

Fonctions réciproques

(Syllabus Chapitre IV, partie 3, et Chapitre IX partie 3.3)

Rappels

Définition

Une *fonction* f c'est :

- ▶ un ensemble de départ A ,
- ▶ un ensemble d'arrivée B et
- ▶ une règle qui associe à chaque élément x de A un unique élément de B , noté $f(x)$.

Une fonction est donc une manière d'associer à tout élément x de A un élément $f(x)$ de B .

- ▶ $f(x)$ est *l'image* de x par f .
- ▶ On dit aussi que x est *un antécédent* de $f(x)$.

La notation pour une fonction f de A dans B est

$$f : \begin{cases} A \rightarrow B \\ x \mapsto f(x) \end{cases} \text{ ou encore } f : A \rightarrow B : \quad x \mapsto f(x).$$

Contenu de la section

Fonctions réciproques

Contenu de la section

Fonctions réciproques

Définitions

Fonctions réciproques

Logarithme et exponentielle

Fonctions trigonométriques réciproques

Continuité des fonctions réciproques

Injectivité, Surjectivité, Bijectivité

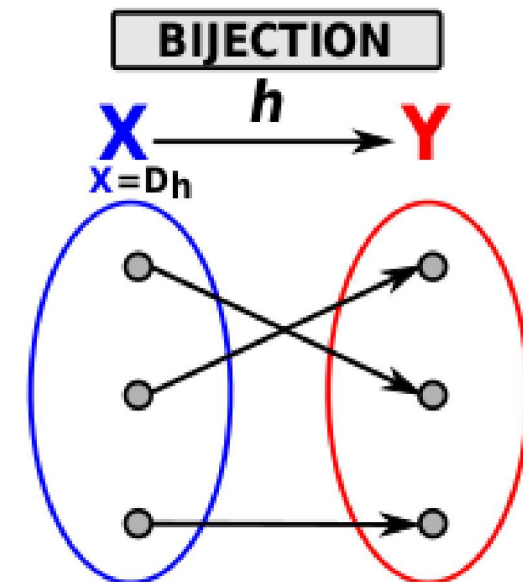
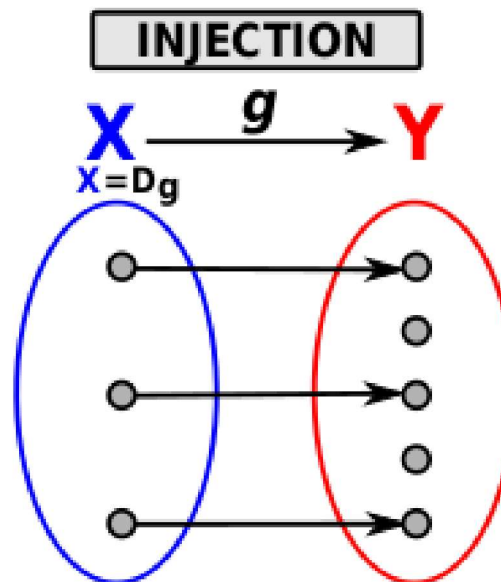
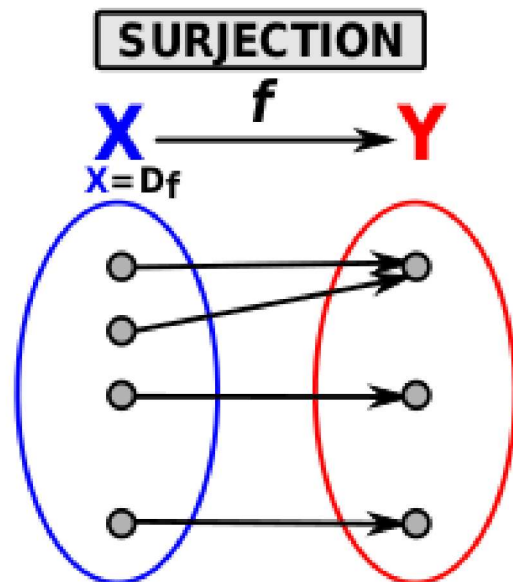
$P \Rightarrow Q$ équivaut à la contraposée $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Définition

Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction.

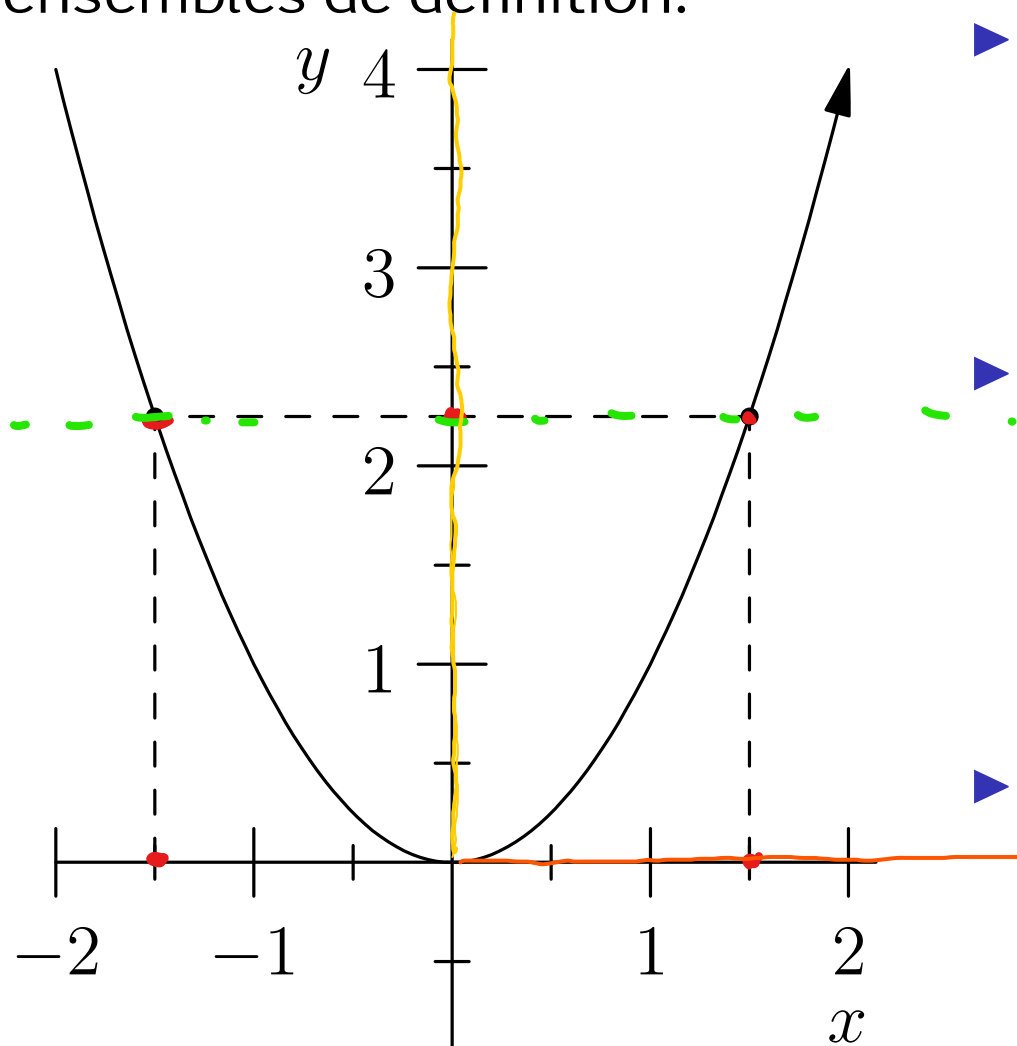
$$\rightarrow \forall y \in Y : \exists x \text{ tq } y = f(x)$$

- f est dite **surjective** si tout élément de Y est l'image d'au moins un élément de X ;
- f est dite **injective** si deux éléments distincts de X ont des images distinctes dans Y ;
 $\checkmark$ $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
 équiv $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- f est dite **bijective** si f est à la fois injective et surjective.



Exemples avec des fonctions réelles

La fonction $f : x \mapsto x^2$ change de nature quand on change ses ensembles de définition:



- ▶ Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ elle est **surjective** **mais non injective**: car tout réel $y \geq 0$ s'écrit comme $y = x^2$ avec $x = \sqrt{y}$. Mais $f(-x) = f(x)$.
- ▶ Si $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ alors f est **surjective et injective**, donc **bijective**. Car si $y \in \mathbb{R}_+$, il existe un unique réel $x \geq 0$ tel que $x^2 = y$: c'est précisément $\sqrt{y}$.
- ▶ Enfin si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, elle n'est **rien du tout**: car les réels négatifs ne sont pas dans l'image de f et $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour reformuler

Pour reformuler: une fonction $f : A \rightarrow B$ est

- ▶ surjective si tout élément de B est l'image **d'au moins** un élément de A
- ▶ injective si tout élément de B est l'image **d'au plus** un élément de A
↳ pas forcément surjectif.
- ▶ bijective si tout élément de B est l'image **d'un unique** élément de A .

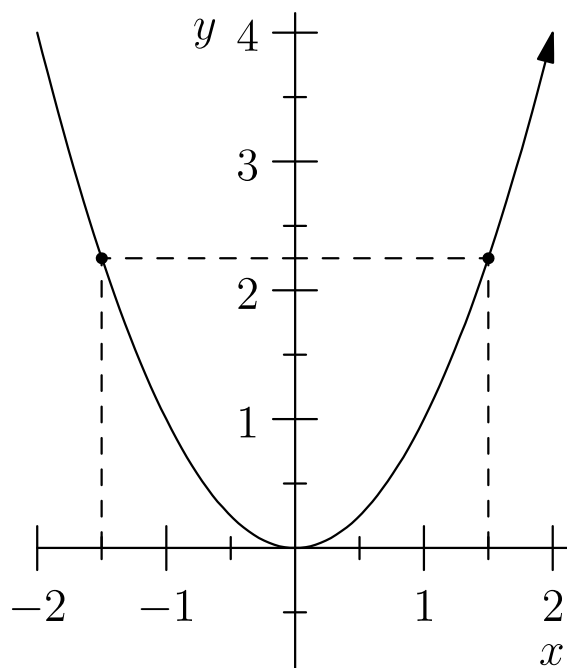
Attention, une fonction peut très bien n'être ni surjective ni injective (voir le transparent précédent).

Injectivité, surjectivité et graphe

Remarque

On peut “voir” les antécédents d'un nombre y sur le graphe de f en traçant une droite horizontale à hauteur y : les antécédents sont les abscisses des points d'intersection.

pré-images



Ensemble image

$$f : [a, b] \rightarrow [c, d]$$

$f([a, b])$ est l'image de f .

Définition

Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction. L'ensemble image de f , noté $\text{Im } f$ ou $f(A)$, est l'ensemble des valeurs prises par la fonction. C'est

$$\text{Im } f = \{f(x) \text{ tel que } x \in A\}.$$

Attention, l'ensemble image est un **ensemble**. Pour une fonction à valeurs réelles, par exemple, c'est une partie de $\mathbb{R}$.

Ensemble image

Exemples:

L'ensemble image de la fonction...

► $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est $\mathbb{R}^+$

► $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ est $\mathbb{R}$

► $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + 1$ est $[1, +\infty[$.

► $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin x$ est $[-1, 1]$.

$\forall y \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{y}$ a 1 seul quel que soit y .
 $x = \sqrt[3]{y} \quad f(x) = y$

$\forall y \in [1, +\infty[$

$y - 1 \in \mathbb{R}^+$

$y - 1 \in \text{Im}(x^2)$

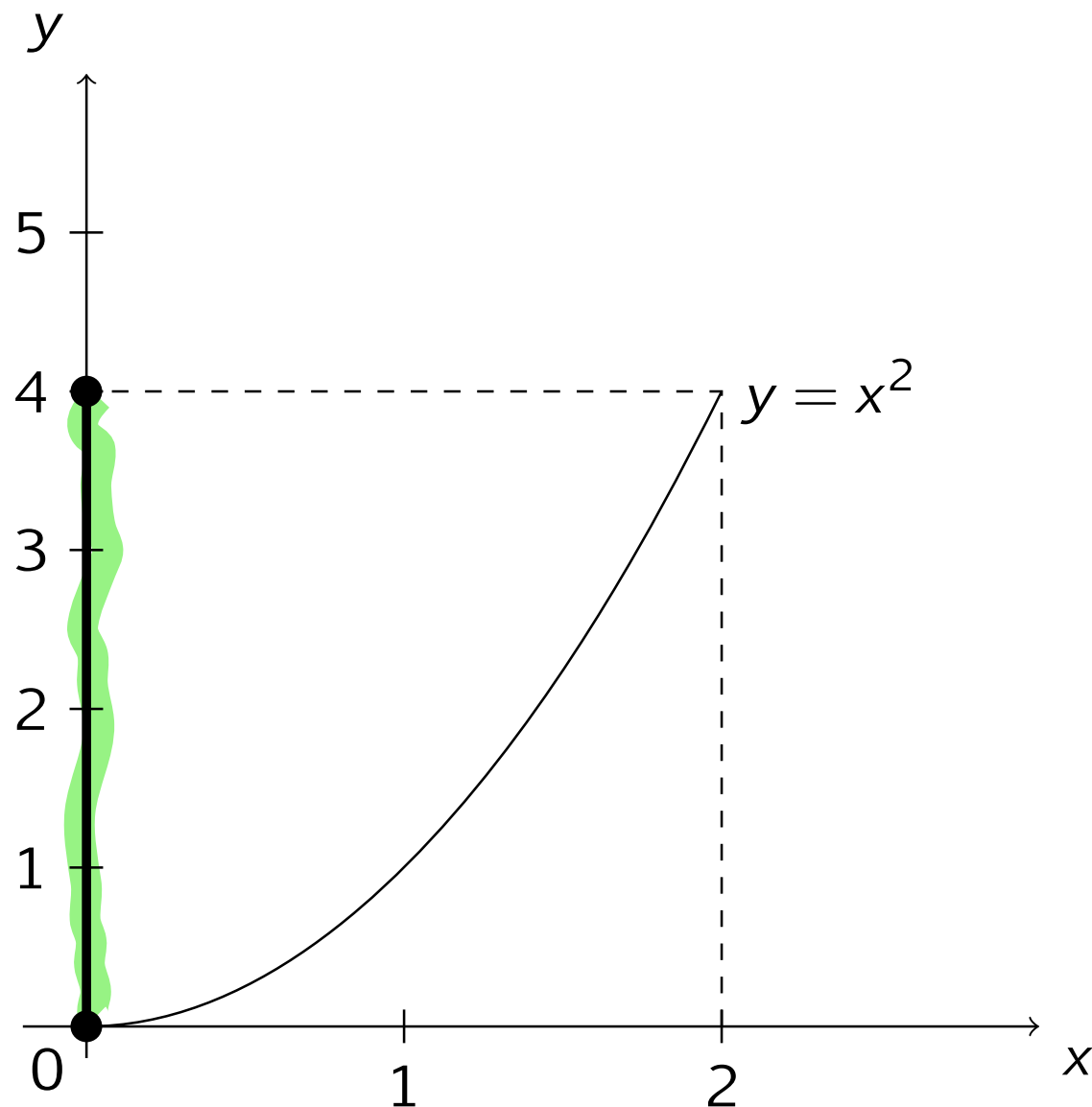
$\Rightarrow \exists x = \sqrt{y-1} : f(x) = y$.

et rien d'autre ne peut être dans l'image car $y < 1$

$\rightarrow y - 1 \in \mathbb{R}_0^-$

$\rightarrow$ pas de $\sqrt{\quad}$.

Le graphe de $[0, 2] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ et son ensemble image



Contenu de la section

Fonctions réciproques

Définitions

Fonctions réciproques

Logarithme et exponentielle

Fonctions trigonométriques réciproques

Continuité des fonctions réciproques

Réciproque

Définition

Une fonction $f: A \rightarrow B$ est dite *inversible* si il existe une fonction $g: B \rightarrow A$ telle que

$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in A \quad \text{et} \quad f(g(y)) = y \quad \forall y \in B.$$

La fonction g est appelée l'inverse ou la fonction réciproque de f , et se note f^{-1} .

$$(Id(x) := x.)$$

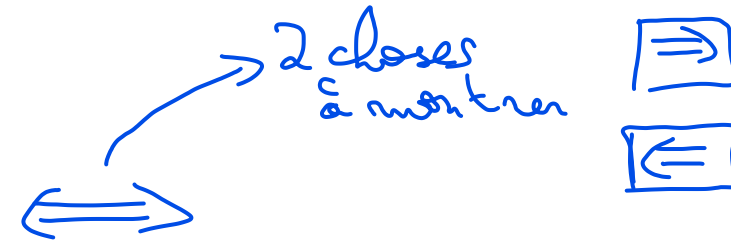
↳ pour l'opération de composition de fonction
 $f \circ g(x) = Id(x)$ et $g \circ f = Id$

Ecrire que $g(f(x)) = x$ (ou $f(g(y)) = y$) revient à dire que si on applique f à x puis qu'on applique g à la valeur $f(x)$ on retombe sur x :

Faites attention aux ensembles où vivent les variables: si on calcule $g(f(x))$ alors $x \in A$, mais si on calcule $f(g(y))$ alors $y \in B$.

Inversible = bijective

Résultat



1. Une fonction est inversible si et seulement si c'est une bijection.
2. Si g est la réciproque de f , alors f est la réciproque de g . En d'autres termes,

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Preuve

⇒ Soit f une fonction inversible d'inverse g . Alors f est

- ▶ injective car $f(x) = f(y)$ implique $x = g(f(x)) \equiv g(f(y)) = y$.
- ▶ surjective car si $z \in B$, alors $g(z)$ est un antécédent de z . Car $f(g(z)) = z$.

Donc f est bijective. Réciproquement, si f est bijective, alors pour tout $z \in B$ il existe un (surjectivité) unique (injectivité) antécédent par f , et on appelle cet antécédent $g(z)$.

2. (exo)

Graphe de la réciproque

Le résultat précédent (bijective = inversible = $\exists$ réciproque) montre qu'une fonction $f : A \rightarrow B$ est inversible si et seulement si pour tout $y \in B$, il existe un et un seul $x \in A$ tel que $y = f(x)$.

C'est cette valeur de x qui est notée $f^{-1}(y)$. Ou encore:

$$\text{lorsque } f \text{ est inversible, } y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Si $f : A \rightarrow B$ est bijective, alors le graphe de sa réciproque $f^{-1} : B \rightarrow A$ peut s'obtenir en prenant l'image du graphe de f par une symétrie d'axe $x = y$. Autrement dit, en échangeant les valeurs de x et y .

Une mise en garde

*inverse de f en tant que fct
opération.*

Attention à ne pas confondre $f^{-1}(x)$ (la fonction réciproque appliquée en x) avec $(f(x))^{-1} := 1/f(x)$ qui est l'inverse de $f(x)$! *en tant que nombre
opération.*
Dans le premier cas il s'agit d'une fonction qu'on applique à un point,
dans le deuxième c'est l'inverse d'un nombre réel (l'image).

Une mise en garde

Exemple

On note $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Par exemple, les fonctions

$$f : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0 : x \mapsto x \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$$

vérifient $(f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)} = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_0$.

Par contre vous pouvez vérifier que $f^{-1} = f$ et $\text{\textcolor{brown}{\underline}{}}g^{-1} = g$. La fonction g n'est donc pas la réciproque de f !


$$g(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$$
$$\iff g = g^{-1}$$

Contenu de la section

Fonctions réciproques

Définitions

Fonctions réciproques

Logarithme et exponentielle

Fonctions trigonométriques réciproques

Continuité des fonctions réciproques

Exemple: logarithme et exponentielle

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto e^x \\ g: \mathbb{R}_0^+ &\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

Rappel: si $x \in \mathbb{R}$ on peut toujours considérer e^x qui est un nombre réel strictement positif.

Si $y > 0$, $\ln y$ (logarithme népérien) désigne l'unique nombre réel tel que

$$e^{\ln(y)} = y. \quad \Longleftrightarrow \quad f(g(y)) = y.$$

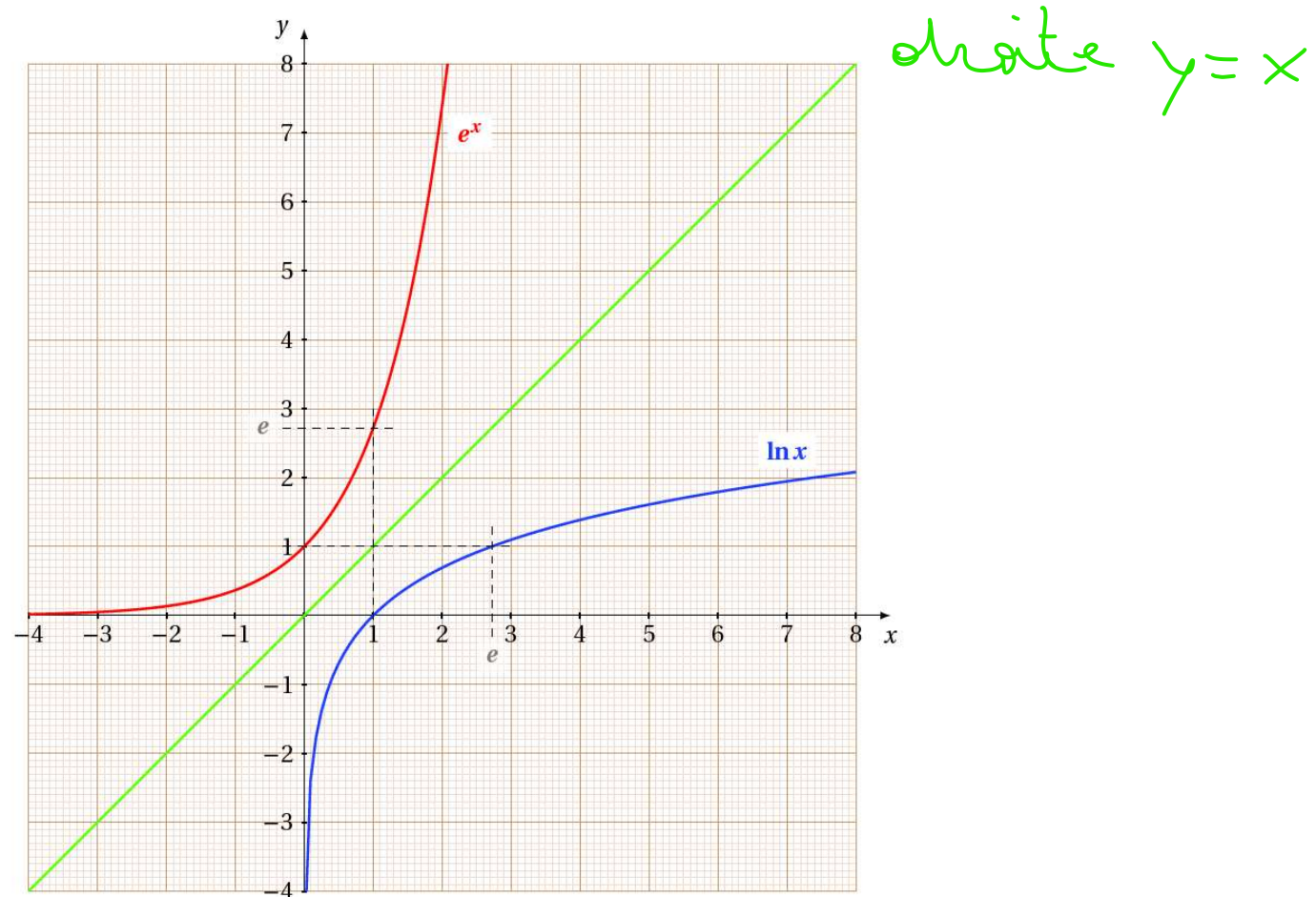
En d'autres termes, $\ln y$ est l'unique antécédent de y pour la fonction

Ceci montre que la fonction exponentielle $\mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[, x \mapsto \exp(x)$ est **invertible** et que la fonction $\ln$ est sa réciproque. Ou encore:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0$$

$$\exp(x) = y \Longleftrightarrow x = \ln(y).$$

Exemple: logarithme et exponentielle (suite)



On rappelle les limites de $\ln$ et $\exp$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty.$$

Contenu de la section

Fonctions réciproques

Définitions

Fonctions réciproques

Logarithme et exponentielle

Fonctions trigonométriques réciproques

Continuité des fonctions réciproques

Nous avons vu les fonctions $\sin$, $\cos$ et $\tan$ dans le cours de trigonométrie.

Si on regarde les fonctions $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ces fonctions ne sont jamais bijectives.

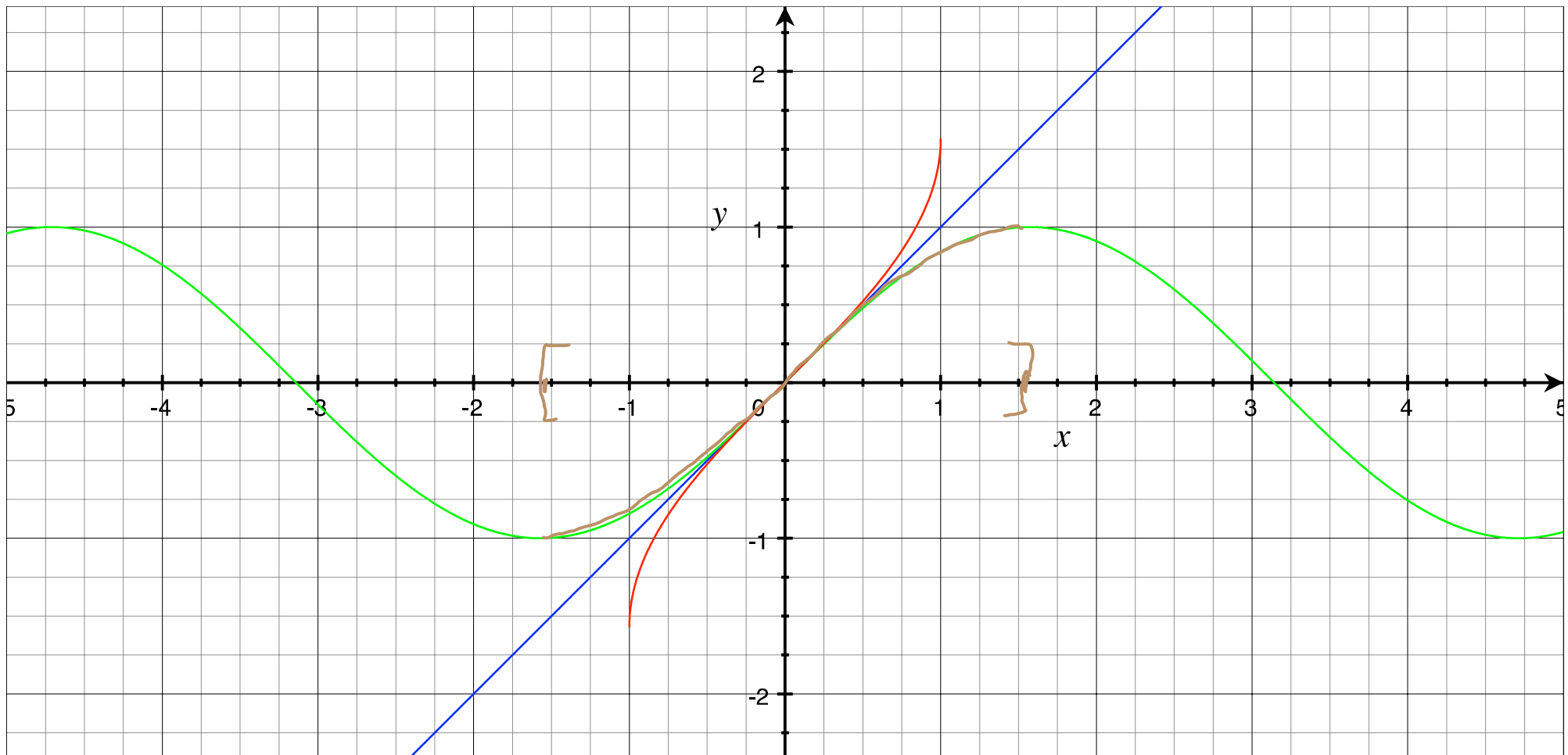
Par exemple car $\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$ et $\cos(0) = \cos(2\pi) = 1$.

Nous allons maintenant voir que si on se limite au départ à des valeurs plus restreintes en x , ces fonctions deviennent inversibles.

Réciproque de sin: arcsinus

La fonction $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ possède une réciproque notée :

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Attention: Il est **faux** de dire que “ $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ admet une fonction réciproque”!

La fonction $\sin$ admet une réciproque **seulement sur un intervalle où elle est inversible**, c'est-à-dire sur un intervalle où tout élément de l'image a exactement un antécédent. $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est un tel intervalle.

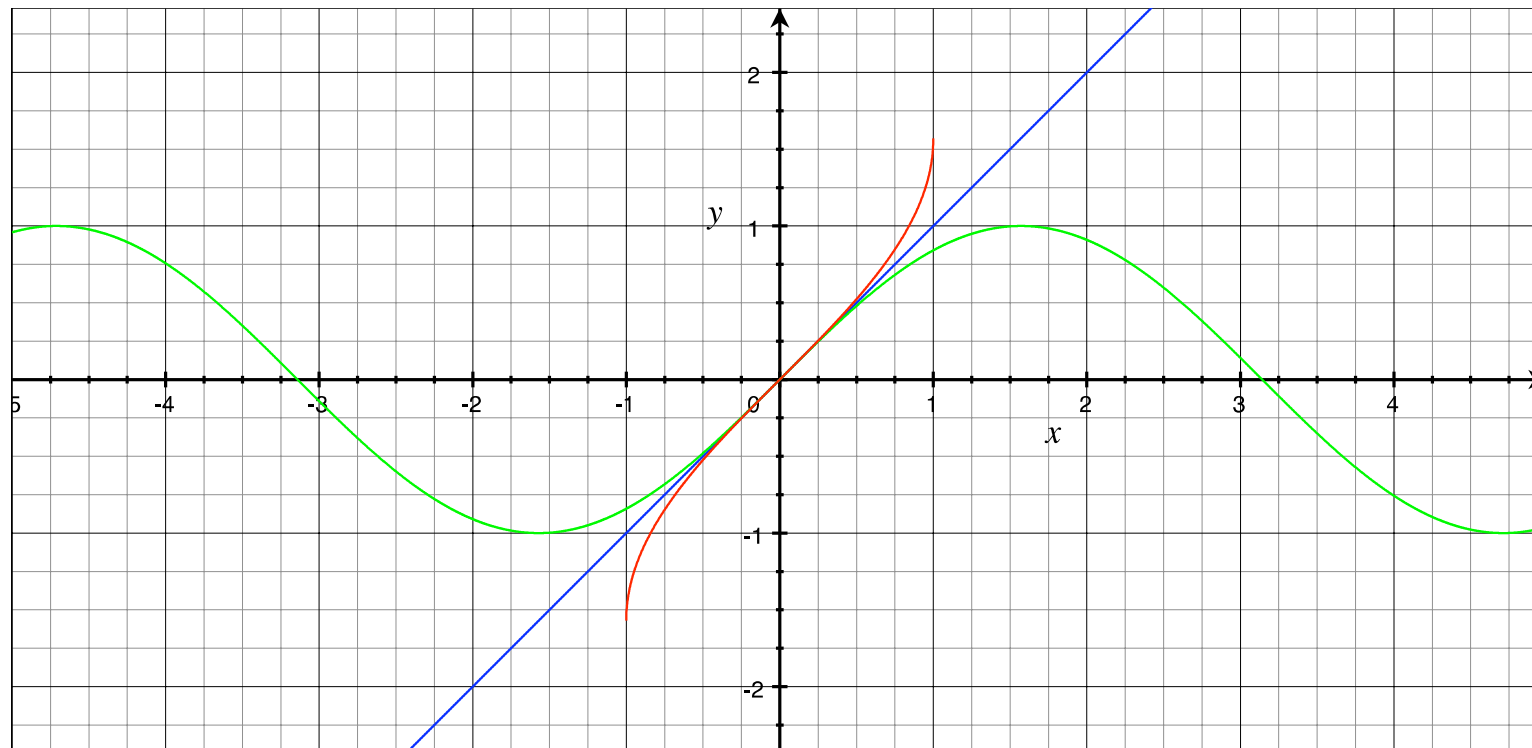


Figure: Graphes de $\sin$ (en vert) et $\arcsin$ (en rouge)

De la même manière: la fonction $\sin$ **n'est pas bijective (= inversible)** sur $[-\pi, \pi]$!

Réciproque de cos: arccosinus

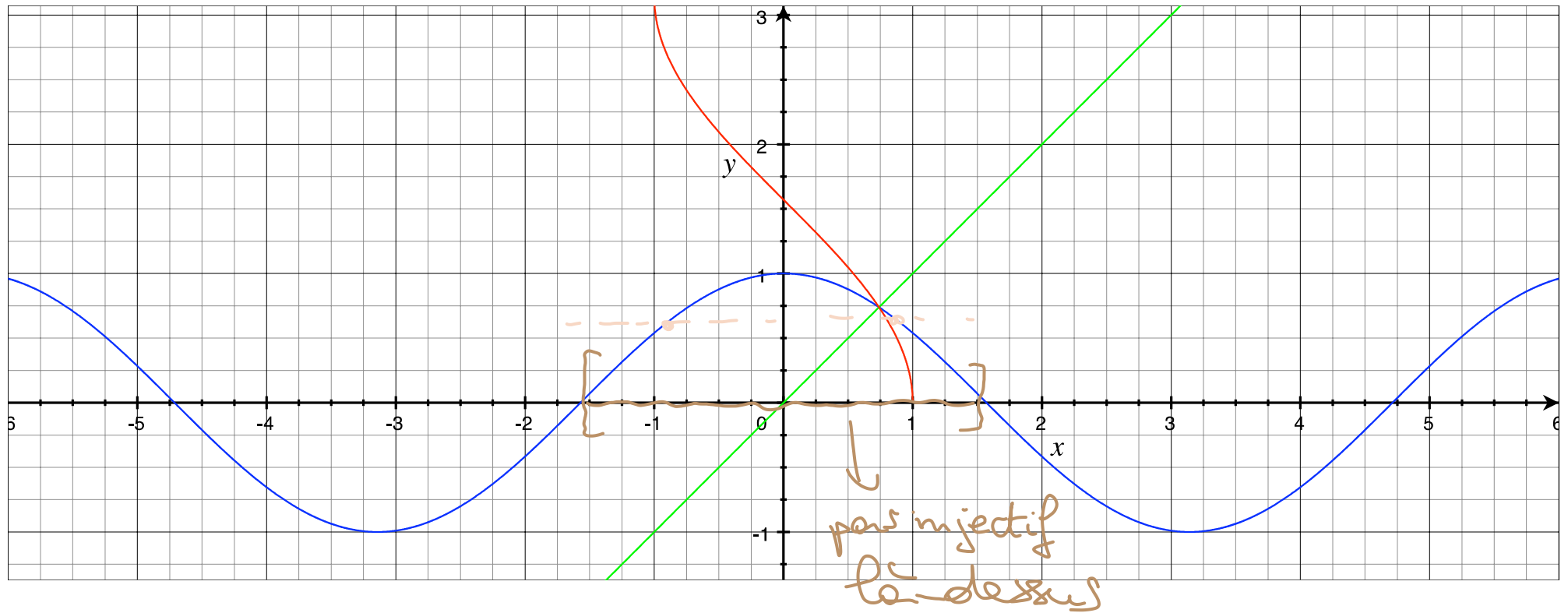


Figure: Graphes de cos (bleu) et arccos (rouge)

Réciproque de cos: Arccosinus

La réciproque de $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

Car $\cos$ est bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

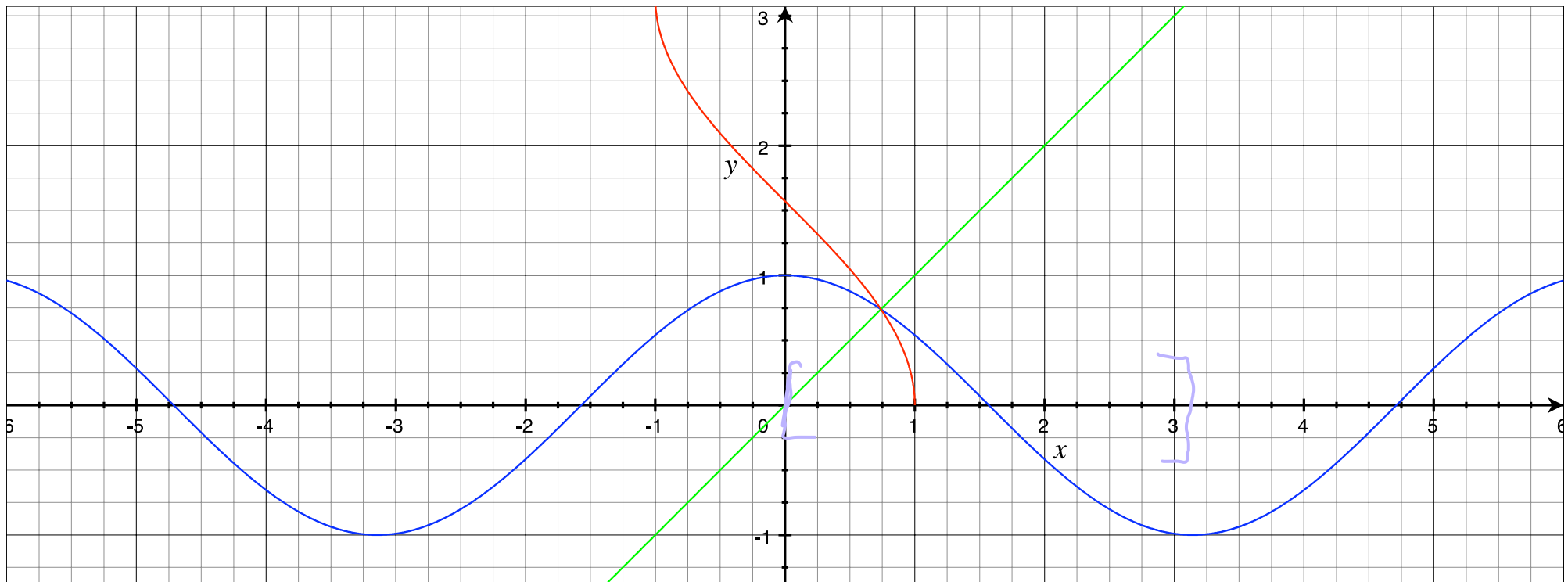
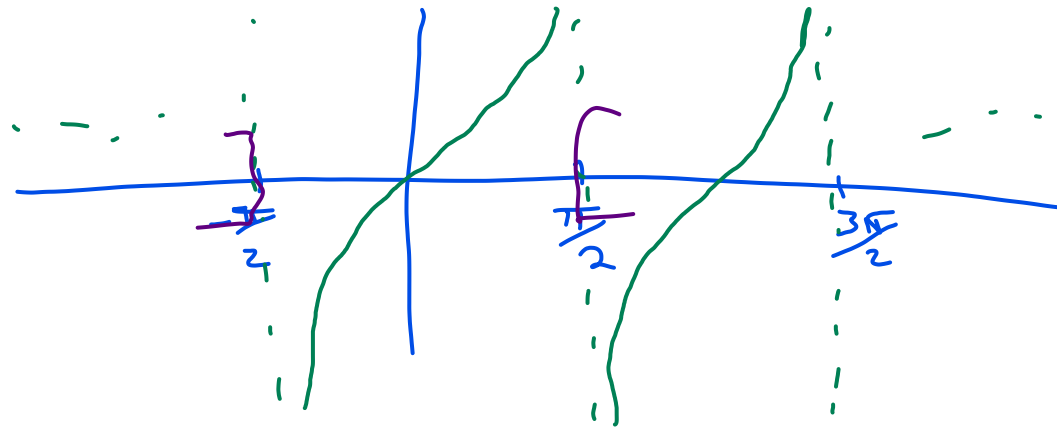


Figure: Graphes de $\cos$ (bleu) et $\arccos$ (rouge)

La fonction tan



Rappelons la définition donnée dans le cours de trigonométrie:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Cette définition a du sens tant que $\cos(x) \neq 0$, c'est-à-dire tant que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour un certain entier $k \in \mathbb{Z}$.

La fonction tan est donc bien définie **et continue** sur tout intervalle de la forme $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$.

Comme tan est en plus π -périodique, il suffit de l'étudier sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

La fonction tan

Comme $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \cos(x) = 0^+$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \cos(x) = 0^+$ et que $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ les règles sur les limites donnent:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan(x) = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty .$$

$\frac{1}{0^+}$

Réciproque de tan: arctangente

$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow]-\infty, \infty[$ est une bijection. Sa fonction réciproque est alors notée

$$\text{arctg} :]-\infty, \infty[\rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

arctan

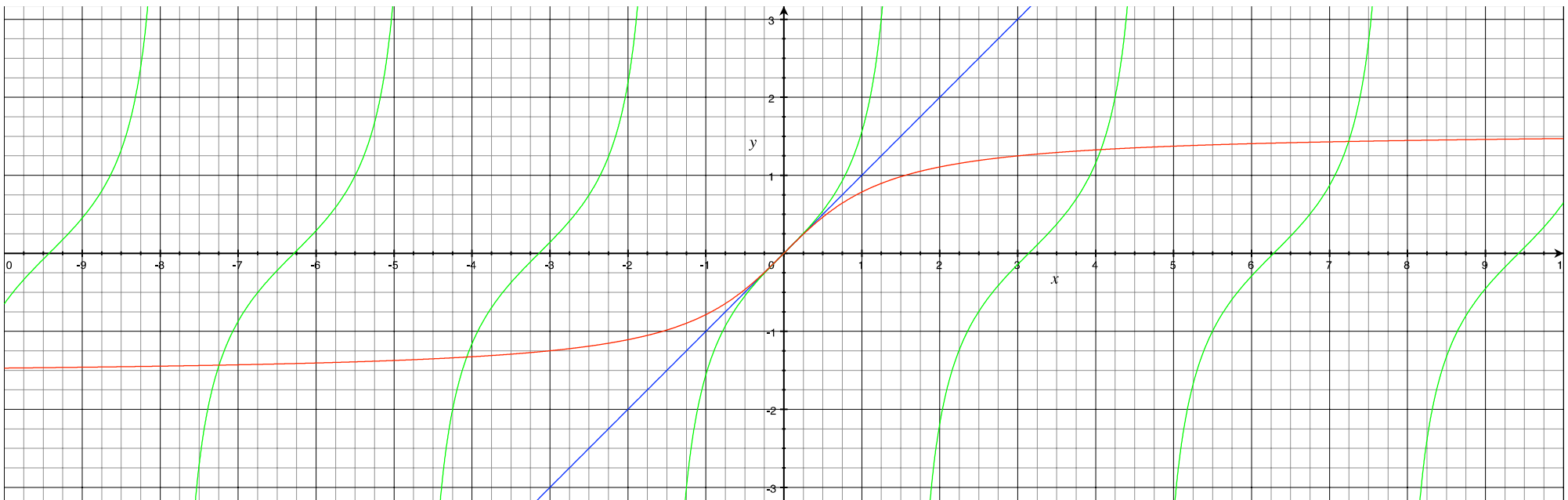


Figure: Graphes de $\tan$ (vert) et $\arctg$ (rouge)

On peut aussi définir la réciproque de $\cotg :]0, \pi[\rightarrow]-\infty, \infty[$.

Contenu de la section

Fonctions réciproques

Définitions

Fonctions réciproques

Logarithme et exponentielle

Fonctions trigonométriques réciproques

Continuité des fonctions réciproques

Continuité des fonctions réciproques

Résultat

Soit f une fonction réelle bijective définie sur un intervalle. Si f est continue en a , alors sa réciproque est continue en $f(a)$.

Attention, ça ne marche plus si f n'est pas définie sur un intervalle! Par exemple si f est définie sur une union d'intervalles.

En particulier les fonctions arcsin, arccos et arctg sont continues sur leur domaine de définition.

