

Fonctions de plusieurs variables 3

(Syllabus Chapitre XVI, parties 5 à la fin)

Contenu de la section

Dérivabilité pour les fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (suite)

Contenu de la section

Ex. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x,y) \mapsto |x|$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \nexists$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ (elle existe).

Dérivabilité pour les fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (suite)

Différentiabilité 

Dérivation de fonctions composées

Gradient et plus grande pente

Applications différentiables

Définition

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continue. Si

1. $\forall \mathbf{a} \in \text{int} A$ (point intérieur), f admet des dérivées partielles par rapport à chaque variable en $\mathbf{a}$: $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}))$
2. Les n dérivées partielles, vues comme des fonctions de $\text{int} A$ dans $\mathbb{R}^m$:

$$\mathbf{a} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

sont des fonctions continues $A \rightarrow \mathbb{R}^m$.

alors f est différentiable sur A

La continuité des dérivées partielles est cruciale dans cette définition.

Remarque

Pour une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ (donc avec $n = 1$), être différentiable est équivalent à être dérivable (au sens habituel) avec une dérivée continue.

Contenu de la section

Dérivabilité pour les fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (suite)

Différentiabilité

Dérivation de fonctions composées

Gradient et plus grande pente

Dérivation de fonctions composées

Résultat

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux ^{fonctions} applications continues avec $g(I) \subset A$, de sorte à pouvoir les composer.

On suppose que g est dérivable en un point $t \in I$ et que f est différentiable sur A . Alors $f \circ g : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en t , et :

$$(f \circ g)'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(t)) \cdot g'_i(t).$$

Ceci peut encore se ré-écrire en termes du gradient de f en $g(t)$ comme:

$$(f \circ g)'(t) = \langle \nabla f(g(t)), g'(t) \rangle.$$

On rappelle que les fonctions $g_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont données par $g(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$, et qu'alors

$$g'(t) = (g'_1(t), \dots, g'_n(t)).$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Une conséquence

La dérivée directionnelle s'exprime alors facilement avec le gradient:

Résultat

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Alors la dérivée directionnelle de f en $\mathbf{a} \in \text{int} A$ dans la direction $\vec{v}$ est donnée par:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{a}) = \langle \nabla f(\mathbf{a}), \vec{v} \rangle.$$

Preuve

Par définition, $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{a})$ est la dérivée en 0 de

$$t \mapsto f(\mathbf{a} + t\vec{v}).$$

En notant $\underline{g(t) = \mathbf{a} + t\vec{v}}$, cette fonction est $t \mapsto f \circ g(t)$. La règle de dérivation des fonctions composées donne alors:

$$(f \circ g)'(0) = \langle \nabla f(g(0)), g'(0) \rangle = \langle \nabla f(\mathbf{a}), \vec{v} \rangle.$$



Contenu de la section

Dérivabilité pour les fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (suite)

Différentiabilité

Dérivation de fonctions composées

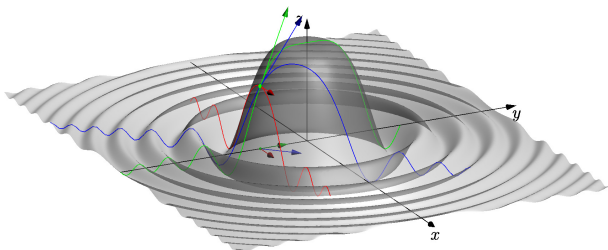
Gradient et plus grande pente

Question

Considérons l'application $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ qui donne la température en chaque point de la pièce (représentée par un ensemble A).

Partant du milieu de la pièce, noté $\mathbf{a} \in A$, dans quelle direction faut-il aller pour avoir le plus chaud ?

En d'autres termes: dans quelle direction $\vec{v}$, avec $\vec{v}$ de norme 1, la quantité $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$ est-elle la plus grande ? ($\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$ mesure la variation de f en $\mathbf{a}$ dans la direction de $\vec{v}$)



Gradient et direction de plus grande variation

Rappel: la *courbe de niveau de f de niveau k* est l'ensemble $\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } f(x) = k\}$.

Résultat

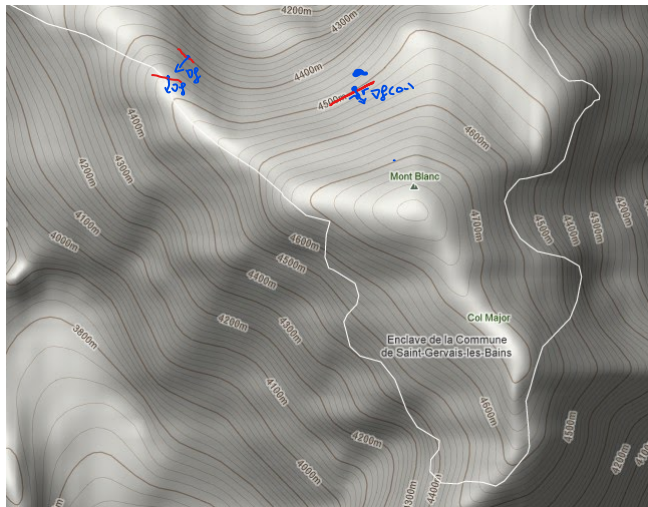
Si une application $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable au point a , alors $\nabla f(a)$ est *perpendiculaire à la courbe de niveau $f(a)$ au point a* .

Par ailleurs, $\nabla f(a)$ donne *la direction de plus grande pente*, c'est-à-dire la direction $\vec{v}$ pour laquelle $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a)$ est maximale.


$$\langle \nabla f(a), \vec{v} \rangle$$

Réponse à la question précédente: si on veut avoir le plus chaud, en partant d'un point $\mathbf{a} \in A \subset \mathbb{R}^3$ il faut se déplacer **dans la direction donnée par le vecteur $\nabla f(\mathbf{a})$** .

Une illustration avec le Mont Blanc



Pour monter au sommet il faut aller dans la direction perpendiculaire aux lignes de niveau, car c'est la direction où ça monte le plus!

Contenu de la section

Dérivabilité aux ordres supérieurs

Contenu de la section

Dérivabilité aux ordres supérieurs

Dérivées d'ordre supérieur

Théorème de Taylor

Dérivées d'ordre supérieur

Les dérivées **partielles** d'ordre supérieur sont définies comme les dérivées partielles d'ordre 1: il suffit de prendre les dérivées successives (d'ordre 2, 3, etc...) par rapport à chacune des variables (lorsque c'est possible!).

Exemple

On considère $f(x, y) = x^2 \cos y$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \cos y$$

variable "gelée".

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x^2 \sin y.$$

variable "gelée".

Les dérivées secondes sont données en dérivant les expressions ci-dessus respectivement par rapport à x et y :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y) = 2 \cos y$$

dérivée partielle par rapport à x de $\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -2x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x, y) = -x^2 \cos y.$$

dans cet exemple! Mais pas en général!

Fonctions deux fois différentiables

Définition

Si une fonction $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ admet:

- ▶ des dérivées partielles **secondes** en tout point de int A
- ▶ qui sont **continues en tout point de int A**

nous disons que la fonction f est **deux fois différentiable**.

↳ l'exemple préc: $f(x,y) = x^2 \cos y$ est $\frac{2}{3}$ fois différentiable

Remarque

Pour vérifier qu'une fonction est deux fois différentiable, il y a beaucoup plus de dérivées secondes: par exemple chaque fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ **peut elle-même encore être dérivée par rapport à x ou y** , ce qui fait 4 dérivées secondes a priori.

Afin de raccourcir l'écriture on notera $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ au lieu de $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, et similairement pour y et mixte.

$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$

idem à $f''(t) = \frac{d^2 f}{dx^2}$
ou bien de $\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} f$

Matrice Hessienne



Matrice Jacobienne:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Définition

Si $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles secondes en un point a on appelle *matrice Hessienne* la matrice de ses dérivées secondes:

$$\text{Hess } f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

⚠ à l'ordre des dérivées
↔ lignes et colonnes.

Attention, la Hessienne n'est définie que pour une fonction à valeurs réelles!

Rq: $f(x,y) = |x| \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \rightsquigarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$
 $\rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \nexists \rightsquigarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \nexists$
 $\rightsquigarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \nexists$

Résultat

Si une fonction $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est deux fois différentiable, alors l'ordre dans lequel on prend les dérivées partielles n'a pas d'importance:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) \quad \forall 1 \leq i, j \leq n \quad \text{et tout } \mathbf{a} \in \text{int } A.$$

Exemple

Si $f(x, y) = x^2 \cos(y)$ on a calculé précédemment:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \cos y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -2x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -x^2 \cos y.$$

La matrice Hessienne est donc

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \cos y & -2x \sin y \\ -2x \sin y & -x^2 \cos y \end{pmatrix}$$

f 2 fois différentiable
 $\text{Hess } f = (\text{Hess } f)^T$
 c'est une matrice
 symétrique
 $\hookrightarrow$ par rapport
 à la diagonale

Contenu de la section

Dérivabilité aux ordres supérieurs

Dérivées d'ordre supérieur

Théorème de Taylor

Théorème de Taylor

On dispose encore d'une notion de polynômes de Taylor: *polynôme de 2 variables*

Théorème (Taylor pour les fonctions de deux variables)

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable et soit $(a, b) \in \text{int } A$ (un point intérieur). Alors:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right)(x - a) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)(y - b) \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \right)(x - a)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \right)(x - a)(y - b) \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \right)(y - b)^2 \right] + o\left(\|(x, y) - (a, b)\|^2\right) \end{aligned}$$

ici c'est "l'erreur de l'approximation"

La notation $o\left(\|(x, y) - (a, b)\|^2\right)$ désigne une fonction $g(x, y)$ telle que:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{g(x, y)}{\|(x, y) - (a, b)\|^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{g(x, y)}{(x - a)^2 + (y - b)^2} = 0.$$

Un exemple

Exemple

Si $f(x, y) = x^2 \cos(y)$ on a calculé précédemment qu'en un point (a, b) on a:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 2a \cos b \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = -a^2 \sin b$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) = 2 \cos b \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = -2a \sin b$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) = -a^2 \cos b$$

En $(a, b) = (0, 0)$ on a donc:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2.$$

La formule de Taylor pour f au voisinage de $(0, 0)$ donne donc:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot y + \frac{1}{2} \left(2 \cdot x^2 + 2 \cdot 0 \cdot xy + 0 \cdot y^2 \right) + o(\|(x, y)\|^2) \\ &= x^2 + o(\|(x, y)\|^2). \end{aligned}$$

Contenu de la section

$\hookrightarrow$ 1 variable $f''(a) > 0$
 $f''(a) < 0$



Optimisation à plusieurs variables

?

Extremums



Définition

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et a un point de son domaine. Ce point est:

- ▶ un **minimum global** de f si $f(a) \leq f(x) \forall x \in A$;
- ▶ un **maximum global** de f si $f(a) \geq f(x) \forall x \in A$;
- ▶ un **minimum local** de f si $\exists \delta > 0$ tel que $f(a) \leq f(x)$
 $\forall x \in B(a, \delta) \cap A$;
boule ouverte de centre a et de rayon δ $= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \delta\}$.
- ▶ un **maximum local** de f si $\exists \delta > 0$ tel que $f(a) \geq f(x)$
 $\forall x \in B(a, \delta) \cap A$;

Un **extremum**, qui peut être local ou global, est un point qui est soit un maximum, soit un minimum.

Attention, on ne peut parler d'**extremum** que pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Extremum et différentiabilité

Théorème (Extrema et différentiabilité)

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et $\mathbf{a}$ un point intérieur à A en lequel f **admet un extremum local**. Si f est différentiable en $\mathbf{a}$ alors toutes les dérivées partielles de f en $\mathbf{a}$ sont nulles. En particulier:

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \vec{0}.$$

Définition

Soit f une fonction différentiable. On appelle **point critique de f** tout point $\mathbf{a}$ intérieur au domaine de f où $\nabla f(\mathbf{a}) = \vec{0}$.

Remarque

Comme pour les fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, le théorème ci-dessus dit donc qu'un **extremum intérieur est un point critique**. Mais le contraire reste faux: un point critique n'est pas forcément un extrémum.

Nature des extremum pour $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Dans le cas $n = 2$, nous pouvons énoncer un critère plus précis qui permet de dire si un point critique est:

- ▶ un maximum local;
- ▶ un minimum local;
- ▶ ou rien du tout.

Nature des extremum pour $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemple: ① $f(x,y) = x^2 + y^2$ Hess $f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\det = 4$



② $f(x,y) = -x^2 - y^2$ Hess $f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\det = 4$



Résultat

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable en un point (a,b) intérieur à A . On suppose que (a,b) est un point critique:

$$\nabla f(a,b) = \vec{0}.$$

Notons

$$\delta = \det \text{Hess } f(a,b)$$

le déterminant de la matrice Hessienne de f en (a,b) . Alors :

- ▶ si $\delta > 0$ et si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$, alors (a,b) est un minimum local de f ;
- ▶ si $\delta > 0$ et si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$, alors (a,b) est un maximum local de f ;
- ▶ si $\delta < 0$, alors (a,b) n'est ni un minimum, ni un maximum de f .

③ $f(x,y) = x^2 - y^2$



Hess $f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\det = -4$

Exemple

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 - 2x + xy + y^2$. Alors:

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2 + y, x + 2y)$$

et

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le gradient de f est nul en (x, y) si et seulement si

$$\begin{cases} 2x - 2 + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4/3 \\ y = -2/3 \end{cases}$$

La Hessienne de f en $(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$ est :

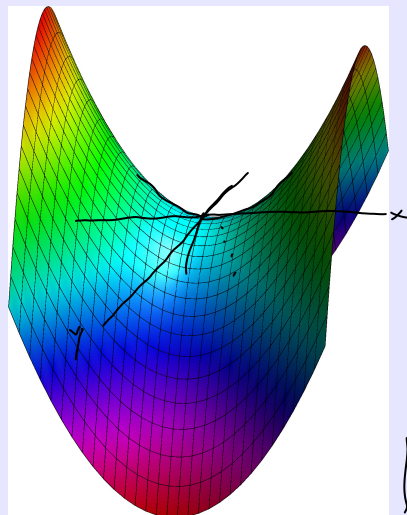
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

donc son déterminant est $\delta = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 > 0$. Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$, le point critique $(4/3, -2/3)$ est un minimum local de f .

Un contre-exemple

Exemple

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.



Le gradient au point (x, y) est $(2x, -2y)$.

Le seul point critique est donc $(0, 0)$. La hessienne en $(0, 0)$ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Donc $\delta = -4 < 0$: $(0, 0)$ n'est **ni un maximum ni un minimum local**. C'est ce qu'on appelle **un point selle**.

Rq: $f(x, y) = x^4 + y^4$
 $(0, 0)$ est un pt critique
 $\text{Hess}f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \det = 0$