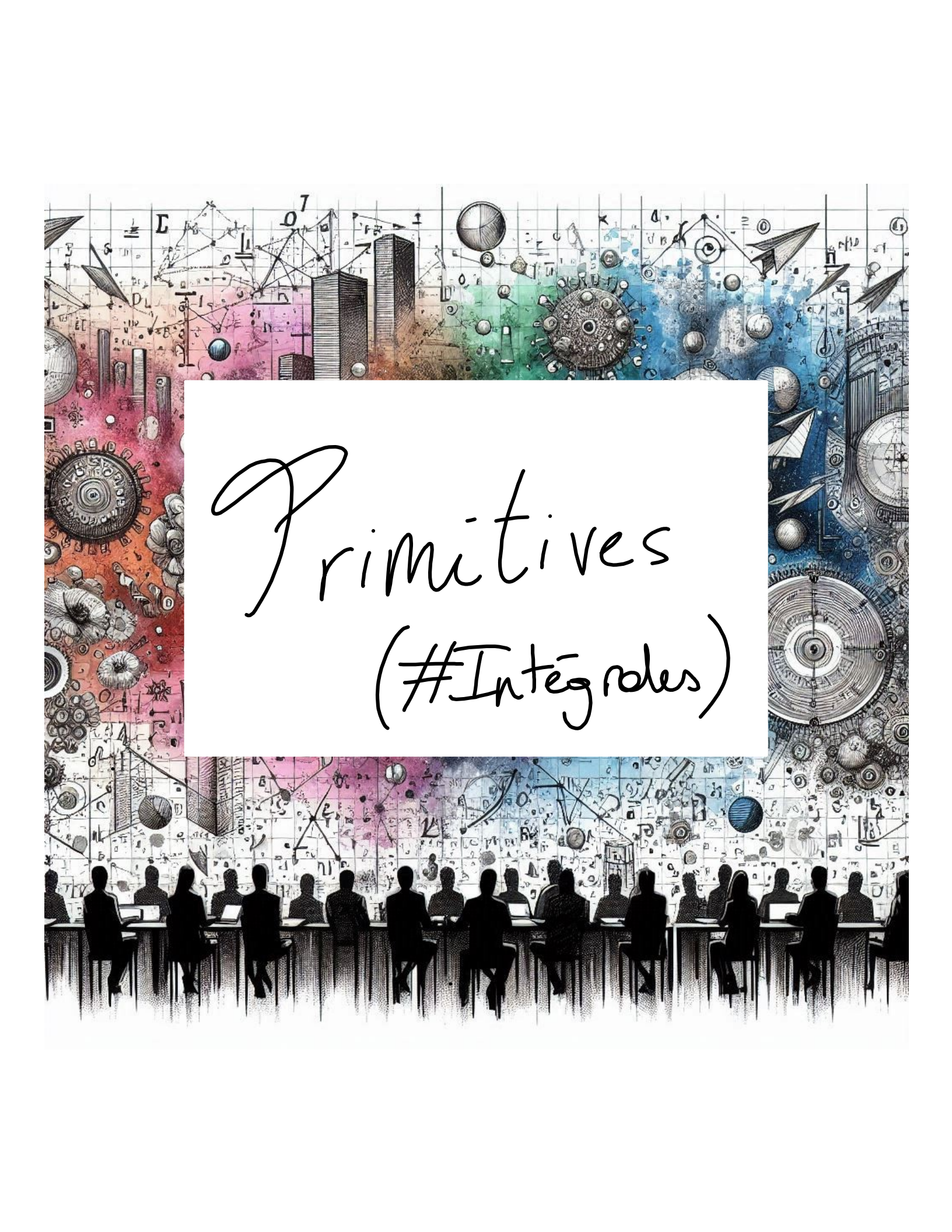




Primitives (#Integrals)

f une fonction. F (une autre fonction)
est une **primitive** de f si

$$F' = f \Leftrightarrow \int f = F.$$

Si F est une primitive de f

Alors $\tilde{F} = F + \text{cte}$ aussi

$$\begin{aligned} \text{car } (\tilde{F})' &= (F + \text{cte})' \\ &= F' + 0 \\ &= f \end{aligned}$$

De même,

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$$

$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Pour les polynomes :

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} \quad \text{pour } a \neq -1$$

11.1. Soit f une fonction admettant comme primitive la fonction appliquant x sur $2\sin^2 x$. Déterminer parmi les expressions suivantes celles qui représentent aussi une primitive de f :

a) $-\cos 2x$;

c) $\cos x^2$;

b) $-\cos^2 x$;

d) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

$F(x) = 2\sin^2 x$ est une primitive de f

$$\Leftrightarrow f(x) = F'(x) = (2\sin^2(x))'$$

$\sin^2(x) = u(v(x))$ où $u(x) = x^2$
 $v(x) = \sin(x)$

$$= 2 \cdot (2 \cdot \sin(x)) \cdot \cos(x) = \boxed{4 \sin(x) \cos(x)}$$

on calcule la dérivée des propositions :

a) $(-\cos(2x))' = 2 \cdot \sin(2x) = 2 \cdot (2 \sin(x) \cos(x)) = f(x)$ (✓)

$-\cos(2x) = u(v(x))$ où
 $u(x) = -\cos(x)$ $u'(x) = \sin(x)$
 $v(x) = 2x$ $v'(x) = 2$

b) $(-\cos^2(x))' = -2 \cos(x) (\cos(x))' = 2 \sin(x) \cos(x) \neq f(x)$ (x)

c) $(\cos(x^2))' = -\sin(x^2) \cdot (x^2)' = -2x \sin(x^2) \neq f(x)$ (x)

d) $(\sin(2x - \frac{\pi}{2}))' = \cos(2x - \frac{\pi}{2}) \cdot 2 = 2 \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = 2 \sin(2x)$ (✓)

11.2. Donner, par intégration immédiate, ~~une~~ primitive de la fonction envoyant la valeur réelle x sur

f) $\frac{1}{\cos^2 9x}$; on sait que $(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$
donc $\tan(9x) = \frac{1}{\cos^2(9x)} \cdot (9x)' = \frac{9}{\cos^2(9x)}$

$\rightarrow \frac{\tan(9x)}{9}$ est une primitive de $\frac{1}{\cos^2(9x)}$

h) $e^{\sin x} \cos x$;

$(e^{\sin(x)})' = e^{\sin(x)} \cdot (\sin(x))'$

$e^{\sin(x)} = u(r(x))$

où $u(x) = e^x$ et $r(x) = \sin(x)$

$= e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$

$\rightarrow e^{\sin(x)}$ de $e^{\sin(x)} \cos(x)$

u) 1993; $\int 1993 \, dx = 1993 \cdot \int 1 \, dx$
 $= 1993x + C$
 $\rightarrow 1993x$ est une primitive de 1993.

$= x^0$, donc $\int 1 \, dx = 1x^1 + C$

11.3. Calculer, en décomposant l'intégrande : +C

b) $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}} \right) dx;$

$$= \int \frac{3}{\sqrt[3]{x}} dx - \int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}} dx = \frac{x^1 \cdot x^{1/2}}{x^{1/5}} = x^{(1+1/2-1/5)}$$

$$= 3 \int x^{-1/3} dx - \int x^{13/10} dx$$

$$= 3 \left(\frac{3}{2} x^{2/3} \right) - \left(\frac{10}{23} x^{23/10} \right) + C$$

$$= \frac{9}{2} x^{2/3} - \frac{10}{23} x^{23/10} + C$$

c) $\int \cos^2(x-2) dx;$ $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
 $= 2 \cos^2(a) - 1$

$$= \int \frac{1}{2} (2 \cos^2(x-2) - 1) + \frac{1}{2} dx$$

$$= \int \frac{1}{2} \cos(2(x-2)) + \frac{1}{2} dx$$

$$= \int \frac{1}{2} \cos(2x-4) dx + \int \frac{1}{2} dx \quad \xrightarrow{x/2}$$

$(\sin(2x-4))' = 2 \cos(2x-4) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cos(2x-4) \right)$
 donc $\frac{1}{4} \sin(2x-4)$ est une primitive de $\frac{1}{2} \cos(2x-4)$

$$= \frac{1}{4} \sin(2x-4) + \frac{x}{2} + C$$

Plus précisément :

$$\text{Si } \int f(u) du = F(u)$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \int f(ax+b) du \\ = \frac{1}{a} F(ax+b) \end{aligned}$$

→ changement d'échelle

Chgt de variables

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = \int f(t) dt$$

$$\begin{aligned} \text{Car } \int (F(u(x)))' dx &= \int F'(u(x)) u'(x) dx \\ &= \int f(u(x)) u'(x) dx \end{aligned}$$

Concrètement :

peut être
enchassée dans
une autre fct

① Vérifier qu'on a une fonction et
sa dérivée en multiplication avec dx

② Poser $t = u(x)$

③ Calculer $dt = u'(x) dx$

④ Remplacer dans l'intégrande

! Aux constantes multiplicatives.

11.4. Calculer, par changement de variable :

b) $\int x^2 (1 - x^3)^2 dx;$
($= -\frac{1}{3} dt$)

$$t = (1 - x^3)$$

$$\frac{dt}{dx} = -3x^2$$

$$\Leftrightarrow dt = -3x^2 dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} dt = x^2 dx$$

$$= \int t^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) dt$$

$$= -\frac{1}{3} \int t^2 dt = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} t^3$$

$$= -\frac{1}{9} t^2 + C = -\frac{1}{9} (1 - x^3)^2 + C$$

g) $\int \frac{dx}{x \ln x};$

$$t = \ln(x)$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow dt = \frac{1}{x} dx$$

$$= \int \frac{1}{t} dt$$

$$= \ln(t) + C$$

$$= \ln(\ln(x)) + C$$

11.5. Calculer $\int \frac{2e^{1/x}}{x^2} dx$, $+C$

puis déterminer toutes les fonctions $x \mapsto f(x)$ telles que

$$f'(x) = \frac{2e^{1/x}}{x^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

$$\int \frac{2e^{1/x}}{x^2} dx$$

$$t = \frac{1}{x}$$

$$dt = -\frac{1}{x^2} dx$$

$$\Leftrightarrow -2 dt = \frac{2}{x^2} dx$$

$$= \int -2 e^t dt$$

$$= -2 e^t + C = -2 e^{1/x} + C$$

• $f'(x) = \frac{2e^{1/x}}{x^2} \Leftrightarrow f$ est une primitive de $\frac{2e^{1/x}}{x^2}$

$\rightarrow f(x) = -2 e^{1/x} + C$ pour un certain $C \in \mathbb{R}$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 e^{1/x} + C) = 0$

$$\Leftrightarrow -2 e^0 + C = 0$$

$$\Leftrightarrow C = 2 e^0 = 2$$

on en déduit que $f(x) = -2 e^{1/x} + 2$.

Intégrales par parties (IPP)

Soient f, g des fonctions, et
soit $F = \int f dx$ ($\Rightarrow F' = f$)

$$\begin{aligned} \bullet (Fg)' &= F'g + Fg' \\ &= fg + Fg' \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow fg = (Fg)' - Fg'$$

$$\longrightarrow \boxed{\int fg \, dx = Fg - \int Fg' \, dx}$$

on veut
que f soit
facile à intégrer

on veut
que g' soit simple
que g

11.6. Intégrer par parties la fonction appliquant x sur

d) $x \arctan x$;

+ C

$$\int x \arctan(x) dx$$

$F' = x$	$F = \frac{x^2}{2}$
$g = \arctan(x)$	$g' = \frac{1}{1+x^2}$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \arctan(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{(1+x^2)} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}$$
$$= 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \left(\int 1 dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx \right)$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} (x - \arctan(x)) + C$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan(x) + C$$

$$= \frac{(x^2+1)}{2} \arctan(x) - \frac{x}{2} + C$$

e) $e^x \sin x$;

$$\int e^x \sin x \, dx$$

$$F' = e^x$$

$$g = \sin(x)$$

$$F = e^x$$

$$g' = \cos(x)$$

$$= e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) \, dx$$

$$F' = e^x$$

$$g = \cos(x)$$

$$F = e^x$$

$$g' = -\sin(x)$$

$$= e^x \sin(x) - \left(e^x \cos(x) - \int e^x (-\sin(x)) \, dx \right)$$

$$= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x) \, dx$$

On a donc $\int e^x \sin(x) \, dx = e^x (\sin(x) - \cos(x)) - \int e^x \sin(x) \, dx$

$$\Leftrightarrow 2 \int e^x \sin(x) \, dx = e^x (\sin(x) - \cos(x)) + C$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin(x) \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin(x) - \cos(x)) + C$$

Intégrer des fonctions rationnelles de $\sin x$ et $\cos x$

- des changements de variables

- $t = \cos x \quad dt = -\sin x dx$

- $t = \sin x \quad dt = \cos x dx$

- La formule

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

- le co-tangente

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

11.16. Calculer les intégrales indéfinies (de fonctions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$) : +C

b) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$;

$$= \int \frac{\sin^2(x) \sin(x)}{\cos^2(x)} dx$$

$$= \int \frac{(1 - \cos^2(x)) \sin(x)}{\cos^2(x)} dx$$

$t = \cos(x) \quad dt = -\sin(x) dx$
 $\Rightarrow -dt = \sin(x) dx$

$$= \int -\frac{(1 - t^2)}{t^2} dt = \int 1 dt - \int \frac{1}{t^2} dt = t^{-2}$$

$$= t - (-1) t^{-1} + C$$

$$= \cos(x) + \frac{1}{\cos(x)} + C$$

c) $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$;

on veut faire apparaître du $\sin^2(x)$
(pour le transformer en $\cos^2(x)$)

$$= \int \frac{1}{1 + \sin(x)} \cdot \frac{1 - \sin(x)}{1 - \sin(x)} dx$$

$$= \int \frac{1 - \sin(x)}{1 - \sin^2(x)} dx$$

$$= \int \frac{1 - \sin(x)}{\cos^2(x)} dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx + \int \frac{-\sin(x)}{\cos^2(x)} dx$$

$= (\tan(x))'$
 $t = \cos(x)$
 $dt = -\sin(x) dx$

$$= \tan(x) + \int \frac{1}{t^2} dt$$

$$= \tan(x) - \frac{1}{t} + C$$

$$= \tan(x) - \frac{1}{\cos(x)} + C$$

