



Ex cathedra

13

17.1. Faites un schéma
du plus grand domaine
de la fonction et de quelques-unes
des lignes de niveau

→ lieu des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
tels que $f(x, y) = c \in \mathbb{R}$
↓
niveau

Rappels:

les CE



- ① Pour trouver le domaine d'une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:
 - a) On commence par trouver les conditions d'existence de f .
 - b) $\text{dom}(f)$ est l'ensemble des points (x, y) qui vérifient les CE.
- ② L'équation cartésienne de la ligne de niveau $c \in \mathbb{R}$ d'une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est
$$c = f(x, y)$$
avec $(x, y) \in \text{dom}(f)$ (les pts doivent vérifier les CE de f)
- ③ Le graphe de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ décrit par l'équation : $z = f(x, y)$ avec la contrainte $(x, y) \in \text{dom}(f)$.

$$f : (x, y) \mapsto 2x - 3y + 1;$$

$$\text{dom } f = \mathbb{R}^2$$

($2x - 3y + 1$ existe $\forall x, y \in \mathbb{R}$)

Lignes de niveau :

$$2x - 3y + 1 = 1 \Leftrightarrow 2x - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x \text{ (droite)}$$

$$2x - 3y + 1 = -1 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

(droite)

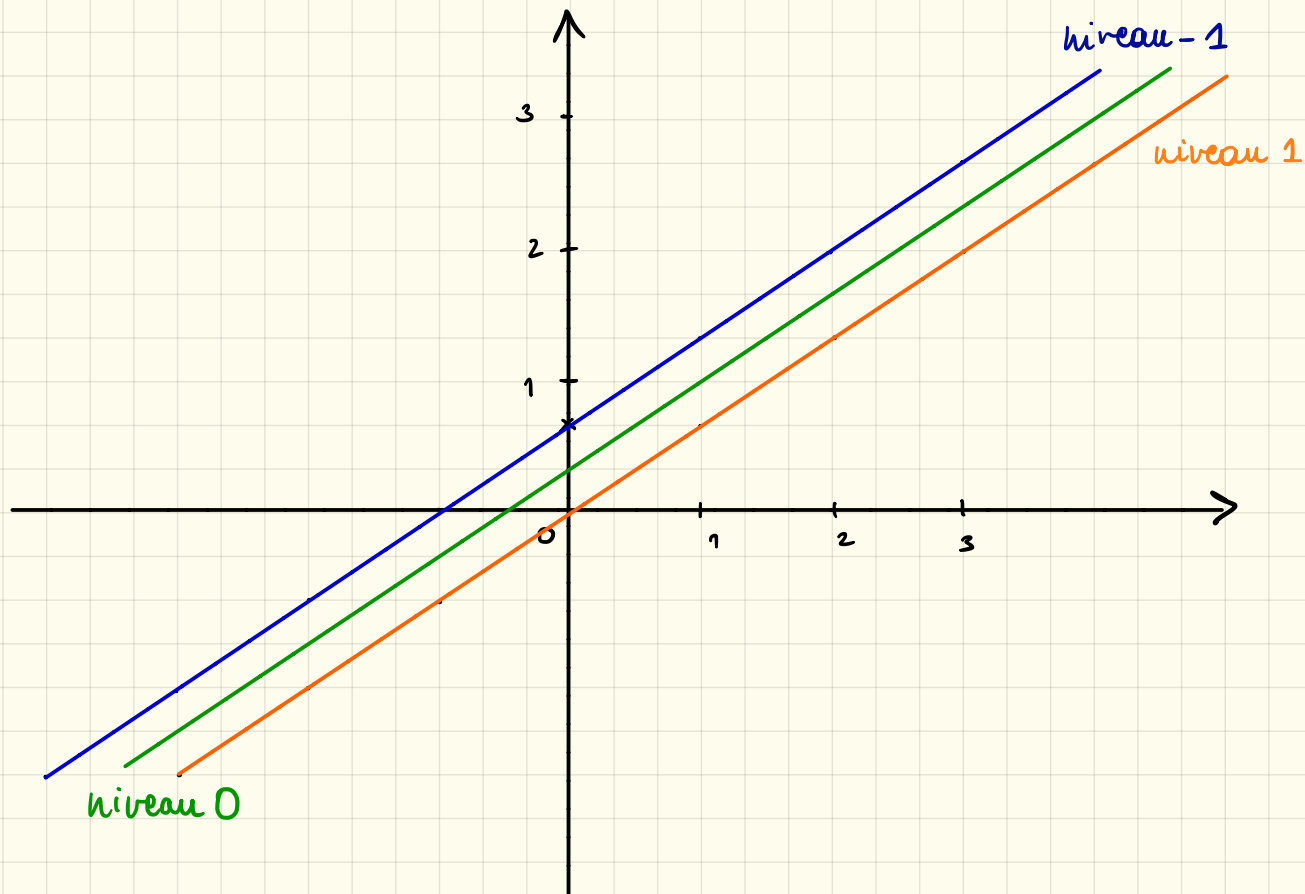
$$2x - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \quad 17.1$$

(droite)

En général : $2x - 3y + 1 = c$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1-c}{3}$$

Toutes les lignes de niveau sont des droites de pente $\frac{2}{3}$ (elles sont parallèles).



Le graphe de la fonction f
est l'ensemble des points de
 $\mathbb{R}^3$ de la forme $(x, y, f(x, y))$
donc tels que $z = f(x, y)$ donc
tels que

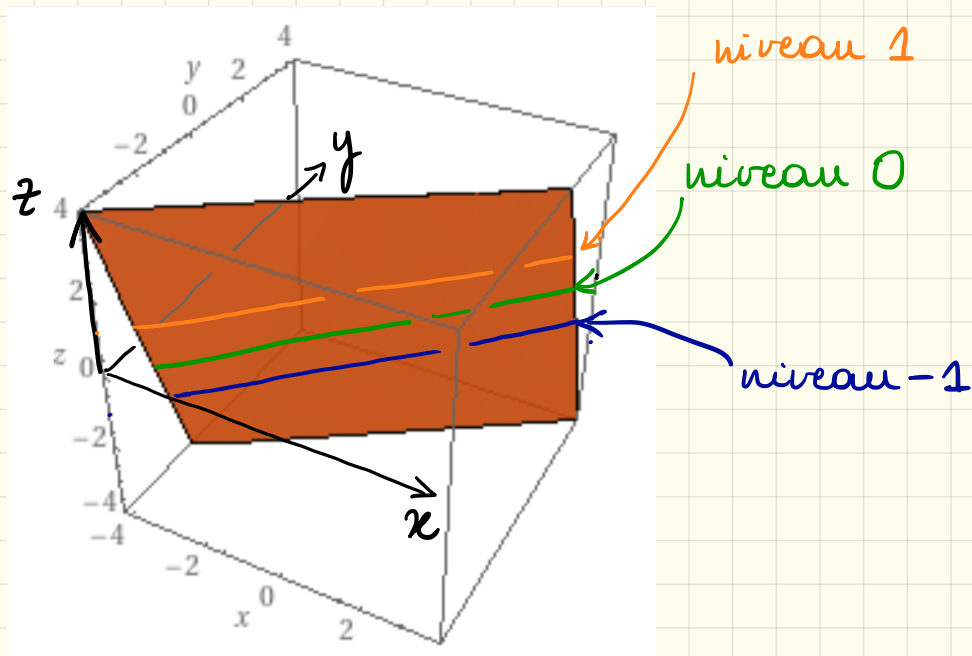
$$z = 2x - 3y + 1$$

c'est-à-dire

$$2x - 3y - z + 1 = 0$$

C'est un plan :

(7.)



$$k : (x, y) \mapsto \sqrt{16 - x^2 - y^2};$$

Conditions d'existence: $16 - x^2 - y^2 \geq 0$

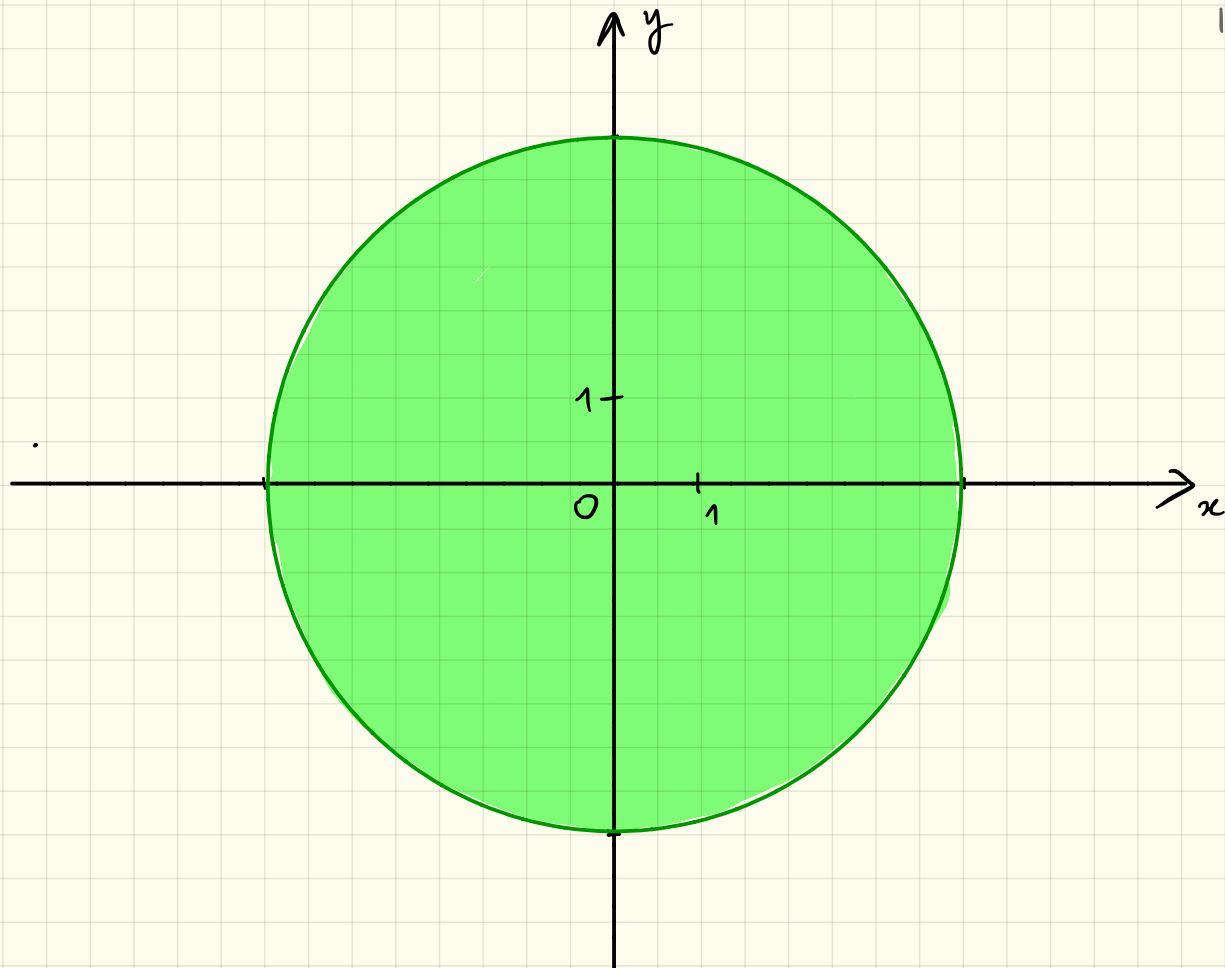
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 16$$

$$\text{dom } k = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 16 \}$$

Le domaine est un disque fermé de rayon 4 et de centre (0,0).

Rappel: $\sqrt{g(x, y)}$ donne la CE

$$g(x, y) \geq 0$$



lignes de niveau :

$$\sqrt{16 - x^2 - y^2} = C$$

On ne peut prendre que des
lignes de niveau $C \geq 0$

$$\Rightarrow 16 - x^2 - y^2 = C^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 16 - C^2$$

On a $x^2 + y^2 \geq 0$ donc on doit
avoir $16 - C^2 \geq 0 \Leftrightarrow C^2 \leq 16 \Leftrightarrow -4 \leq C \leq 4$

Donc $0 \leq C \leq 4$.

Niveau $C=0$: $x^2+y^2=16-0^2=16$

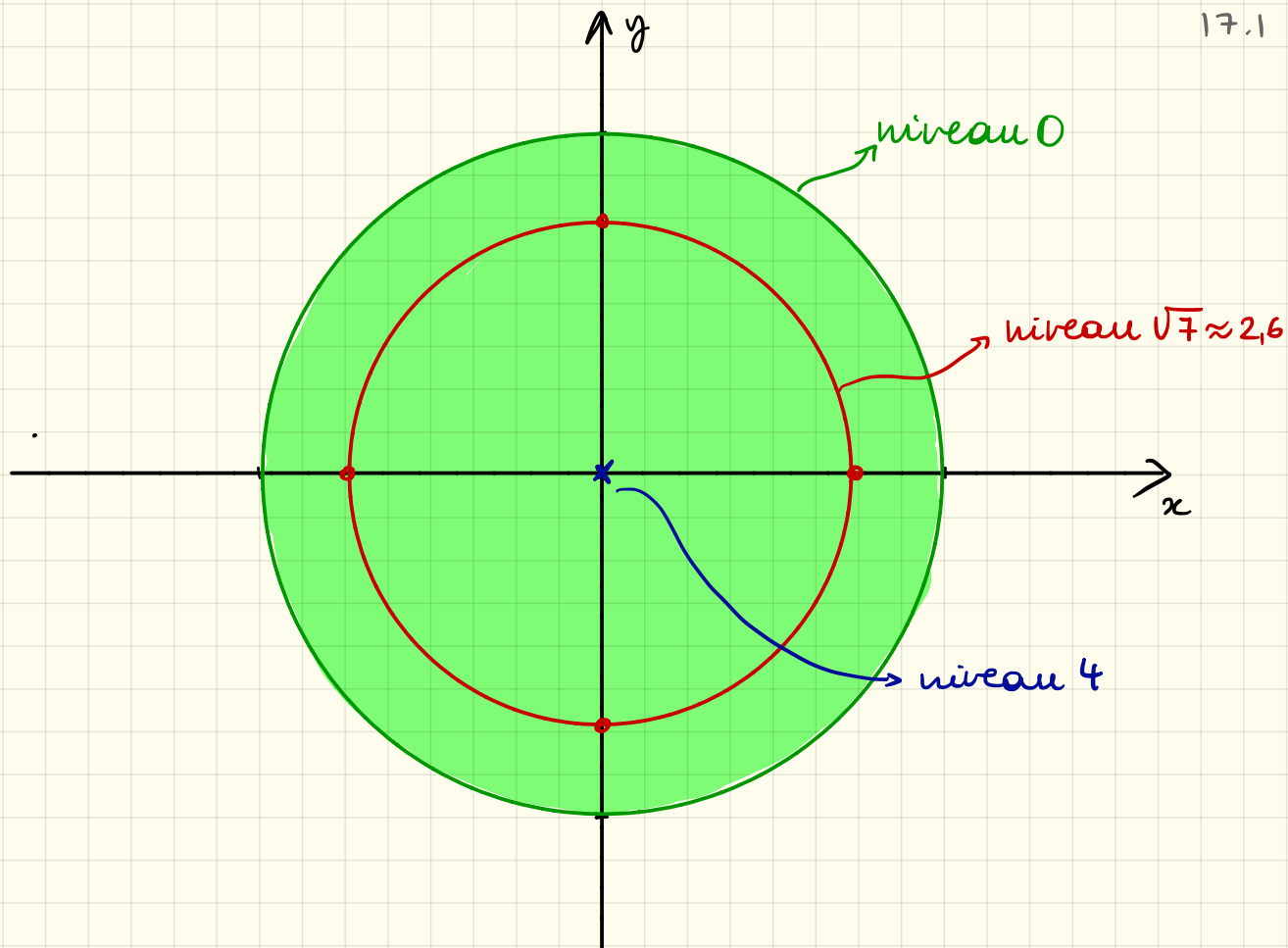
On a un cercle de rayon 4 et centre $(0,0)$.

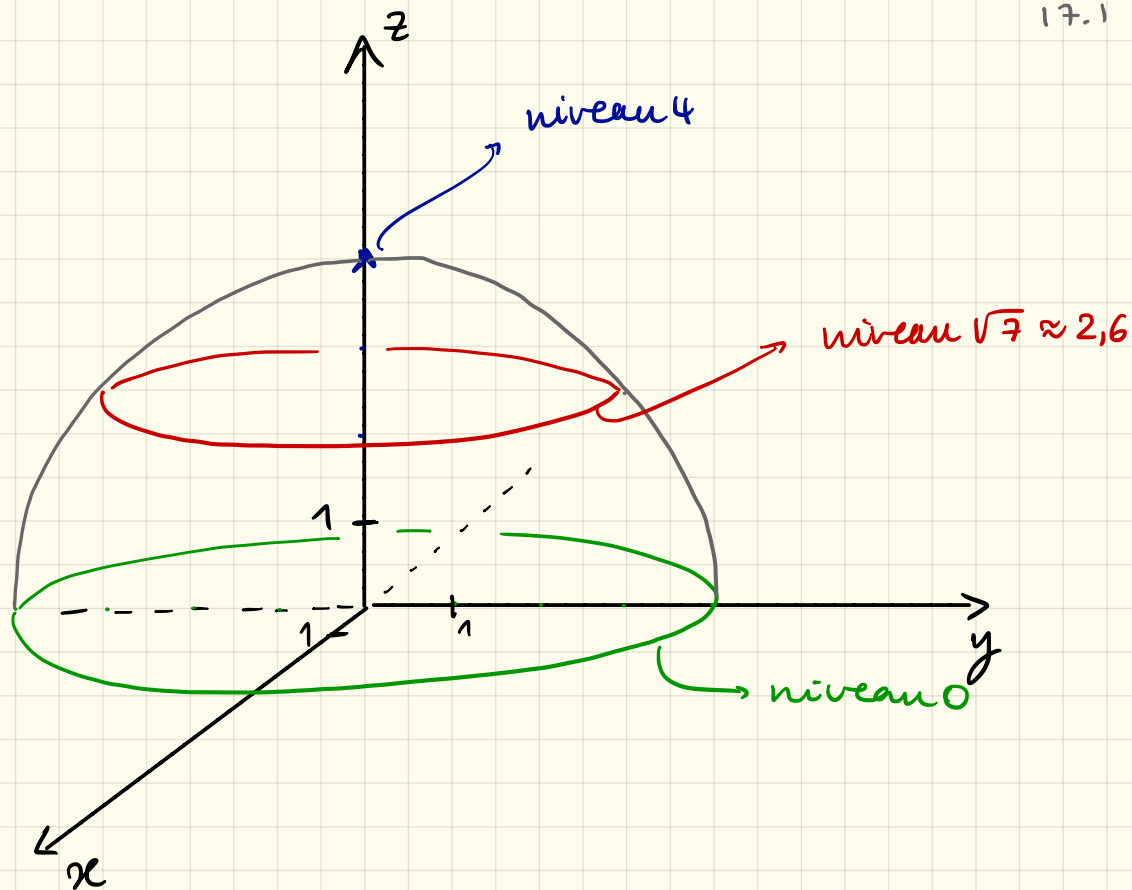
Niveau $C=\sqrt{7} \approx 2,6$: $x^2+y^2=16-7=9$

On a un cercle de rayon 3 et centre $(0,0)$.

Niveau $C=4$: $x^2+y^2=16-16=0$

On a le point $(0,0)$





Rappel : Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, on dérive

la fonction $(x \rightarrow f(x, y))$ i.e. on traite y comme une constante et on dérive $f(x, y)$ comme si c'était une fonction de x uniquement (mê chose pour $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$)

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ est à nouveau une fct. à 2 variables, dont on peut donc calculer les dérivées partielles, ce qui nous donne les dérivées partielles secondes de f .

On note :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

17.7. Si $f(x, y) = \cos^2(x + 3y)^2$, que valent

b) $\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$?

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= 2 \cos(x+3y)^2 \frac{\partial (\cos(x+3y)^2)}{\partial y} \\ &= 2 \cos(x+3y)^2 \frac{(-\sin(x+3y)^2)}{\partial (x+3y)^2}\end{aligned}$$

$$= -2 \cos(x+3y)^2 \sin(x+3y)^2 \cdot 2(x+3y) \frac{\partial (x+3y)^3}{\partial y}$$

$$= -12 (x+3y) \cos(x+3y)^2 \sin(x+3y)^2$$

$$\left(= -6 (x+3y) \sin(2(x+3y)^2) \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) = -6 \cdot 2\pi \cdot \sin(8\pi^2)$$

$$= -12\pi \sin(8\pi^2)$$

17.18. Calculer les dérivées premières et les dérivées partielles secondes des fonctions :

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 - 2xy + y^2;$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 - 2xy + y^2;$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x - 2y$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -2x + 2y$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 - 2xy + y^2;$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -2x + 2y$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (2x - 2y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (-2x + 2y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (-2x + 2y) = -2$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 - 2xy + y^2;$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -2x + 2y$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (2x - 2y) = -2$$

$$\text{On constate que } \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x},$$

le sera en général le cas pour nous (lorsque ces deux dérivées existent et sont continues).

Remarque sur les notations :



$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)$$

17.22. Soit la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 - xy - y^2$$

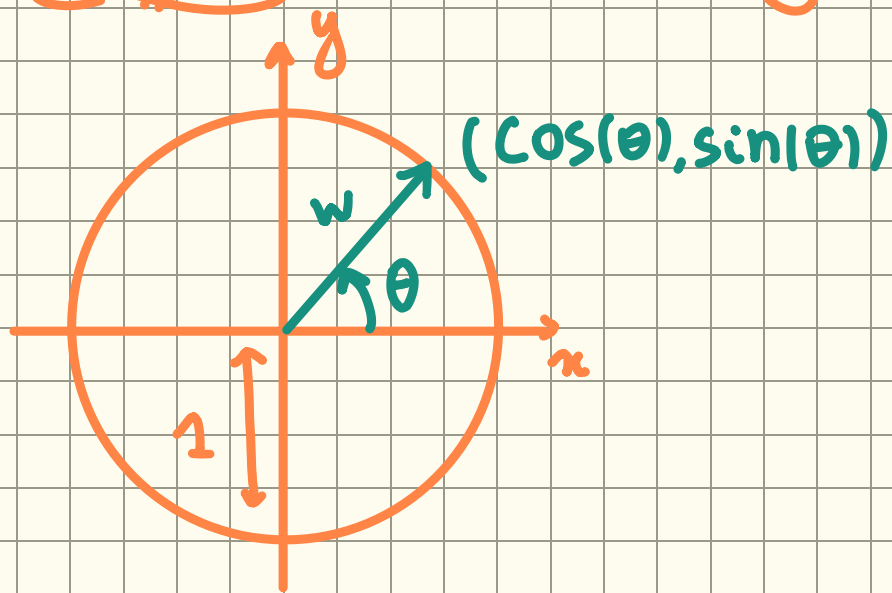
et en chaque point (x, y) du plan

le vecteur $\mathbf{v}$ de norme 1
lié en ce point et faisant

avec le demi-axe positif ox^+

un angle mesurant $\frac{\pi}{3}$ radians.

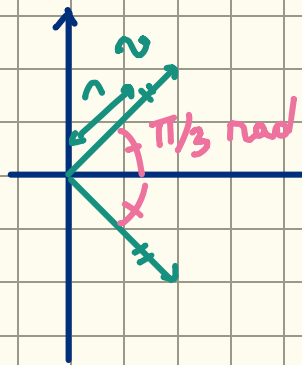
Rappel : Cercle trigonométrique :



Le vecteur w de norme 1 qui forme un angle θ avec l'axe ox^+ (dans le sens trigo. c-à-d antihoraire) a pour coord. :

$$w = (\cos(\theta), \sin(\theta))$$

⇒ Identifier le vecteur v :



v fait un angle de $\pi/3$ avec ox^+ , mais on ne sait pas

dans quel sens, on a donc deux possibilités :

$$v = (\cos(\pi/3), \pm \sin(\pi/3)) = (\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$$

Note : Il est bon de connaître des valeurs remarquables comme

$$\cos(\pi/3) = \frac{1}{2} \text{ et } \sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Calculer $D_v f(x, y)$.

Rappel : Dérivée directionnelle

① Définition : Pour un vecteur $v = (v_1, v_2)$ la dérivée directionnelle de f dans la direction v au point (x, y) est définie comme la limite :

$$D_v f(x, y) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hv_1, y + hv_2) - f(x, y)}{h}$$

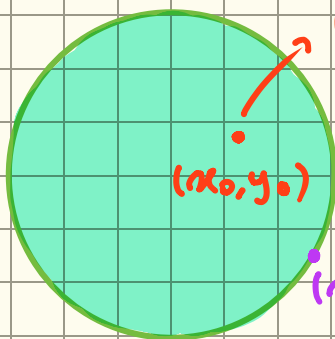
② Calculer $D_v f(x, y)$ en pratique :

2.1.) On s'assure que f est différentiable en (x, y) :

- Pour cela on calcule les dérivées 1^{ères} de f i.e. $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$
- Si (x, y) est à l'intérieur de $\text{dom}(f)$ (i.e. pas au bord de $\text{dom}(f)$) et si $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur l'intérieur de $\text{dom}(f)$, alors f est différentiable en (x, y)

⊗ Illustration des notions de bord et d'intérieur:

Pour $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, $\text{dom}(f)$ est le disque de rayon 4, son bord est le cercle de rayon 4 :



(x_0, y_0) est dans l'intérieur de $\text{dom}(f)$

(x_1, y_1) est au bord de $\text{dom}(f)$

2.2) Si f est différentiable en (x, y) , on peut utiliser la formule :

$$D_v f(x, y) = \langle \nabla f(x, y), v \rangle = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

où $\nabla f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$ désigne le gradient de f en (x, y) .

Calculer $D_{\vec{v}} f(x, y)$ par la définition

$$D_{\vec{v}} f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ha, y+hb) - f(x, y)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+ha)^2 (x+ha)(y+hb) - (y+hb)^2 - (x^2 - xy - y^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2ax + \cancel{h^2 a^2} - \cancel{xy} - \cancel{ahy} - \cancel{bhx} - \cancel{hab} - \cancel{y^2} - 2by - \cancel{h^2 b^2} - \cancel{x^2} + \cancel{xy} + \cancel{y^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2ax + \overbrace{ha^2}^{\rightarrow 0} - ay - bx - \overbrace{hab}^{\rightarrow 0} - 2by - \overbrace{hb^2}^{\rightarrow 0})$$

$$\begin{aligned} &= 2\overset{\frac{1}{2}}{a}x - \overset{\frac{1}{2}}{a}y - \overset{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}{b}x - 2\overset{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}{b}y \\ &= x - \frac{1}{2}y \mp \frac{\sqrt{3}}{2}x \mp \sqrt{3}y. \end{aligned}$$

Alternative (par le gradient)

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} f(x, y) &= \langle \nabla f(x, y), \vec{v} \rangle \\ &= \langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right), \vec{v} \rangle \\ &= \langle (2x - y, -x - 2y), \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \rangle \\ &= x - \frac{1}{2}y \mp \frac{\sqrt{3}}{2}x \mp \sqrt{3}y \end{aligned}$$

On obtient le même résultat:

$$D_{\vec{v}} f(x, y) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x, y) + h\vec{v}) - f(x, y)}{h}$$

→ définition

et

résultat

$$D_{\vec{v}} f(x, y) = \langle \nabla f(x, y), \vec{v} \rangle$$

lorsque f est différentiable

17.29. Décrivez le gradient,
en un point quelconque de $\mathbb{R}^2$,
de la fonction

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 2x + 3y;$$

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 2x + 3y;$$

Le gradient de h est

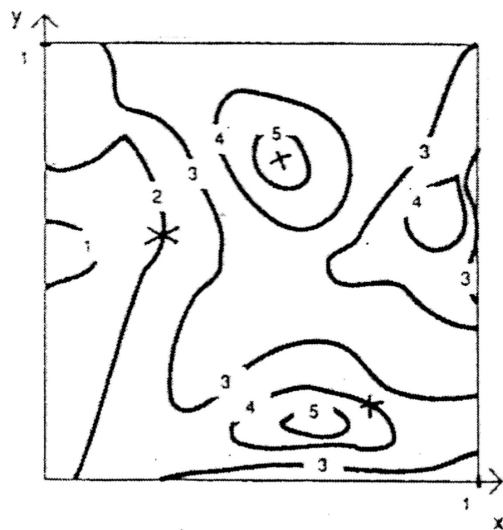
$$\underbrace{\nabla h(x, y)}_{\text{notation}} = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) \Bigg] \text{définition}$$

$$= (2, 3)$$

lorsque l'on
dérive $2x+3y$ en x ,
on traite y comme une
constante et le deuxième
terme a une dérivée nulle

idem avec le
premier terme

17.31. Voici des lignes de niveau d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, avec mention des valeurs de la fonction.



Dessinez une estimation
du gradient de la fonction
aux trois points marqués.

- Le gradient au point (a, b) est orthogonal à la courbe de niveau passant par (a, b) .
- Le sens du gradient est le sens dans lequel croît la fonction.
- Lorsque la fonction atteint un extremum local (sommet d'une montagne, fond d'une vallée), le gradient est nul.

