

Équations différentielles Ordinaires

(Syllabus Chapitre XVIII, parties 1 à 2.2)

Contenu de la section

Définitions et Motivation

$$y^{(n)} = y \text{ dérivée } n \text{ fois}$$

Définitions

Définition

Une *équation différentielle ordinaire* (ÉDO) est une équation qui porte sur les dérivées d'une *fonction inconnue*, généralement notée y dans ce cours. L'équation prend de manière générale la forme:

$$F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$$

où F est une fonction de $n + 1$ variables. L'inconnue de cette équation est *la fonction y* . x est la variable de cette fonction inconnue.

Définition

Une *solution* de l'équation différentielle ci-dessus est *une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$* définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, n fois dérivable sur cet intervalle, et vérifiant

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^n(x)) = 0$$

pour tout $x \in I$.

Définition

Résoudre une équation différentielle, c'est trouver l'ensemble de ses solutions, c'est-à-dire *toutes les fonctions y* vérifiant l'équation.

Définition

Lorsque la dérivée de y d'ordre le plus élevé qui apparaît dans l'équation est une dérivée *d'ordre n* on dit que l'équation *est d'ordre n* .

$y^{(n)}$ apparaît
dans l'éq

Remarque

Trouver l'ensemble des solutions d'une ÉDO quelconque est en général un problème très compliqué! Nous nous limiterons à étudier des classes particulières d'équations.

Exemples d'ÉDO

$y'' + y$ s'écrit sous la forme $F(x, y, y', y'')$
avec $F(a, b, c, d) = d + b$.

Exemple

Voici quelques exemples d'équations différentielles:

- ▶ $y'' + y = 0$: c'est une équation du deuxième ordre ($n = 2$)
- ▶ $y' = ky(1 - \frac{y}{K})$ est une équation du premier ordre ($n = 1$):
l'équation logistique (modèle d'évolution de population).
- ▶ $y' = f(x)$, où f est une fonction donnée, est une équation du
premier ordre. Ses solutions sont toutes les primitives de f .
- ▶ $y'y = 1$: c'est une équation du premier ordre

→ Rq: . Résoudre 1 EDO est au moins aussi difficile que le calcul de primitives.
 • $y' = e^{-x^2} \rightsquigarrow y(x) = ?$ y existe mais ne s'écrit pas en terme des fct usuelles.

Origine et motivation

Les ÉDO sont omniprésentes en sciences:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$x(t)$ = position d'un mobile
 $x'(t)$ = vitesse
 $x''(t)$ = accélération

Exemple

L'ÉDO d'ordre 2 la plus connue est sûrement la 2ème loi de Newton:

$$mx''(t) = F(t, x(t))$$

qui exprime, au cours du mouvement, que $mx''(t)$ (l'accélération) égale la somme des forces s'exerçant au cours du mouvement. Très souvent, F dépend de $x(t)$ et $x'(t)$ (ressort, ressort amorti, etc...)

Exemple

Les modèles de croissance de populations font intervenir des ÉDO. Imaginons une population d'individus (cellules, lapins, ...) dont le nombre $y(t)$ varie à la fois proportionnellement au nombre d'individus existants ET à l'écart avec le nombre maximal d'individus autorisés:

$$y'(t) = ky(t)(K - y(t)).$$

C'est l'équation logistique qu'on étudiera aujourd'hui.

de Verhulst.

$y(t) = e^{kt}$

Contenu de la section

Problème de Cauchy: théorie générale

Conditions supplémentaires

Remarque

En général, une équation différentielle admet plusieurs solutions – souvent une infinité. Résoudre une équation différentielle, cela revient à trouver **toutes** les solutions.

Le plus souvent, on cherche uniquement une ou plusieurs **solutions particulières** vérifiant certaines conditions supplémentaires.

Exemple

Trouver l'ensemble des solutions de l'équation $y' = x \exp(-y)$ **vérifiant** $y(0) = 0$.

Ici, on ne cherche pas toutes les solutions : seulement celles qui s'annulent en $x = 0$. (Par exemple car la valeur de la grandeur y qu'on modélise est connue en $x = 0$ grâce à des mesures, etc...).

Problème de Cauchy

Définition

Un **problème de Cauchy** est la donnée d'une ÉDO d'ordre $n \geq 1$

$$F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$$

définie sur un intervalle I , d'un point $x_0 \in I$, et d'une **condition initiale** en x_0 :

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

où $(y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ sont des constantes données.

Un problème de Cauchy consiste donc à chercher les solutions d'une ÉDO dont les valeurs de $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ **sont imposées à l'avance en un point donné x_0** .

Il y a toujours n conditions initiales pour un problème d'ordre n .

Ex: $F = \text{ma}$ ordre 2 $\rightsquigarrow$ C.I. $x(0) = x_0$
 $x'(0) = v_0$ **probl de Cauchy.**

Contenu de la section

ÉDO du premier ordre: Forme normale et interprétation géométrique

Définition

Rappel

Une équation du premier ordre est une équation pouvant faire intervenir y, y' , et x .

Définition

Une équation du premier ordre est *sous forme normale* si elle s'écrit

$$y' = f(x, y) \quad \text{c.à.d. : on sait isoler } y'.$$

pour une certaine fonction continue f .

Exemple

- ▶ L'équation $y' = xy$ est sous forme normale ;
- ▶ l'équation $yy' = x$ ne l'est pas.

↓
 $y' = \frac{x}{y}$ sous forme normale mais Δ au C.E.

Interprétation géométrique

Supposons avoir une solution $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ de l'équation $y' = f(x, y)$, c'est-à-dire que

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

en tout point x de l'intervalle de définition de y . Considérons le point $(x, y(x))$ du graphe de y . En ce point, le graphe de y admet une tangente dont la pente est $y'(x)$: c'est-à-dire $f(x, y(x))$ (car y vérifie l'ÉDO).

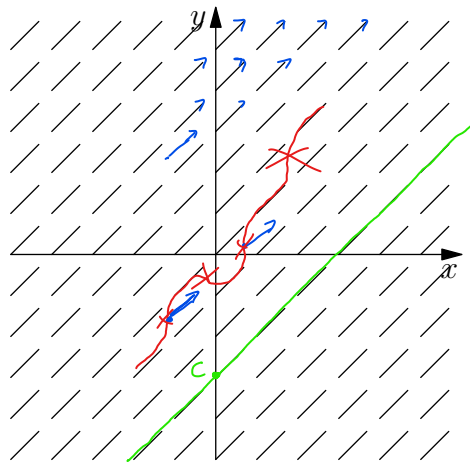
En d'autres termes: la pente d'une solution de l'équation différentielle ne dépend que du point du plan par lequel cette solution passe.

Nous pouvons alors, pour chaque point (x, y) du plan, dessiner la tangente que devrait avoir une solution passant par ce point:

$$(1, f(x, y)).$$

Ceci donne lieu à un *champ des pentes* (encore appelé champ de vecteurs).

Champ des pentes pour l'équation $y' = 1$



On regarde l'équation

$$y' = 1 = f(x, y).$$

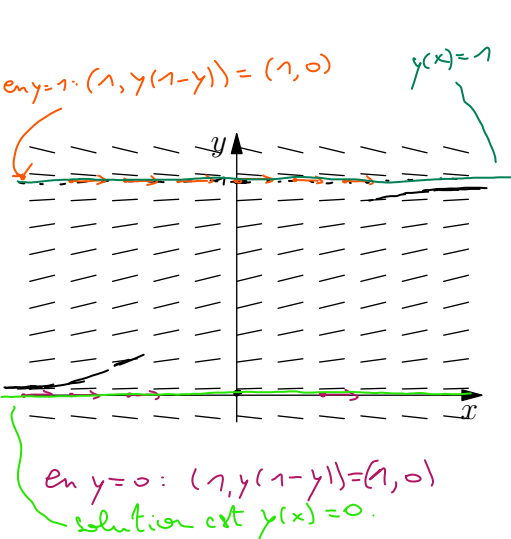
En un point (x, y) le vecteur $(1, f(x, y))$ est donc le vecteur $(1, 1)$.

Les solutions de l'équation sont toutes les fonctions

$$\underline{y(x) = x + C.}$$

Le champ de tangentes correspond donc aux dérivées de toutes ces fonctions en tout point.

Champ des pentes pour l'équation $y' = y(1 - y)$



$$0 = y'(x) = y(x)(1 - y(x)) = 0$$

On regarde l'équation:

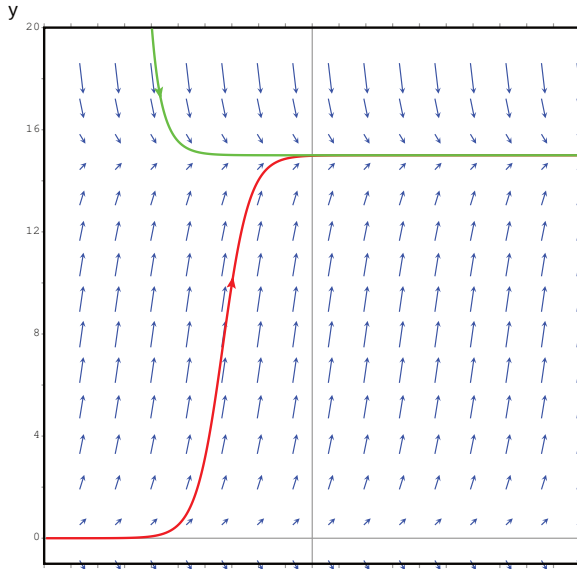
$$y' = y(1 - y) = f(x, y).$$

En un point (x, y) le vecteur $(1, f(x, y))$ est donc le vecteur

$$(1, y(1 - y)).$$

On ne connaît pas explicitement toutes les solutions de cette ÉDO ici, mais le champ de tangentes nous donne quand même une idée de l'allure des graphes des solutions.

De la sorte, le graphe d'une solution de l'ÉDO est une courbe qui reste tangente aux champ de pentes en chacun des points par lesquels elle passe :



Contenu de la section

Équations du premier ordre à variables séparables

Contenu de la section

Équations du premier ordre à variables séparables

Théorie

Une étude de l'équation logistique

Équations à variables séparables: la théorie

Définition

Si une ÉDO peut s'écrire sous la forme $\underbrace{q(y)y'}_{\text{que du } y, y'} + \underbrace{p(x)}_{\text{que du } x} = 0$ pour certaines fonctions p et q données, on dit que l'équation est à *variables séparées*.

Attention: dans ce cas l'équation n'est pas sous forme normale; on dit qu'elle est *sous forme séparée*. ($q(y)y' = -p(x)$ permet d'intégrer qu'on a séparé les variables)

Il existe une méthode générale pour résoudre de telles équations:

Soient P et Q des primitives de p et q , respectivement. Alors la dérivée par rapport à x de $Q(y(x)) + P(x)$ vaut:

$$\left(Q(y) + P \right)'(x) = q(y(x))y'(x) + p(x) = 0 \quad \forall x.$$

d'après l'équation. Dès lors il existe une constante réelle C telle que:

$$Q(y(x)) + P(x) = C. \rightarrow \text{on isole } y(x)!$$

À partir de cette relation, il suffit ensuite de résoudre l'équation pour exprimer $y(x)$ en fonction de x . Ceci se fait au cas par cas.

Et en pratique?

Exemple

Considérons l'équation

$$\cancel{y'} + \cancel{xy} = \cancel{0} \iff \frac{y'}{y} + x = 0 \quad \text{qu'on écrit comme} \quad q(y)y' + p(x) = 0,$$

avec $q(y) = \frac{1}{y}$ et $p(x) = x$. (On peut diviser par y car on ne cherche que des solutions non nulles). Des primitives de p et q sont respectivement:

$$Q(y) = \ln|y| \quad \text{et} \quad P(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

L'équation se réécrit donc comme:

$$(Q(y) + P)' = \left(\ln|y(x)| + \frac{1}{2}x^2 \right)' = 0, \quad \forall x.$$

ce qui signifie qu'il existe une constante C telle que

$$\Rightarrow Q(y) + P = C \Rightarrow \ln|y(x)| = C - \frac{1}{2}x^2 \quad \text{ensuite on isole } y.$$

Ceci donne donc

$$|y(x)| = e^C \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \rightsquigarrow y = \pm e^C \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right), \quad A \in \mathbb{R}.$$

Une méthode plus rapide

Exemple

On considère encore $y' + xy = 0$ qu'on met **sous forme séparée**:

$$\frac{y'}{y} + x = 0 \quad \text{pour } y \neq 0.$$

(En divisant par y il est implicite qu'on ne cherche que des solutions ne s'annulant jamais). On écrit la dérivée en notation de Leibniz:

$y' = dy/dx$, et on réécrit l'équation de manière purement formelle

comme :

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} + x = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow \frac{dy}{dx} = -x \\ \searrow \text{multiplier par } dx. \\ \int \frac{dy}{y} = - \int x dx \end{array} \quad \frac{dy}{y} + x dx = 0.$$

On intègre ensuite l'équation pour trouver:

$$\int \frac{dy}{y} + \int x dx = 0$$

et on calcule chaque intégrale. On obtient alors :

$$\ln|y| + \frac{x^2}{2} = C \Leftrightarrow \ln|y| = -\frac{x^2}{2} + C.$$

conste d'intégration dans $\int \frac{dy}{y}$ et $\int x dx$.

d'où $|y(x)| = e^C \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, où C est une constante.

Une mise en garde

Exemple

On repart de l'équation

$$y' + xy = 0.$$

Attention

L'astuce $y' = dy/dx$ ne fonctionne que dans le cas où l'équation **est sous forme séparée**. Par exemple on ne peut **pas** résoudre $y' + xy = 0$ en écrivant

$$\int dy + \int xy \, dx = 0.$$

Ça n'a pas grand intérêt d'intégrer $xy(x)$ par rapport à x : ça voudrait dire intégrer $xy(x)$ **sans connaître $y(x)$** , donc on ne pourrait pas calculer de primitive. L'idée est bien de séparer les variables et d'intégrer indépendamment en y et x .

Contenu de la section

Équations du premier ordre à variables séparables

Théorie

Une étude de l'équation logistique

L'équation logistique: résolution

Fixons deux constante $a, A > 0$. Considérons l'équation logistique, qui est une ÉDO du premier ordre d'inconnue y :

$$y' = ay \left(1 - \frac{y}{A}\right) \Leftrightarrow \frac{y' \frac{dy}{dx}}{y \left(1 - \frac{y}{A}\right)} = a \quad \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y \left(1 - \frac{y}{A}\right)} = \int a dx$$

Elle est à variables séparables et devient sous forme séparée :

$$\frac{y'}{y \left(1 - \frac{y}{A}\right)} = a \quad \text{et donc :} \quad \int \frac{dy}{y \left(1 - \frac{y}{A}\right)} = ax + C.$$

L'intégrale indéfinie se calcule en décomposant en fractions simples :

$$\int \frac{dy}{y \left(1 - \frac{y}{A}\right)} = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{A - y} \right) dy = \ln|y| - \ln|A - y| = \ln \frac{|y|}{|A - y|}.$$

On en déduit donc

$$\ln \left| \frac{y(x)}{A - y(x)} \right| = ax + C \quad \text{d'où} \quad \frac{y(x)}{A - y(x)} = \pm e^C e^{ax}.$$

$$\text{Dès lors : } y(x) = \frac{A D e^{ax}}{1 + D e^{ax}}. \quad \begin{array}{l} \text{isoler } y. \\ y = \pm e^C e^{ax} (A - y) \\ \downarrow \\ y(1 \pm e^{ax}) = \pm e^C e^{ax} A \end{array}$$

où D est une nouvelle constante donnée par $D = \pm e^C$.

Un problème de Cauchy pour l'équation logistique

Exemple

On étudie maintenant un problème de Cauchy pour l'équation logistique. On choisit $y_0 \in \mathbb{R}$ et on demande que $y(0)$ soit égal à y_0 :

$$\begin{cases} y' = ay\left(1 - \frac{y}{A}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

La solution générale $y(x)$ s'écrit sous la forme suivante:

$$\frac{y(x)}{A - y(x)} = De^{ax} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

pour une certaine constante $D \in \mathbb{R}$. Il s'agit donc de déterminer D en fonction de y_0 pour avoir $y(0) = y_0$. La condition $y(0) = y_0$ s'écrit:

$$\frac{y_0}{A - y_0} = D \cdot \underbrace{e^{a \cdot 0}}_{=1}$$

On en déduit l'expression de la solution du problème de Cauchy en remplaçant D par sa valeur:

$$y(x) = \frac{A \frac{y_0}{A - y_0} e^{ax}}{1 + \frac{y_0}{A - y_0} e^{ax}} = \frac{Ay_0 e^{ax}}{A + y_0(e^{ax} - 1)}.$$

La formule générale pour la solution du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = ay\left(1 - \frac{y}{A}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

donnée par

$$y(x) = \frac{Ay_0 e^{ax}}{A + y_0(e^{ax} - 1)}$$

permet en particulier de retrouver les deux **solutions constantes**:

$y = 0$ (associée à $y_0 = 0$) et **$y = A$** (associée à $y_0 = A$). Il suffit pour cela de choisir $y_0 = 0$ ou $y_0 = A$ dans la formule ci-dessus.