un point. À chaque valeur de la variable $t \in I$ correspond un point $f(t) \in \mathbb{R}^m$: on pense alors à $f(t)$ comme décrivant le déplacement du point dans $\mathbb{R}^m$ lorsque t évolue. La valeur de m indique dans quel espace la courbe "vit" :

- ▶ Si $m = 1$, le mobile se déplace le long d'une droite ;
- ▶ si $m = 2$, le mobile se déplace dans un plan ;
- ▶ si $m = 3$, le mobile se déplace dans l'espace.

Exemple



$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, t)$$



$$f : [-\pi, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

Dans les exemples ci-dessus, c'est **l'ensemble image $\text{Im } f$** – c'est-à-dire **la trajectoire** du point – qui est représenté. Attention, ce n'est *pas* le graphe de f (f n'est plus une fonction réelle!).

Contenu de la section

Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Régularité des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Courbes paramétrées

Re-paramétrage d'une courbe paramétrée

Longueur d'une courbe paramétrée

Accélération et vecteur normal

Composantes de f

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction.

Dire que f est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ signifie que, pour chaque valeur de t , $f(t)$ peut être repéré par m valeurs: ses coordonnées. Nous les noterons $f_1(t), \dots, f_m(t)$.

On peut en particulier écrire: $\forall t \in I$,

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t)).$$

Les $(f_i(t))_{1 \leq i \leq m}$ sont appelés **les composantes** (ou coordonnées) de la fonction f et sont des fonctions $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Il est naturel de vouloir étudier les propriétés de régularité pour des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Ces propriétés **se déduiront entièrement des propriétés des fonctions coordonnées f_i** .

Limites et continuité

Définition

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application, $a \in I$, et $L = (L_1, \dots, L_m) \in \mathbb{R}^m$. On dit que la limite de f en a est L si

$$\forall 1 \leq i \leq m, \quad \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = L_i.$$

On écrit dans ce cas

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

On regarde les limites en composantes

Définition

Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est *continue* en $a \in I$ si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Ici $\begin{pmatrix} f(x) \\ f(a) \end{pmatrix}$ sont des vect de $\mathbb{R}^m$.

La fonction f est dite *continue* si elle est continue en chaque point.

→ Toutes les fct composantes sont continues.

Dérivabilité

Définition

Une application $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dérivable en $a \in I$ si $\forall i = 1 \dots m$, $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a . Dans ce cas, la dérivée de f en a est donnée par

$$f'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_m(a)).$$

On dérive en composante.

Attention $f'(a)$ est un élément de $\mathbb{R}^m$: c'est un vecteur. Si f est dérivable en a $f'(a)$ peut aussi s'obtenir comme:

$\mathbb{R}$ *en composante.*

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \in \mathbb{R}^m$$

$$\frac{1}{x-a} [(f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) - (f_1(a), \dots, f_m(a))] = \left(\frac{f_1(x) - f_1(a)}{x-a}, \frac{f_2(x) - f_2(a)}{x-a}, \dots \right)$$

en remarquant que le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est désormais un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

Contenu de la section

Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Régularité des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Courbes paramétrées

Re-paramétrage d'une courbe paramétrée

Longueur d'une courbe paramétrée

Accélération et vecteur normal

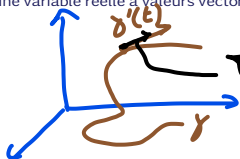
Courbes paramétrées

Définition

Une *courbe paramétrée* de $\mathbb{R}^m$ est une application *dérivable*

définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$
lettre grecque "gamma"

Une courbe paramétrée décrit la trajectoire d'un mobile au cours du temps en apportant des informations sur le mouvement du mobile.



$T(t)$ est un multiple de γ'
 $\rightarrow$ colinéaire avec γ' .

Définition

- ▶ Le **vecteur vitesse** ou **vecteur tangent** d'une courbe paramétrée γ à l'instant t est donné par le vecteur $\gamma'(t)$.
- ▶ Sa norme $\|\gamma'(t)\|$ est parfois appelée la **vitesse numérique** à l'instant t .
- ▶ Le vecteur $\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ est appelé **vecteur tangent unitaire** à l'instant t et est noté $T(t)$. Sa norme est toujours égale à 1.

$$\left\| \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right\| = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \cdot \|\gamma'(t)\| = 1$$

pas utile

Rappel: la norme d'un vecteur $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$ dans $\mathbb{R}^m$ est donnée par:

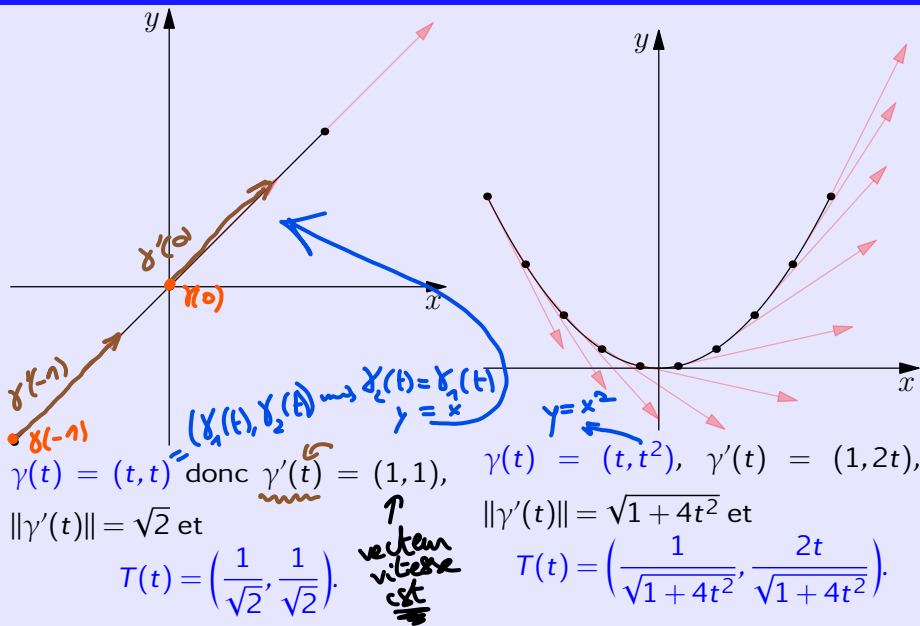
$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2}.$$

$$\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$$

Elle se calcule aussi en fonction du produit scalaire comme suit:

$$\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle.$$

Exemple

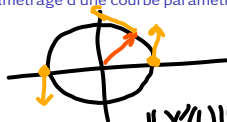


Contenu de la section

Ex: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$
 avec $t \in [0, 2\pi]$

$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$\gamma'(t) \perp \gamma(t)$ car $\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle = 0$ (exo)



$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} \\ &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} \\ &= \sqrt{1} = 1. \end{aligned}$$

Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Régularité des fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Courbes paramétrées

Re-paramétrage d'une courbe paramétrée

Longueur d'une courbe paramétrée

Accélération et vecteur normal

vitesse numérique
constante mais

⚠ $\gamma'(t)$ n'est pas
un vecteur constant
car sa direction varie.

Reparamétrages

On peut parcourir une trajectoire donnée par une courbe paramétrée

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ de plusieurs manières :

- ▶ dans un sens ou dans l'autre,
- ▶ ou à différentes vitesses.

Ces comportements s'illustrent en changeant le paramétrage d'une courbe paramétrée:

on peut calculer la vitesse
de ce nouveau
parcours.

Définition

Soit $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ une courbe paramétrée, où $I \subset \mathbb{R}$. Soit $J \subset \mathbb{R}$ un autre intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $\alpha: J \rightarrow I$ une bijection dérivable. On dit que la nouvelle courbe paramétrée

$$\eta: \begin{cases} J \rightarrow \mathbb{R}^m \\ t \mapsto \gamma \circ \alpha(t) = \gamma(\alpha(t)) \end{cases}$$

est une re-paramétrisation de γ . On dit que γ et η ont même orientation si l'application α est croissante.

on parcourt tte la
trajectoire.

↳ on parcourt la trajectoire dans le m sens.

Exemple de reparamétrage

On considère les deux paramétrages de la droite $y = x$:

$$\gamma(t) = (t, t), t \in \mathbb{R}, \text{ et } \eta(s) = (\ln s, \ln s), s \in]0, \infty[.$$

Le reparamétrage est ici donné par $\eta = \gamma \circ \alpha$ où:

$$\alpha: \begin{cases} J =]0, +\infty[\rightarrow I = \mathbb{R} \\ s \mapsto \ln s \end{cases} \quad \left. \vphantom{\alpha:} \right\} \text{c'est 1 bijection.}$$

Dans les deux cas, la droite est parcourue en entier, car lorsque $s \rightarrow 0_+$, $\ln s \rightarrow -\infty$ et lorsque $s \rightarrow +\infty$, $\ln s \rightarrow +\infty$. Mais elle n'est pas parcourue à la même vitesse: les vecteurs vitesse sont en effet:

$$\gamma'(t) = (1, 1), \quad \eta'(s) = \left(\frac{1}{s}, \frac{1}{s} \right)$$

et les vitesses instantanées sont:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}, \quad \|\eta'(s)\| = \frac{\sqrt{2}}{s}.$$

Le premier paramétrage est donc parcouru à vitesse constante alors que le deuxième est parcouru de plus en plus lentement quand on augmente l'abscisse des points, c'est-à-dire quand $s \rightarrow +\infty$, et très très rapidement quand s est proche de 0.

Contenu de la section

Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Régularité des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Courbes paramétrées

Re-paramétrage d'une courbe paramétrée

Longueur d'une courbe paramétrée

Accélération et vecteur normal

Longueur d'une courbe paramétrée

Définition

Si $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dérivable et si $a, b \in I$, la *longueur* de la portion de courbe $\gamma([a, b])$ est donnée par l'intégrale :

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Exemple

Le cercle trigonométrique est paramétré par:

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

- ▶ Son vecteur tangent est donné par $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$,
- ▶ sa vitesse instantanée par $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$,
- ▶ et donc sa longueur est donnée par:

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Contenu de la section

Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Régularité des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Courbes paramétrées

Re-paramétrage d'une courbe paramétrée

Longueur d'une courbe paramétrée

Accélération et vecteur normal

Accélération et vecteur normal

Ici $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une courbe paramétrée deux fois dérivable.

Définition

Le **vecteur accélération** de γ à l'instant t est le vecteur $\gamma''(t)$.

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)) = \gamma'(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} (\gamma''_1(t), \dots, \gamma''_n(t)) = \gamma''(t)$$

$\gamma': I \rightarrow \mathbb{R}^n$

Exemple

La courbe $\gamma(t) = (t, t)$ vérifie $\gamma''(t) = (0, 0)$: elle est bien parcourue à vitesse constante.

Définition

En un point où $T'(t) \neq 0$, le **vecteur normal unitaire** est donné par

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}.$$



Ici $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ est le vecteur tangent unitaire. On a

$$\langle T(t), N(t) \rangle = 0 \quad \forall t \in I.$$

Remarque

- ▶ La notion de vitesse d'une courbe **dépend du paramétrage choisi**.
- ▶ La longueur d'une courbe entre deux points, en revanche, **ne dépend pas** du paramétrage choisi

Contenu de la section

Cas général des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

*n variables
 $x_1, \dots, x_n$.*

Contenu de la section

Cas général des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Graphe

Applications $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, du plan vers la droite

Graphe d'une application

Définition

Le graphe d'une application $f : A \rightarrow B$ est l'ensemble

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in A \times B\}.$$

la collection des (x, y) avec $y = f(x)$
 $\rightarrow \Gamma$ est le "gamma majuscule"

Lorsque $A, B \subset \mathbb{R}$, c'est-à-dire lorsque $m = n = 1$, il était naturel de dessiner cet ensemble dans le plan muni d'un repère cartésien.

$$\underline{A \times B} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2.$$

Dans le cas général, on ne pourra plus dessiner le graphe de manière aussi simple: car lorsque $A \subset \mathbb{R}^n$ et $B = \mathbb{R}^m$, il faudrait pouvoir "dessiner" dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$, ce qu'on ne peut en général pas faire.

$$n=2, m=2 \Rightarrow \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^4.$$

Graphe dans des cas particuliers

Notre représentation de l'espace étant assez limitée, il est impossible pour nous de voir des espaces de dimension plus grande que 3 ; ceci laisse les possibilités suivantes pour (n, m) :

- ▶ $(1, 1)$: fonctions réelles (on connaît bien la notion de graphe, ici)

$$\text{— } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

- ▶ $(1, 2)$: fonctions d'une variable réelle à valeurs dans le plan (on n'utilise pas beaucoup la notion de graphe, qui est une courbe dans l'espace)

$$\text{— } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

- ▶ $(2, 1)$: nouveau cas: fonctions de deux variables, à valeurs réelles. Le graphe est une surface dans l'espace.

objet de dimension 2. $\mathbb{R}^3$

Contenu de la section

Cas général des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Graphe

Applications $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, du plan vers la droite

Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

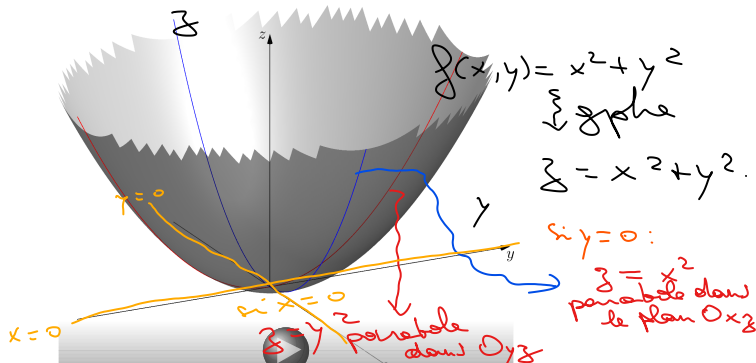
Définition

Pour une application $f : \text{dom } f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, le graphe est

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) \text{ t.q. } x, y \in \text{dom } f\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

c'est-à-dire l'ensemble des solutions de l'équation $z = f(x, y)$.

Bien souvent cet ensemble décrit une surface de l'espace (en coordonnées cartésiennes).

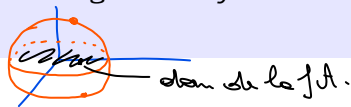


Exemple

Voici quelques expressions de fonctions $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, et l'interprétation géométrique du graphe :

- ▶ $f(x,y) = k$, où $k \in \mathbb{R}$ est une constante : le graphe est **le plan d'équation $z = k$** , c'est-à-dire un plan parallèle au plan contenant les axes de coordonnées, à "hauteur" (positive ou négative) k ;
- ▶ $f(x,y) = ax + by$, où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des constantes : le graphe est **le plan d'équation $z = ax + by$** ;
- ▶ $f(x,y) = x^2 + y^2$: la hauteur est donnée par le carré de la distance entre (x,y) et l'origine, on appelle cela un parabolôïde de révolution ; *Eg du graphe: $z = x^2 + y^2$*
- ▶ $f(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, où $r > 0$ est une constante : il s'agit d'une surface dont les points vérifient l'équation $z^2 + x^2 + y^2 = r^2$, c'est donc un morceau de la sphère centrée en l'origine de rayon r – il s'agit de l'hémisphère supérieur.

→ toute la sphère n'est pas possible pour 1 fct

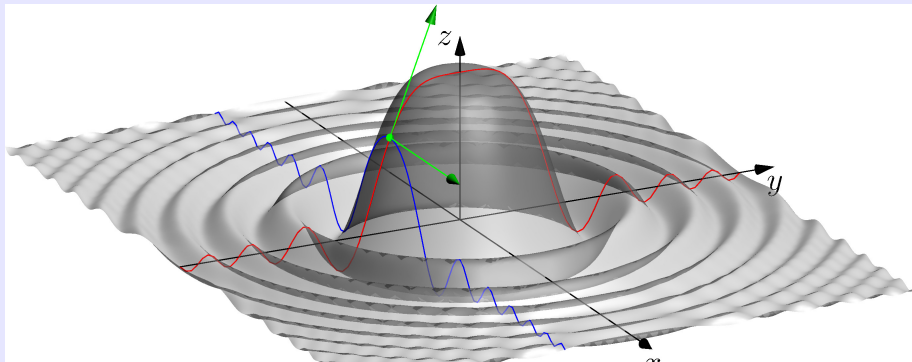


Trace d'une surface

Définition

La *trace* d'une surface dans un plan est l'intersection de la surface avec le plan.

Exemple



Dans l'exemple précédent :

En bleu Une trace obtenue avec un plan dont la coordonnée y est constante.

En rouge Une trace obtenue sur un plan dont la coordonnée x est constante égale à 0.

En vert Les vecteurs tangents de ces courbes.

Courbes de niveau

Définition

La *courbe de niveau k* de la fonction $f : \text{dom } f \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est la courbe représentant l'ensemble des points "d'altitude k ":

$$\{(x, y) \in \text{dom } f \text{ t.q. } f(x, y) = k\}.$$

C'est l'ensemble des points du graphe de f d'altitude k .

