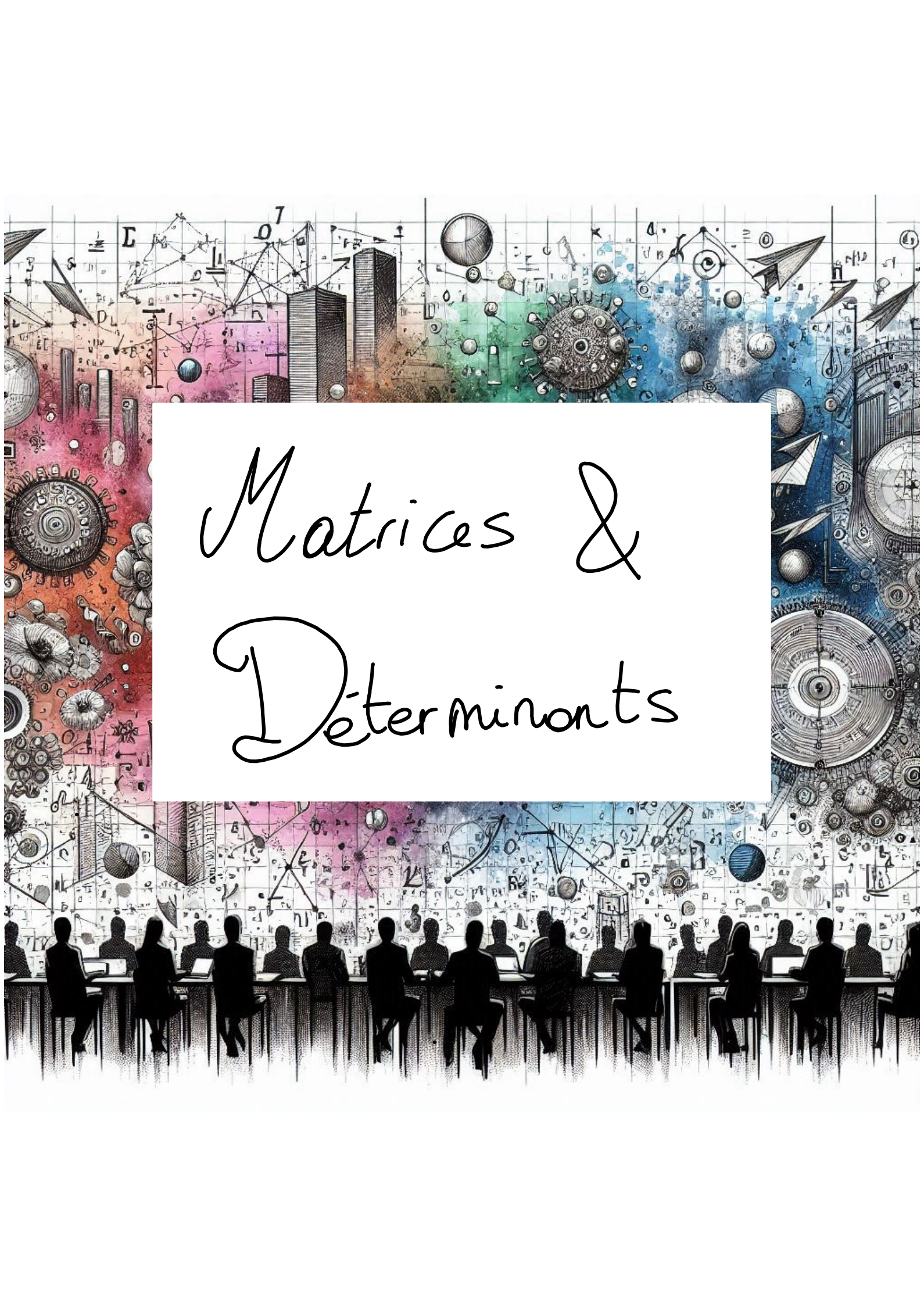




Matrices & Determinants



14.2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

montrer que $(A+B)^2 = A^2 + B^2$

est-il vrai pour tout choix de deux matrices réelles ?

$$\bullet (A+B) = \begin{pmatrix} 1+1 & -1+1 \\ 2+4 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 0 \cdot 6 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) \\ 6 \cdot 2 + (-2) \cdot 6 & 6 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\bullet A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-2) & -1+1 \\ 2+(-2) & (-2)+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 1-1 \\ 4-4 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} (-1)+5 & 0+0 \\ 0+0 & (-1)+5 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = (A+B)^2 \quad \square$$

En général, " $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ " est faux.

Contre-exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B$:

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq$$

$$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

15.2. Résoudre les systèmes réels suivants par la méthode de Gauss

c.
$$\begin{cases} x + y + z - 3t = 2 \\ x - 2y + 2z + 15t = -3 \\ x + y - z - 9t = 0 \end{cases}$$

on veut avoir une matrice

diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$

• 1^{ère} étape : on annule le triangle inférieur.

• 2^{ème} étape : on divise par avoir que des "1" sur la diagonale

• 3^{ème} étape : on annule le triangle supérieur.

• 4^{ème} étape : on résout le système d'équations

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} x & y & z & t & | & cte \\ 1 & 1 & 1 & -3 & | & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 15 & | & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -9 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$L_2 \rightarrow L_2 - L_1$
 $L_3 \rightarrow L_3 - L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & | & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 18 & | & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & | & -2 \end{pmatrix}$$

$L_2 \rightarrow -L_2/3$
 $L_3 \rightarrow -L_3/2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1/3 & -6 & | & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$L_1 \rightarrow L_1 - L_3$
 $L_2 \rightarrow L_2 + \frac{1}{3}L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -6 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$L_1 \rightarrow L_1 - L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - t = -1 \\ y - 5t = 2 \\ z + 3t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 5t + 2 \\ z = -3t + 1 \end{cases}$$

$$S = \left\{ (\underbrace{t-1}_x, \underbrace{5t+2}_y, \underbrace{-3t+1}_z, \underbrace{t}_t) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$d. \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x + 2y - 3z + t = 1 \\ x - y - 2t = 1 \end{cases}$$

$x \quad y \quad z \quad t \quad \text{cte}$

$$\begin{array}{l} L1 \\ \rightarrow L2 \\ L3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_3 \rightarrow L_3 + 2L_2 \\ (=) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_3 \rightarrow L_3 / 8 \\ (=) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 + 5L_3 \\ L_1 \rightarrow L_1 - 2L_3 \\ (=) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 - L_2 \\ (=) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (=) \begin{cases} x - t = 1 \\ y + t = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$S = \{ (\underbrace{t+1}_x, \underbrace{-t}_y, \underbrace{0}_z, \underbrace{t}_t) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$i. \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = -1 \\ x + z = 0 \\ 3x + 4y = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \text{cte} \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 - 3L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_3 \rightarrow L_3 - \frac{3}{8}L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 - \frac{5}{8}L_2 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & 0 & -19/8 & 27/8 \end{array} \right)$$

$$L_4 \rightarrow L_4 + 19/3 L_3 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & 0 & 0 & 47/8 \end{array} \right)$$

L_4 se réécrit $0x + 0y + 0z = 47/8$

$\Leftrightarrow 0 = 47/8 \rightarrow \text{impossible}$

$\rightarrow S = \emptyset$

Trois hommes ont chacun certaine somme d'écus.

Le premier donne des siens aux deux autres autant qu'ils en ont chacun
en après le second en donne aux deux autres autant qu'ils ont chacun
finalement le troisième en donne aux deux autres autant qu'ils en ont chacun
cela fait, chacun se trouve 8 écus.

On demande combien chacun en avait du commencement

Situation initiale : 1^{er} homme a x (écus)
2^{ème} homme a y (écus)
3^{ème} homme a z (écus)

1^{er} échange : 1^{er} homme a $x - y - z$ (écus)
2^{ème} homme a $2y$ (écus)
3^{ème} homme a $2z$ (écus)

2^{ème} échange : 1^{er} homme a $2(x - y - z) = 2x - 2y - 2z$ (écus)
2^{ème} homme a $2y - (x - y - z) - 2z = -x + 3y - z$ (écus)
3^{ème} homme a $4z = 4z$ (écus)

3^{ème} échange : 1^{er} homme a $4x - 4y - 4z$ (écus)
2^{ème} homme a $-2x + 6y - 2z$ (écus)
3^{ème} homme a $4z - (2x - 2y - 2z) - (-x + 3y - z)$ (écus)
 $= -x - y + 7z$ (écus)

Situation finale : 1^{er} homme a 8 écus.
2^{ème} homme a 8 écus.
3^{ème} homme a 8 écus.

$$O_{12} \quad \begin{cases} x - y - z = 2 \\ -x + 3y - z = 4 \\ -x - y + 7z = 8 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} x & y & z & | & \text{ado} \\ 1 & -1 & -1 & | & 2 \\ -1 & 3 & -1 & | & 4 \\ -1 & -1 & 7 & | & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 2 & -2 & | & 6 \\ 0 & -2 & 6 & | & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \rightarrow L_3 + L_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 2 & -2 & | & 6 \\ 0 & 0 & 4 & | & 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \rightarrow L_2/2 \\ L_3 \rightarrow L_3/4 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \rightarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + L_3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 7 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \rightarrow L_1 + L_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 13 \\ 0 & 1 & 0 & | & 7 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = 13 \\ y & = 7 \\ z & = 4 \end{cases}$$

$$\rightarrow S = \{ (13, 7, 4) \}$$

15.9. Déterminer les inverses des matrices **réelles** suivantes

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

On pose

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} & B & & I_{3 \times 3} & & \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

on veut obtenir quelque chose de la forme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \end{array} \right)$$

→ Méthode de Gauss

$$\begin{aligned} L_2 &\rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 &\rightarrow L_3 - 3L_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} L_2 &\rightarrow -L_2 \\ L_3 &\rightarrow -L_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & +3 & +2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & +2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} L_1 &\rightarrow L_1 - 3L_2 \\ L_2 &\rightarrow L_2 - 3L_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$L_1 \rightarrow -2L_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

→ $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer les déterminants des matrices réelles suivantes, et leur matrice inverse quand elle existe :

$$e) E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det E = -0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= +1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$= \underbrace{(1 \cdot 1 - 0 \cdot 2)}_{=1} + \underbrace{(2 \cdot 2 - 1 \cdot 4)}_{=0}$$

$$= 1$$

$$\det E = 1 \neq 0$$

Donc E est inversible

Methode de Gauss:

$$E \quad I_{4 \times 4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} L_2 &\rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 &\rightarrow L_3 - 4L_1 \\ L_4 &\rightarrow L_4 + 2L_1 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} L_3 &\rightarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 &\rightarrow L_4 - 3L_2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 8 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_4 \rightarrow L_4 - 9L_3 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 15 & -9 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} L_1 &\rightarrow L_1 - L_3 \\ L_2 &\rightarrow L_2 + 2L_3 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 15 & -9 & 1 \end{array} \right)$$

Donc $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & 15 & -9 & 1 \end{pmatrix}$

16.2. Montrer, sans développer de déterminant, les égalités

$$c) \quad \det \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix} = 0;$$

Propriétés du déterminant :

(A) On peut ajouter une ligne à une autre ligne
sans changer le déterminant :

$$\underline{\text{Ex:}} \quad \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + ka_1 & b_2 + ka_2 & b_3 + ka_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

(où k est une constante)

(B) Si on multiplie une ligne par une constante k ,
le déterminant est aussi multiplié par k .

$$\underline{\text{Ex:}} \quad \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ ka_1 & ka_2 & ka_3 \end{pmatrix} = k \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

(C) Si 2 lignes sont les mêmes, le déterminant vaut 0.

$$\underline{\text{Ex:}} \quad \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}$$

via (A), on peut faire $\begin{pmatrix} L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \end{pmatrix}$
sans changer le déterminant.

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1-1 & b-a & c+a-(b+c) \\ 1-1 & c-a & a+b-(b+c) \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & b-a & a-b \\ 0 & c-a & a-c \end{pmatrix}$$

on "met en évidence" sur toute la ligne.

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & (b-a) \cdot 1 & (b-a) \cdot (-1) \\ 0 & (c-a) \cdot 1 & (c-a) \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

(B) nous permet de "sortir"
(b-a) et (c-a) du déterminant

$$= (b-a) (c-a) \det \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 0 \quad (\text{via (C), car } L_2 \text{ et } L_3 \text{ sont les mêmes.})$$