

Intégrales multiples 2

(Syllabus Chapitre XVII, parties 5 à la fin)

Contenu de la section

Propriétés des intégrales multiples

Propriétés

Théorème

Si $A \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine borné, et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et bornée, alors f est intégrable et $\iint_A f(x,y) dx dy$ existe.

Propriétés

Comme dans le cas des fonctions d'une variable, nous avons des propriétés d'additivité :

Résultat

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ alors

$$\iint_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \iint_A f + \beta \iint_A g.$$

Si $A, B \subset \mathbb{R}^2$ sont des ensembles bornés, et $A \cap B = \emptyset$, alors

$$\iint_{A \cup B} f = \iint_A f + \iint_B f.$$

Attention, si A et B ont une intersection non vide, ceci n'est plus vrai!



$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$$

Contenu de la section

Changements de coordonnées pour calculer des intégrales

Contenu de la section

Changements de coordonnées pour calculer des intégrales

Coordonnées polaires – Rappel

Coordonnées quelconques; le cadre théorique

Rappel

à traduire en coord polaire
décrite

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble. On note $B \subset [0, +\infty[\times [0, 2\pi[$ l'ensemble des valeurs prises par les coordonnées polaires (ρ, θ) des points de A .

Résultat

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable (par exemple, continue et bornée sur A). Alors:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho d\rho d\theta.$$

Cette propriété permet de calculer des intégrales en les écrivant **en coordonnées polaires**.

Dans un changement de coordonnées il faut: **ne pas oublier le ρ dans l'élément de surface $\rho d\rho d\theta$** , changer le domaine d'intégration en B et changer x et y en $\rho \cos(\theta)$ et $\rho \sin(\theta)$.

Contenu de la section

Changements de coordonnées pour calculer des intégrales

Coordonnées polaires – Rappel

Coordonnées quelconques; le cadre théorique

Systèmes de coordonnées

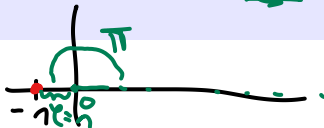
Rappelons qu'un *système de coordonnées* sur une partie du plan est une bijection entre ce sous-ensemble et une partie de $\mathbb{R}^2$. *nouvelle coord*

“Bijection” signifie que tout point du plan est *uniquement* représenté par un couple de nombres dans $\mathbb{R}^2$.

En présence de *deux* (ou plusieurs) systèmes de coordonnées, chaque point du plan possède donc deux (ou plusieurs) paires de coordonnées.

Exemple

Le point du plan représenté par $(x, y) = (-1, 0)$ en *coordonnées cartésiennes* est aussi représenté par $(\rho, \theta) = (1, \pi)$ en *coordonnées polaires*.



Changement de coordonnées

On note (u, v) des coordonnées quelconques (par exemple polaires), à valeur dans une partie B du plan.

Le passage de (u, v) aux coordonnées cartésiennes (x, y) fournit une **bijection**. Elle est appelée **changement de coordonnées**.

Ceci signifie qu'on peut écrire les coordonnées cartésiennes $(x, y) = F(u, v)$ où F est une fonction de $B \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Ainsi:

$$(x, y) = F(u, v) = (F_1(u, v), F_2(u, v)).$$

Ici $F_1, F_2 : B \rightarrow \mathbb{R}$ sont les fonctions donnant respectivement x et y en fonction de u et v :

$$x = F_1(u, v) \quad \text{et} \quad y = F_2(u, v).$$

coord polaire :

$$\begin{aligned} F_1(\rho, \theta) &= \rho \cos \theta \\ F_2(\rho, \theta) &= \rho \sin \theta. \end{aligned}$$

Changement de coordonnées

Exemple (Coordonnées polaires)

Elles sont définies pour $(\rho, \theta) \in B =]0, +\infty[\times [0, 2\pi[$.

Comme $x = \rho \cos(\theta)$ et $y = \rho \sin(\theta)$, la fonction

$F : (\rho, \theta) \in]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ est:

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) = (F_1(\rho, \theta), F_2(\rho, \theta)).$$

Changement de variables dans une intégrale

Résultat

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$. On suppose que tout point de A a des coordonnées (u, v) (autres que les cartésiennes) dont les valeurs décrivent **un ensemble B** quand (x, y) décrit A . On note

$$(x, y) = F(u, v) = (F_1(u, v), F_2(u, v))$$

le changement de coordonnées.

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors l'intégrale de f sur A se calcule comme:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f(F_1(u, v), F_2(u, v)) |\det \text{Jac } F_{(u, v)}| du dv.$$


Dans cette formule, $|\det \text{Jac } F_{(u, v)}|$ désigne la valeur absolue du déterminant de la matrice Jacobienne (la matrice des dérivées partielles de F). Il faut donc **remplacer x par $F_1(u, v)$, y par $F_2(u, v)$, A par B et $dx dy$ par $|\det \text{Jac } F_{(u, v)}| du dv$.**

Exemple (Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$)

Pour les coordonnées polaires le changement de coordonnées est $F :]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ donné par

$$F(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \iff F_1(\rho, \theta) = \rho \cos \theta, \quad F_2(\rho, \theta) = \rho \sin \theta.$$

Alors:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \rho} = \cos(\theta) \quad \frac{\partial F_1}{\partial \theta} = -\rho \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \rho} = \sin(\theta) \quad \frac{\partial F_2}{\partial \theta} = \rho \cos(\theta).$$

La matrice Jacobienne est ainsi donnée par:

$$\text{Jac } F_{(\rho, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix} \quad \left| \rho (\overbrace{\cos^2 + \sin^2})^{\wedge} \right|$$

dont la valeur absolue du déterminant est:

$$|\det \text{Jac } F_{(\rho, \theta)}| = |\cos(\theta) \cdot \rho \cos(\theta) - (-\rho \sin(\theta)) \cdot \sin(\theta)| = \rho.$$

Ceci explique pourquoi on a $\rho d\rho d\theta$ dans la formule:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho d\rho d\theta.$$

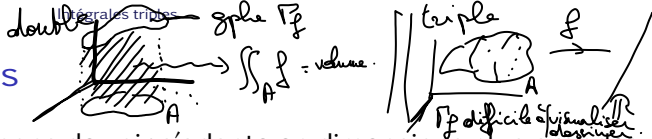
Remarques

- ▶ En faisant le changement de variables **n'oubliez pas de changer le domaine de définition des nouvelles coordonnées**
- ▶ Ici, $F : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une application de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, car nous parlons de coordonnées sur le plan. La même formule de changement de variables reste encore vraie **pour des coordonnées sur $\mathbb{R}^n$** : dans ce cas F devient une application $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, et le déterminant est celui d'une matrice de taille $n \times n$ (n lignes et n colonnes).
- ▶ $|\det \text{Jac} F_{(u,v)}|$ a une interprétation géométrique: un très petit rectangle de côtés dx et dy , donc d'aire $dx dy$ en coordonnées (x,y) se transforme **en un (très petit) parallélogramme d'aire $|\det \text{Jac} F_{(u,v)}| du dv$ en coordonnées (u,v) .**

Contenu de la section

Intégrales triples

Intégrales triples



Tout ce que nous venons de voir s'adapte en dimensions plus grandes.

Soit f une fonction définie sur une partie A de l'espace $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Par analogie avec l'intégrale double, l'intégrale triple

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz$$

représente "l'hypervolume algébrique sous le graphe de f ".

C'est-à-dire le volume d'un ensemble de $\mathbb{R}^4$, qui n'est donc pas représentable graphiquement.

En revanche, dans le cas particulier $f(x,y,z) \equiv 1$, comme pour les intégrales doubles,

est la valeur du volume de l'ensemble des points de l'espace $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées cartésiennes sont dans A . Calculer des intégrales triples permet donc de calculer des volumes.

Contenu de la section

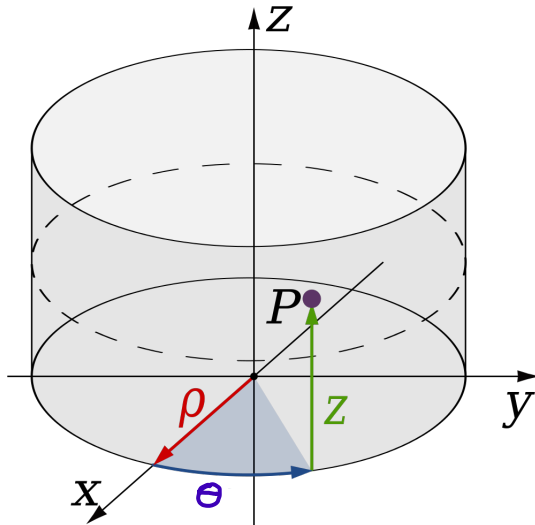
Intégrales triples

Coordonnées cylindriques

Coordonnées sphériques

Illustration des coordonnées cylindriques

↪ coord polaire sur Oxy + on garde la coord z inchangée



Coordonnées cylindriques sur $\mathbb{R}^3$

Ces coordonnées sont obtenues en gardant la hauteur z intacte et **en utilisant des coordonnées polaires dans le plan (x, y)** . L'application de changement de coordonnées est donc:

$$F :]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$F(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z).$$

$$\text{Jac} F = \begin{pmatrix} \text{Jac coord pol.} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ou encore:

$$x = \rho \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\theta), \quad z = z.$$

Le calcul de la matrice Jacobienne est alors le même que pour les coordonnées polaires, et on trouve $|\det \text{Jac} F_{(\rho, \theta, z)}| = \rho$. Ainsi:

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{F^{-1}(A)} f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z) \rho d\rho d\theta dz.$$

$\underset{= B \text{ tel que } F(B)=A.}{A}$

Ici $F^{-1}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs prises par (ρ, θ, z) lorsque (x, y, z) parcourent A . Pour calculer cette intégrale, le théorème de Fubini s'applique encore: **on peut toujours intégrer une variable après l'autre.**

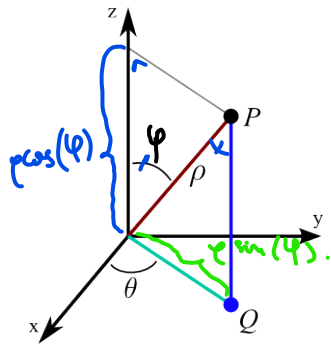
Contenu de la section

Intégrales triples

Coordonnées cylindriques

Coordonnées sphériques

Coordonnées sphériques 1



C'est un autre changement de coordonnées très utile dans l'espace $\mathbb{R}^3$. On repère maintenant les points de $\mathbb{R}^3$ par leur distance à l'origine ρ et deux angles φ et θ .

ρ représente la distance (dans $\mathbb{R}^3$)

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

φ désigne l'angle entre la droite (OP) et l'axe vertical (Oz) :
(co-latitude).

$$z = \rho \cos(\varphi).$$

θ désigne l'angle entre la projection de P dans le plan Oxy et l'axe (Ox) :

$$x = \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \quad y = \rho \sin(\varphi) \sin(\theta).$$

(longitude)

distance du pt Q au pt O.

Coordonnées sphériques 2

Les **coordonnées sphériques** sur $\mathbb{R}^3$ sont dès lors définies par l'application de changement de coordonnées suivante:

$$F : \begin{cases}]0, +\infty[\times]0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 : \\ (\rho, \theta, \varphi) \mapsto \left(\underbrace{\rho \cos(\theta) \sin(\varphi)}_{F_1(\rho, \theta, \varphi)}, \underbrace{\rho \sin(\theta) \sin(\varphi)}_{F_2(\rho, \theta, \varphi)}, \underbrace{\rho \cos(\varphi)}_{F_3(\rho, \theta, \varphi)} \right). \end{cases}$$

Ici, θ est parfois nommée **longitude** et φ est alors la **colatitude**.

En coordonnées sphériques:

$$(x, y, z) = F(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \cos(\theta) \sin(\varphi), \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \rho \cos \varphi).$$

Nous allons calculer $|\det \text{Jac } F(\rho, \theta, \varphi)|$. Par définition:

$$\text{Jac } F(\rho, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \rho} & \frac{\partial F_1}{\partial \theta} & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \rho} & \frac{\partial F_2}{\partial \theta} & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \rho} & \frac{\partial F_3}{\partial \theta} & \frac{\partial F_3}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\varphi) & -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) & \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & 0 & -\rho \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière ligne on trouve:

$$\begin{aligned} |\det \text{Jac } F| &= \left| \cos(\varphi) \begin{vmatrix} -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) & \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \end{vmatrix} + 0 \right. \\ &\quad \left. + (-\rho \sin(\varphi)) \begin{vmatrix} \cos(\theta) \sin(\varphi) & -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \end{vmatrix} \right| \\ &= \left| \cos(\varphi) \left(-\rho^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \right) + (-\rho \sin(\varphi)) \rho \sin(\varphi)^2 \right| \\ &= \left| -\rho^2 \sin(\varphi) (\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2) \right| = \rho^2 \sin(\varphi). \end{aligned}$$

Formule de changement de variables en coordonnées sphériques

Nous venons de voir que $|\det \text{Jac } F| = \rho^2 \sin(\varphi)$. Soit f une fonction $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. On désigne par B l'ensemble des valeurs prises par les coordonnées sphériques sur A . La formule de changement de variables devient donc:

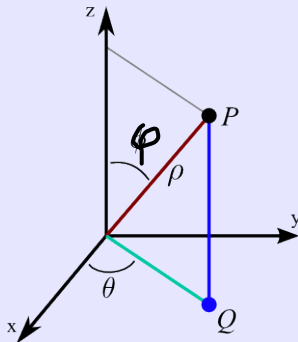
$$\begin{aligned} \iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \\ \iiint_B f(\rho \cos(\theta) \sin(\varphi), \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin(\varphi) \, d\rho \, d\theta \, d\varphi. \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $f(x, y, z) = 1$ pour tout $(x, y, z) \in A$, cette intégrale est le volume de l'ensemble A .

Exemple (Volume de la boule dans $\mathbb{R}^3$)

La boule de centre 0 et de rayon 1 est $A = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
Alors les variables des coordonnées sphériques vérifient:

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 < \varphi < \pi.$$



parallèlepipède rect qui décrit la boule.

Exemple (Volume de la boule dans $\mathbb{R}^3$, suite)

On note alors $B = [0, 1] \times [0, 2\pi[\times]0, \pi[$. Par un changement de coordonnées sphérique, le volume de la boule vaut:

$$\begin{aligned}
 \iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz &= \iiint_B \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 \underbrace{[-\cos \varphi]_0^\pi}_{=2} \, d\theta \, d\rho \\
 &= 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 \, d\theta \, d\rho \\
 &= 4\pi \int_0^1 \rho^2 \, d\rho = \frac{4}{3}\pi.
 \end{aligned}$$

} Fubini