



Ex cathedra

⑫

13.5. Le mouvement d'un point $p = (x, y)$

dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$

est donné en fonction du temps t

par

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow p(t) = (x(t), y(t))$$

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cos 3t, \\ y = -1 + 6 \sin 3t. \end{cases}$$

13.5
← $x(t)$
← $y(t)$

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cos 3t, \\ y = -1 + 6 \sin 3t. \end{cases}$$

Au temps $t=0$, le point
se trouve en $(x(0), y(0))$
 $= (5, -1)$

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cos 3t, \\ y = -1 + 6 \sin 3t. \end{cases}$$

Au temps $t = \frac{\pi}{6}$, le point
se trouve en $(x(\frac{\pi}{6}), y(\frac{\pi}{6}))$
 $= (2, 5)$

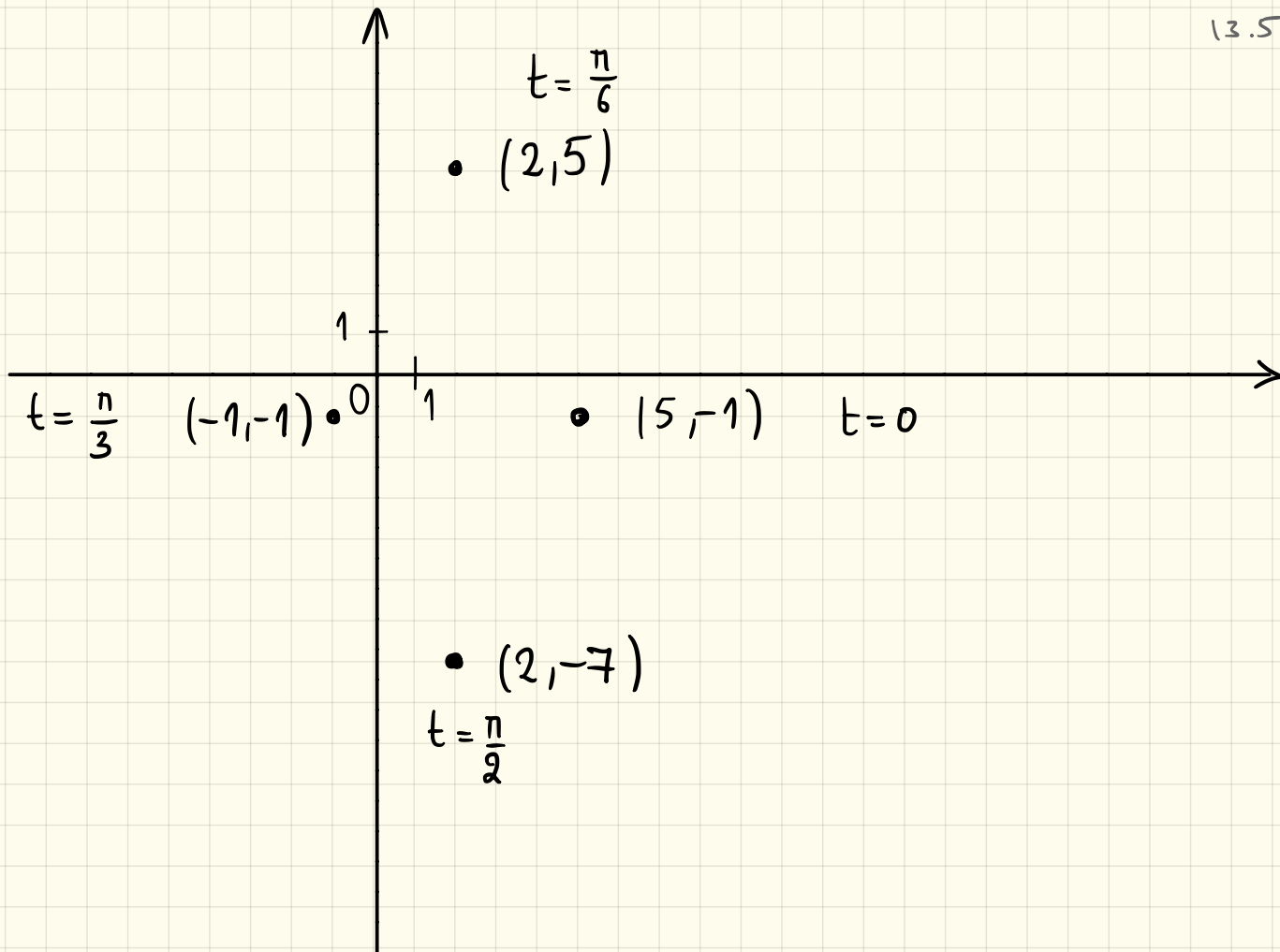
$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cos 3t, \\ y = -1 + 6 \sin 3t. \end{cases}$$

Au temps $t = \frac{\pi}{3}$, le point
se trouve en $(x(\frac{\pi}{3}), y(\frac{\pi}{3}))$
 $= (-1, -1)$

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cos 3t, \\ y = -1 + 6 \sin 3t. \end{cases}$$

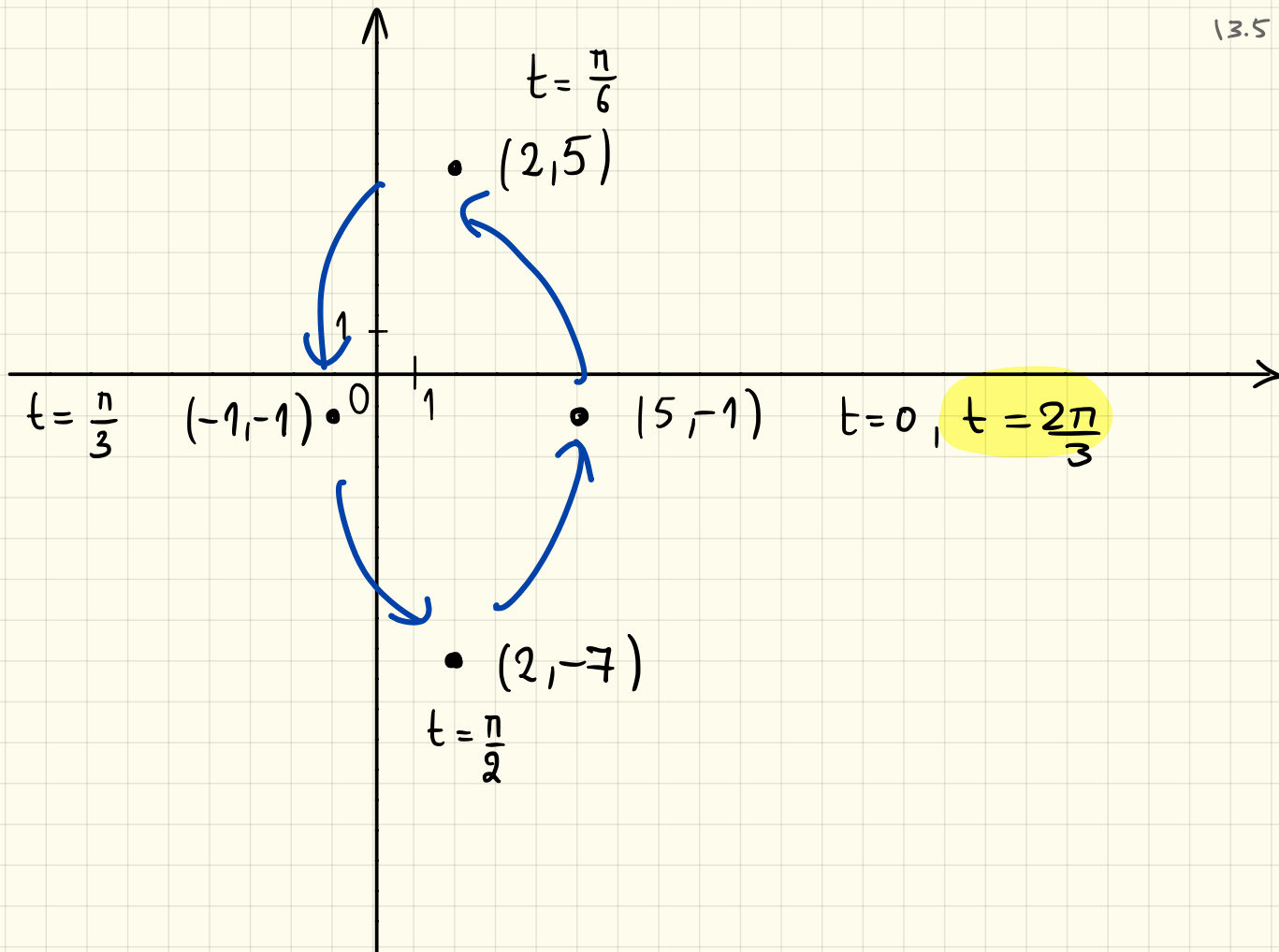
Au temps $t = \frac{\pi}{2}$, le point se trouve en $(x(\frac{\pi}{2}), y(\frac{\pi}{2})) = (2, -7)$.

etc.



$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cos 3t, \\ y = -1 + 6 \sin 3t. \end{cases}$$

Au temps $t = \frac{2\pi}{3}$, le point se trouve en $(x(\frac{2\pi}{3}), y(\frac{2\pi}{3})) = (5, -1)$



15.3. Le mouvement d'un point $p = (x, y)$ dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ est donné en fonction du temps t par

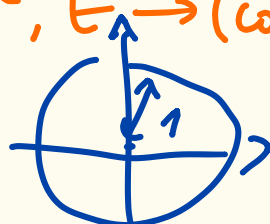
$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cos 3t, \\ y = -1 + 6 \sin 3t. \end{cases}$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on notera $\begin{cases} x(t) := 2 + 3 \cos(3t) & \text{et } p(t) := (x(t), y(t)) \\ y(t) := -1 + 6 \sin(3t) \end{cases}$

a. Ce mouvement est-il périodique ? Si oui, quelle est sa période ?

Rappel : les fonctions $\sin(t)$ et $\cos(t)$ sont périodiques de période 2π , par conséquent, pour $k \neq 0$, $\sin(kt)$ et $\cos(kt)$ sont périodiques de période $2\pi/k$.
• Notons $f(t) := \sin(kt)$, on vérifie que $f(t + 2\pi/k) = \sin(k(t + 2\pi/k)) = \sin(kt + 2\pi) = \sin(kt) = f(t)$.
• Par le rappel, $\cos(3t)$ et $\sin(3t)$ sont périodiques de période $2\pi/3$, il en sera donc de même pour $x(t)$ et $y(t)$, donc la fonction $p(t)$ (càd le mouvement) est périodique de période $2\pi/3$.

b. En éliminant le paramètre t , trouver une équation satisfaite par les coordonnées de toutes les positions prises par le point au cours du temps. Ces positions forment la trajectoire du point ; décrivez géométriquement cette trajectoire.

Rappel : Pour tout $k \neq 0$, la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (\cos(kt), \sin(kt))$ est une paramétrisation du cercle, on a donc : 
$$\{(\cos(kt), \sin(kt)) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underline{x^2 + y^2 = 1}\}$$

autrement dit, l'ensemble des pts de la forme $(\cos(kt), \sin(kt))$ ($t \in \mathbb{R}$) est décrit par l'équation $x^2 + y^2 = 1$ (l'équation du cercle).

① Se ramener à $t \rightarrow (\cos(kt), \sin(kt))$

• On a :

$$\begin{cases} x(t) = 2 + 3 \cos(3t) \Leftrightarrow \frac{x(t) - 2}{3} = \cos(3t) \\ y(t) = -1 + 6 \sin(3t) \Leftrightarrow \frac{y(t) + 1}{6} = \sin(3t) \end{cases}$$

② Éliminer t : $(\hat{x}, \hat{y})$ est de la forme $(\cos(3t), \sin(3t))$ pour un certain t ssi $1 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2$ $\leftarrow$

• Par ① on sait que (x, y) appartient à la trajectoire si et seulement si $\left(\frac{x-2}{3}, \frac{y+1}{6}\right)$ est de la forme $(\cos(3t), \sin(3t))$ pour un certain t , donc si et seulement si

$$1 = \left(\frac{x-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{6}\right)^2 \rightarrow \text{Equation recherchée}$$

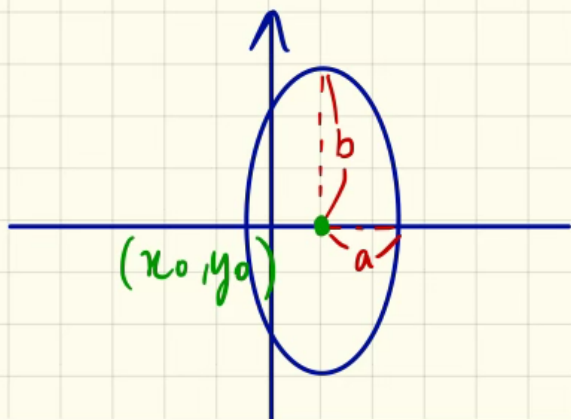
③ Interprétation de l'équation :

Rappel :

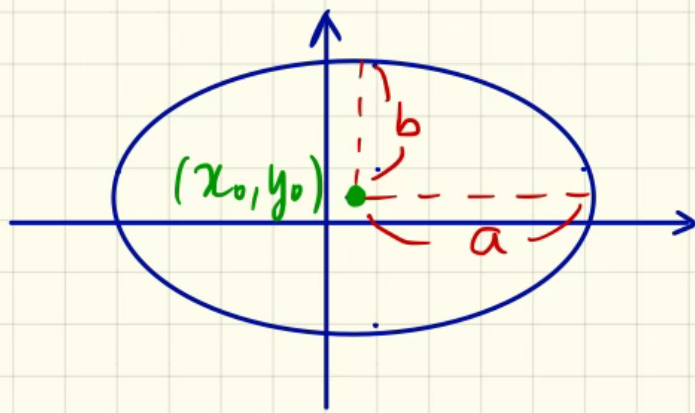
Les équations d'ellipses :

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (a, b \in \mathbb{R}_0^+)$$

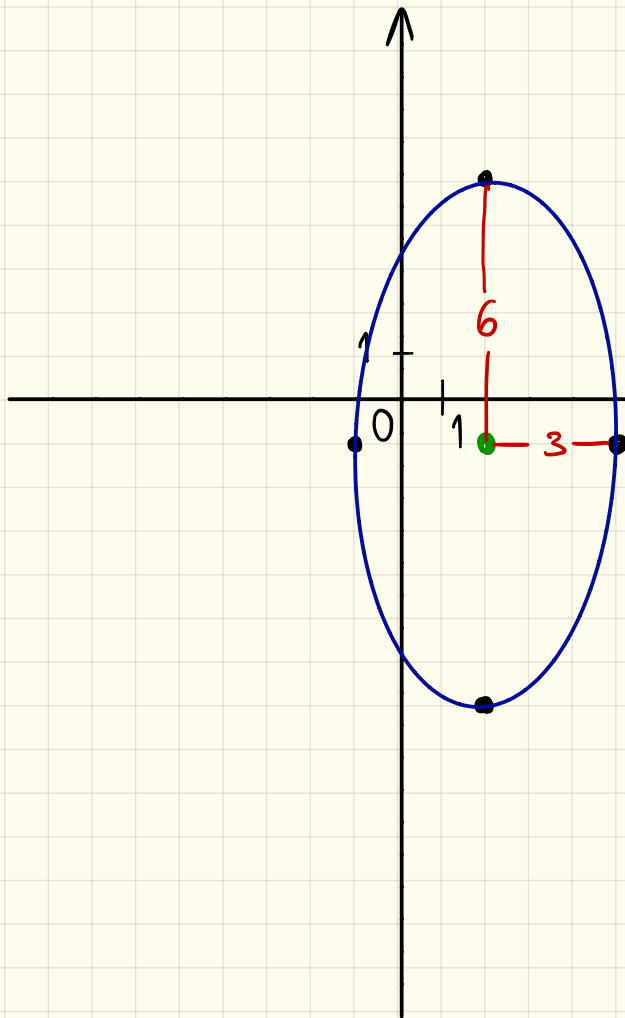
Verticale ($b > a$)



Horizontale ($a > b$)



Il s'agit d'une ellipse centrée en $(2, -1)$ dont
le $\begin{cases} \text{demi-grand axe horizontal est de longueur 3} \\ \text{demi-grand axe vertical est de longueur 6} \end{cases}$



On a une ellipse
de centre $(2, -1)$ dont
le demi-grand axe,

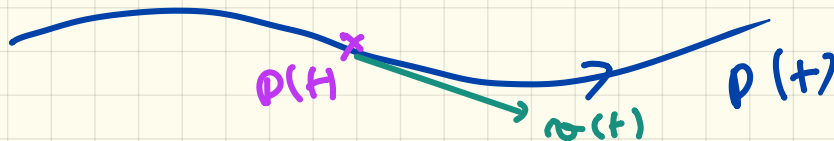
vertical, est de longueur 6
et le demi-petit axe,
horizontal, est de
longueur 3.

d. Faites, dans le systèmes d'axes, le schéma de la trajectoire. Dessinez quelques vecteurs vitesse.

Rappel: La vitesse en un instant $t \in \mathbb{R}$ est donnée par la dérivée de l'application p en t :

$$v(t) = p'(t) = (x'(t), y'(t))$$

$$p(t) = (x(t), y(t))$$



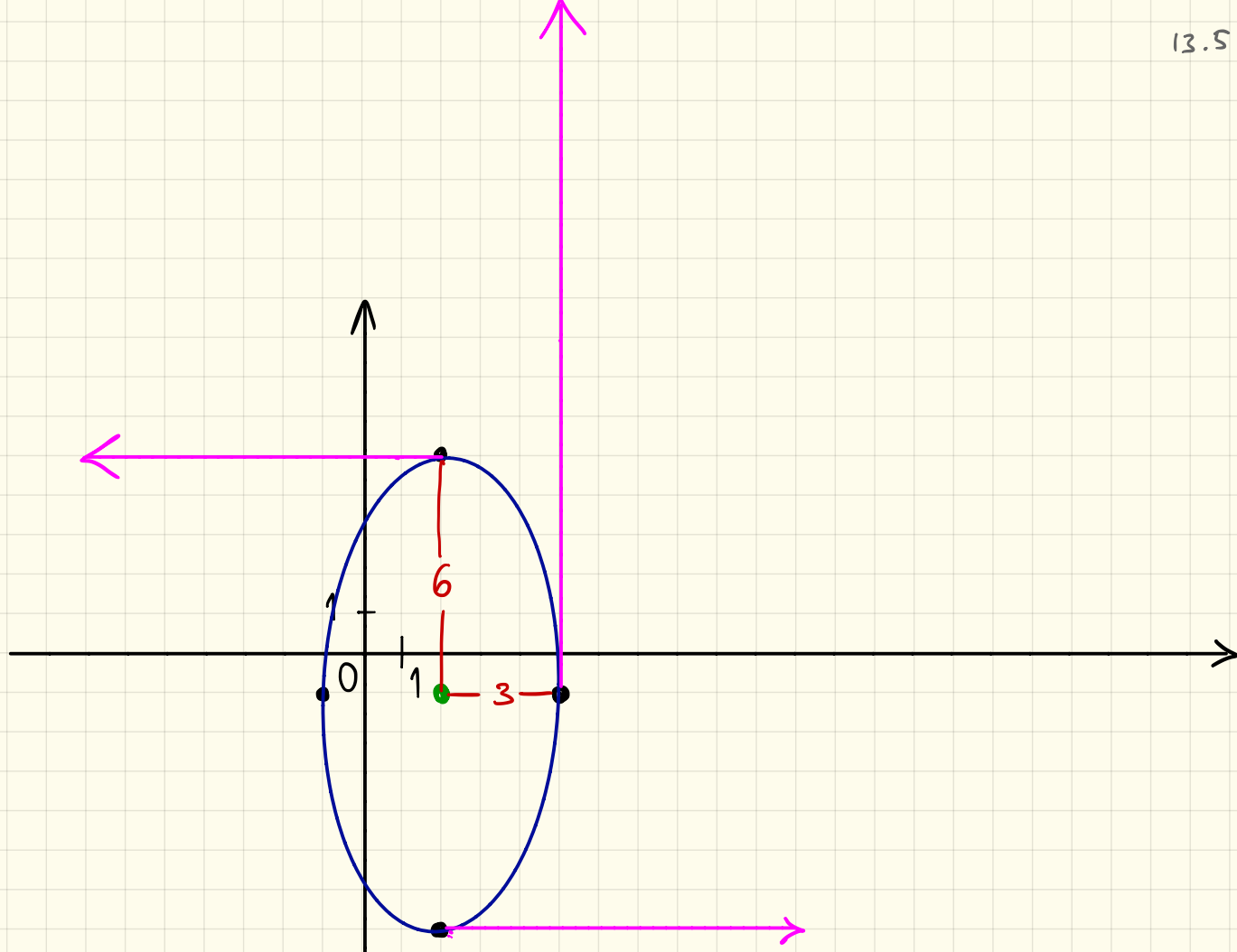
$$p(t) = (2 + 3\cos(3t), -1 + 6\sin(3t)), \quad v(t) := p'(t) \quad 13.5$$

$$v(t) = (-9\sin 3t, 18\cos 3t)$$

$$v(0) = (0, 18) \quad |v(0)| = 18$$

$$v\left(\frac{\pi}{6}\right) = (-9, 0) \quad |v(\pi/6)| = 9$$

$$v\left(\frac{\pi}{2}\right) = (9, 0)$$



e. Le point progresse-t-il
constamment à la même allure
sur sa trajectoire ?

Les vecteurs vitesse n'ont pas
toutes la même norme donc
non.

f. Quel est le vecteur accélération à l'instant t ?

Rappel : $a(t) = v'(t) = p''(t)$

$$\begin{aligned} a(t) &= (x''(t), y''(t)) \\ &= (-9 \sin 3t, (18 \cos 3t)') \\ &= (-27 \cos 3t, -54 \sin 3t). \end{aligned}$$

$$v(t) = (-9 \sin 3t, 18 \cos 3t)$$

g. Ce vecteur accélération est-il de norme constante ? est-il toujours orthogonal à la trajectoire du point considéré ?

Rappels:

- La norme d'un vecteur $v = (v_1, v_2, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ est donnée par

$$|v| = \sqrt{\sum_{i=1}^m v_i^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_m^2}$$

- Deux vecteurs $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ de $\mathbb{R}^m$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^m v_i w_i = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_m w_m$$

g. Ce vecteur accélération est-il de norme constante ?
est-il toujours orthogonal à la trajectoire du point considéré ?

$$a(t) = (-27 \cos 3t, -54 \sin 3t)$$

$$\begin{aligned} \|a(t)\| &= \sqrt{(-27 \cos 3t)^2 + (-54 \sin 3t)^2} \\ &= \sqrt{27^2 \cos^2 3t + 54^2 \sin^2 3t} \\ &= \sqrt{27^2 \cos^2 3t + 4 \cdot 27^2 \sin^2 3t} \end{aligned}$$

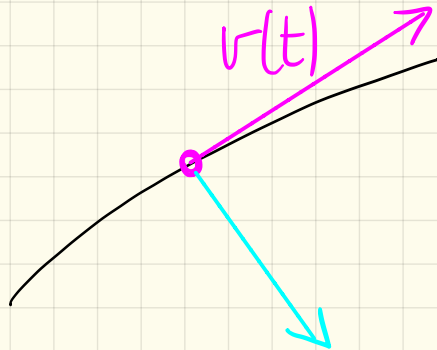
$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{27^2(\cos^2 3t + \sin^2 3t) + 3 \cdot 27^2 \sin^2 3t} \quad 13.5 \\
 &= \sqrt{27^2 + 3 \cdot 27^2 \sin^2 3t}
 \end{aligned}$$

Pour $t=0$, on a $\|a(0)\| = 27$

Pour $t=\frac{\pi}{6}$, on a $\|a(\frac{\pi}{6})\| = 54$

Donc $\|a(t)\|$ n'est pas constant.

Orthogonal à la trajectoire?



Orthogonal au vecteur vitesse.

$$v(t) = (-9 \sin 3t, 18 \cos 3t)$$

$$a(t) = (-27 \cos 3t, -54 \sin 3t)$$

$$\langle v(t), a(t) \rangle$$

$$= (-9 \sin 3t)(-27 \cos 3t) + (18 \cos 3t)(-54 \sin 3t)$$

$$= 243 \sin 3t \cos 3t - 972 \sin 3t \cos 3t$$

$$= -729 \sin 3t \cos 3t$$

Pour $t = \frac{\pi}{12}$, on a

$$-729 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{729}{2}$$

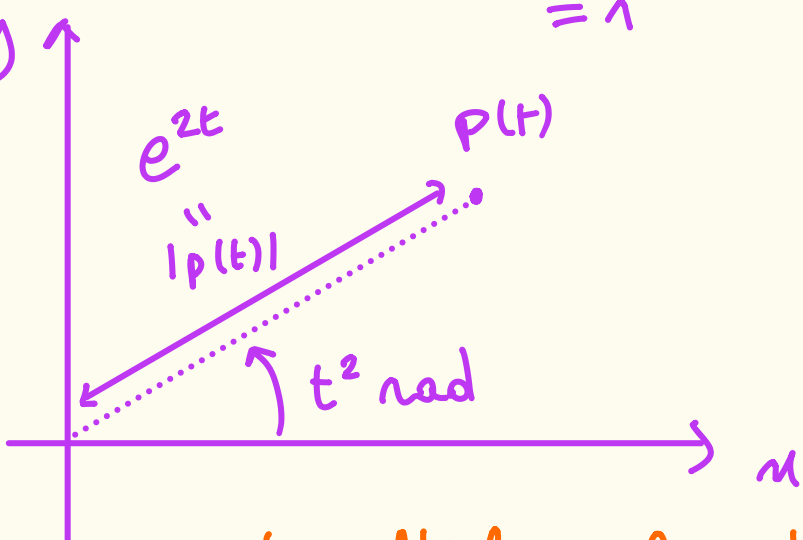
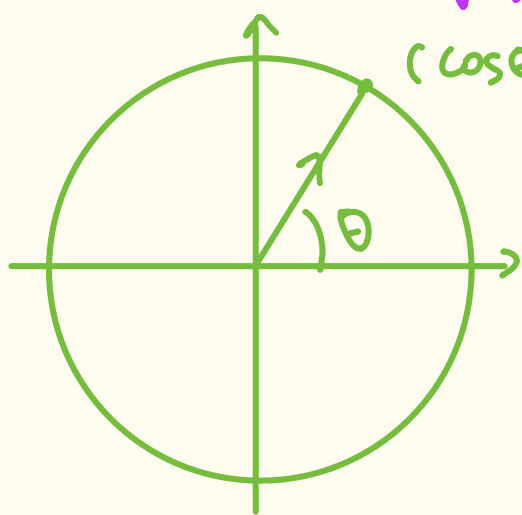
Comme le produit scalaire est non-nul, les vecteurs ne sont pas orthogonaux.

15.4. Soit C la courbe paramétrée du plan $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{cases} x = e^{2t} \cos(t^2) \\ y = e^{2t} \sin(t^2) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

À nouveau notons $\begin{cases} x(t) = e^{2t} \cos(t^2) \\ y(t) = e^{2t} \sin(t^2) \end{cases}$ et $p(t) := (x(t), y(t))$

Desc. géométrique de $p(t)$: $p(t)$ forme un angle de t^2 rad avec l'axe OX (dans le sens trigo), et $p(t)$ se trouve à une distance e^{2t} de l'origine, en effet : $|p(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \sqrt{e^{4t} (\underbrace{\cos^2(t^2) + \sin^2(t^2)}_{=1})} = \sqrt{e^{4t}} = e^{2t}$



Rappel : $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ est un point multiple si il existe plusieurs $t \in \mathbb{R}$ tq $p(t) = (x_0, y_0)$

a. Le point $(1, 0)$ est-il un point de C ? si oui, est-il un point multiple de C ?

Cherchons $t \in \mathbb{R}$ tq $p(t) = (1, 0)$:

(i) Si on suppose que $p(t) = (1, 0)$, alors

$$e^{2t} = |p(t)| = |(1, 0)| = 1 \Leftrightarrow e^{2t} = 1 \Leftrightarrow t = 0$$

voir § préc.

(ii) La seule possibilité est donc $t = 0$, reste à vérifier qu'on a bien $p(0) = (1, 0)$, et en effet :

$$p(0) = \left(\underbrace{e^{2 \cdot 0}}_{=1} \underbrace{\cos(0^2)}_{=1}, \underbrace{e^{2 \cdot 0}}_{=1} \underbrace{\sin(0^2)}_{=0} \right) = (1, 0)$$

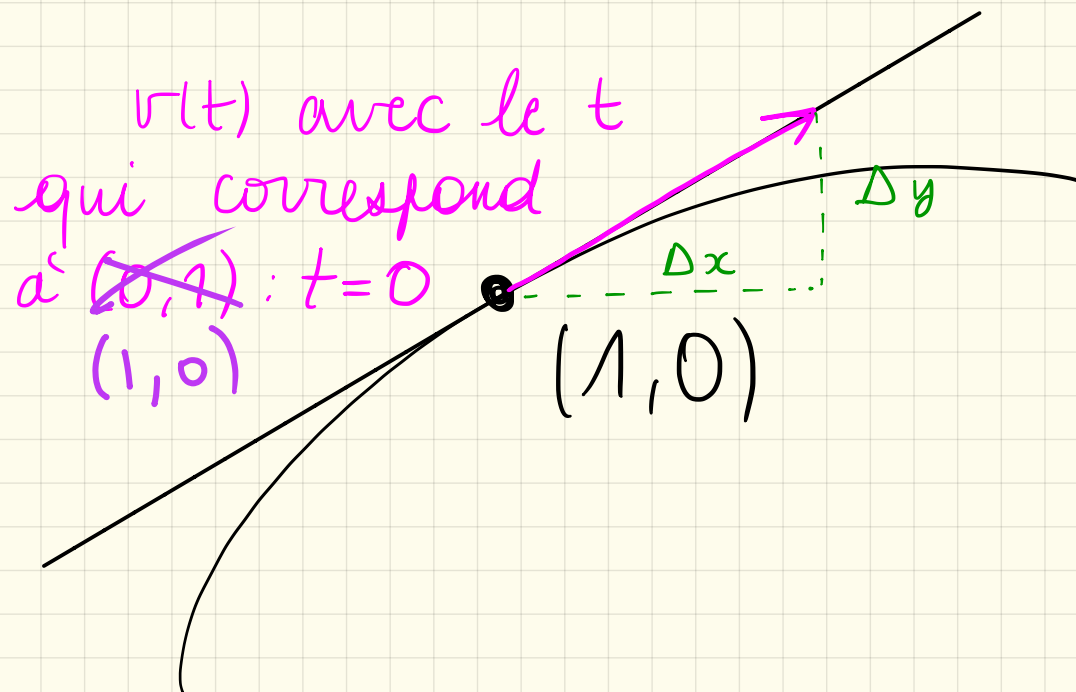
donc $(1, 0) \in C$ et $(1, 0)$ n'est pas un point multiple de C (Par(ii), il n'y a qu'un seul t pour lequel $p(t) = (1, 0)$, il s'agit de $t = 0$)

Rem: la fonction $t \rightarrow e^{2t}$ est injective (elle est strictement croissante) donc la fonction $t \rightarrow p(t)$ l'est également, en effet, si $t \neq t'$ alors $|p(t)| = e^{2t} \neq e^{2t'} = |p(t')|$ donc $p(t) \neq p(t')$. Par conséquent C ne contient aucun point multiple.

b.

13.7

Donner l'équation de la tangente à la courbe au point $(1,0)$.



$$v(t) = (2e^{2t} \cos(t^2) - 2te^{2t} \sin(t^2), 2e^{2t} \sin(t^2) + 2te^{2t} \cos(t^2))$$

$$v(0) = (2, 0)$$

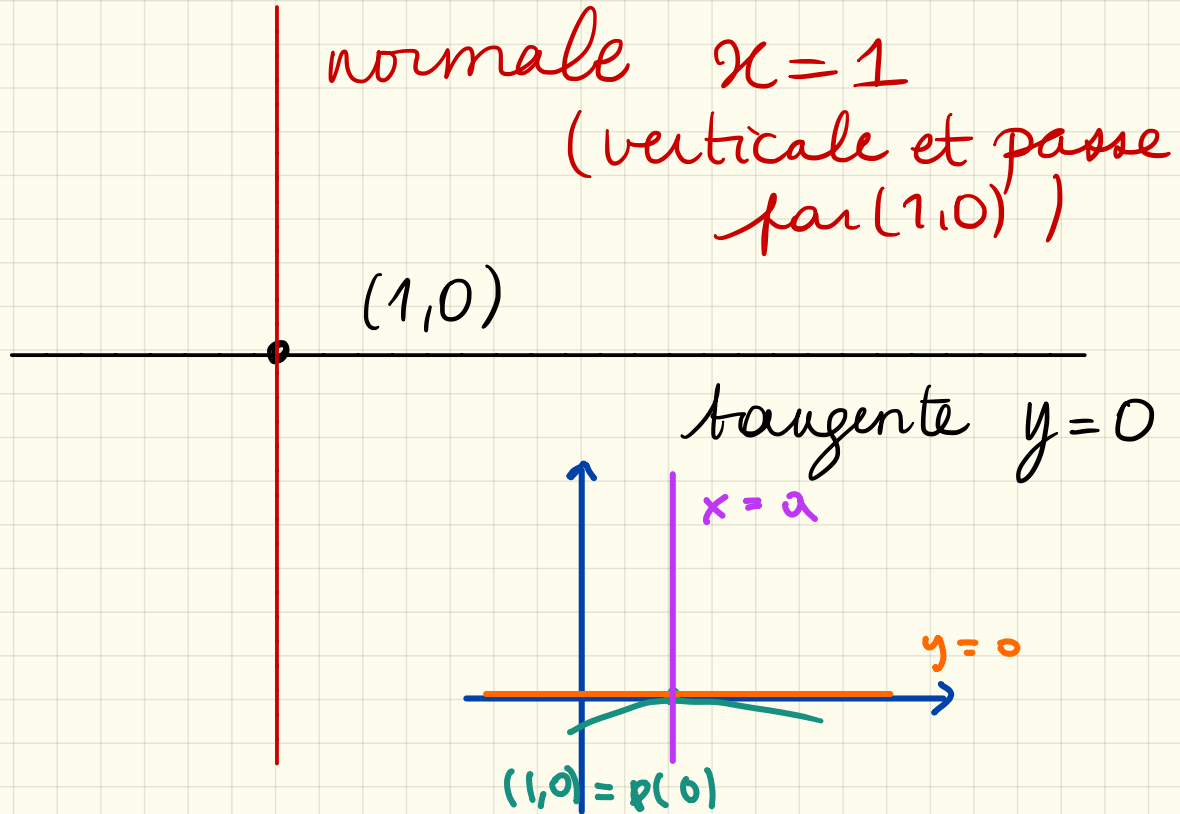
Droite horizontale, pente 0

Cette droite passe par $(1, 0)$ donc son équation est $y=0$.

$$\begin{cases} x = e^{2t} \cos(t^2) \\ y = e^{2t} \sin(t^2) \end{cases}$$

$\mathcal{L}_0$

Donner l'équation de la normale à la courbe au point $(1,0)$.



15.11. Considérons la courbe paramétrée C de $\mathbb{R}^3$ d'équations paramétriques

$$p(t) := (x(t), y(t), z(t)) \quad \begin{cases} x = t^2 =: x(t) \\ y = t^3 =: y(t) \\ z = t^4 =: z(t) \end{cases}$$

a. Cette courbe paramétrée C possède-t-elle des points doubles ?

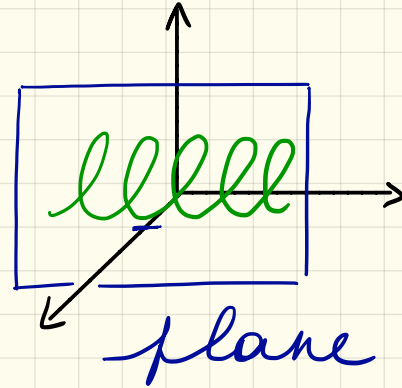
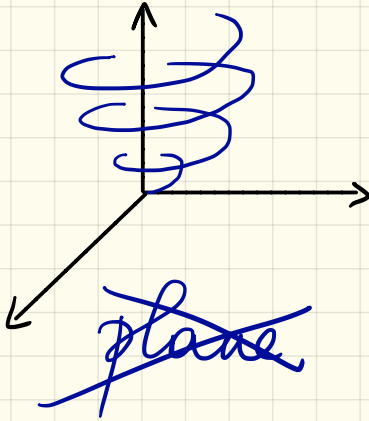
L'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow t^3$ ^{est injective}, l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \rightarrow p(t)$ l'est donc également, en effet, si $t \neq t'$ alors $y(t) = t^3 \neq (t')^3 = y(t')$, donc $p(t) \neq p(t')$.

C ne possède donc aucun point multiple.

c. Montrer que C est située sur la surface d'équation $z = x^2$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t)^2 = (t^2)^2 = t^4 = z(t)$

b. Cette courbe C est-elle plane ?



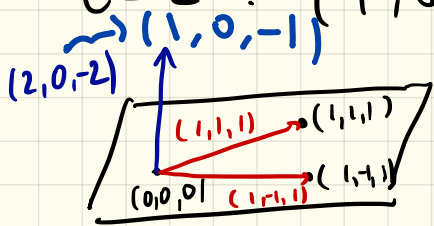
Rappel : Une courbe est dite plane si elle est incluse dans un plan

On prend plusieurs points de la courbe et on regarde si on peut les visualiser dans le même plan :

$$\left. \begin{array}{l} t=0: (0, 0, 0) \\ t=1: (1, 1, 1) \\ t=-1: (1, -1, 1) \\ t=2: (4, 8, 16) \end{array} \right\}$$

Les 3 points sont tous dans un même plan (il n'y a qu'un seul tel plan).

Cherchons son équation :



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vecteur normal : $(1, 0, -1)$

Point : $(0, 0, 0)$:

$$1(x-0) + 0(y-0) - 1(z-0) = 0$$

$$\Rightarrow x - z = 0.$$

Comme $(4, 8, 16)$ n'appartient pas au plan d'équation $x - z = 0$ (qui est le seul qui contient $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ et $(1, -1, 1)$), les 4 points ne peuvent pas s'inscrire dans un même plan.

Le courbe n'est pas plane.

d. Donner des équations de la tangente à C au point $(1, 1, 1)$.

vecteur vitesse



$$v(t) = (2t, 3t^2, 4t^3)$$

$$v(1) = (2, 3, 4)$$

correspond
à $t = 1$

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \\ z = t^4. \end{cases}$$

Vecteur directeur :

$(2, 3, 4)$

Point :

$(1, 1, 1)$

Equations cartésiennes :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$$

Vecteur directeur :

$(2, 3, 4)$

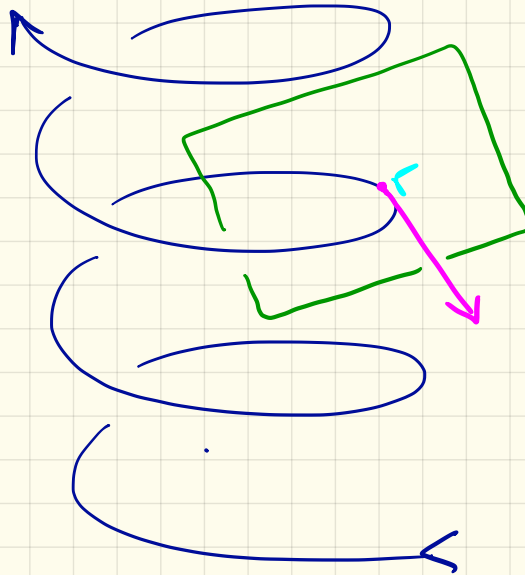
Point :

$(1, 1, 1)$

Equations paramétriques:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

e. Donner l'équation du plan normal à C au point $(1, 1, 1)$.
= "normal à la tige"



Vector normal:

$(2, 3, 4)$

Point:

$(1, 1, 1)$

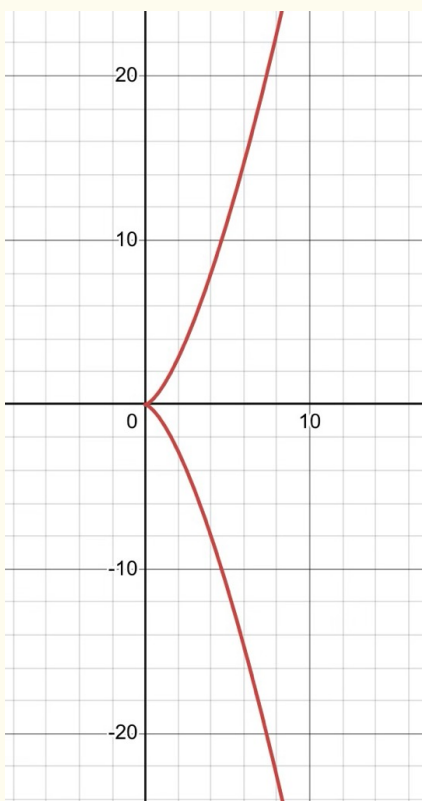
Equation cartésienne:

$$2(x-1) + 3(y-1) + 4(z-1) = 0$$

$$2x + 3y + 4z - 9 = 0$$

15.14. Calculer la longueur du chemin conduisant du point $(1, -1)$ au point $(1, 1)$ le long de la courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation $y^2 = x^3$. $\rightarrow$ On appelle cette courbe C

① Paramétriser la courbe :



(Ill. de C)

- Rappelons que $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow t^3$ est une bijection, dont l'inverse est $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow t^{1/3}$. Pour un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe donc un unique t tel que $y = t^3$.
- Le point (x, t^3) appartient à C si et seulement si $x^3 = (t^3)^2 = t^6 \Leftrightarrow x = (t^6)^{1/3} = t^2$
- L'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \rightarrow p(t) := (t^2, t^3)$ est donc une paramétrisation de C (sans pt multiple puisque $t \rightarrow t^3$ est injective).

② Mesurer la longueur :

- La longueur d'une courbe paramétrisée $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \rightarrow p(t)$ de classe C^1 est donnée par $L = \int_a^b |p'(t)| dt = \int_a^b |v(t)| dt$
- La longueur que nous cherchons est donc donnée par :

$$\int_{-1}^1 |p'(t)| dt = \int_{-1}^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_{-1}^1 \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2} dt$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{t^2(4+9t^2)} dt = 2 \int_0^1 \sqrt{t^2(4+9t^2)} dt$$

$$= 2 \int_0^1 \sqrt{4+9t^2} t dt$$

(On introduit $u = 4 + 9t^2$
on a $t dt = du/18$)

$$= \frac{2}{18} \int_{(4)}^{(13)} \sqrt{u} du = \frac{1}{9} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_4^{13} = \frac{2}{27} \left(\underbrace{\sqrt{13^3}}_{=13\sqrt{13}} - \underbrace{\sqrt{4^3}}_{=8} \right) = \frac{26\sqrt{13} - 16}{27}$$