



Ex cathedra

14

Comparons les énoncés 17.3 (c) et 17.3 (d):

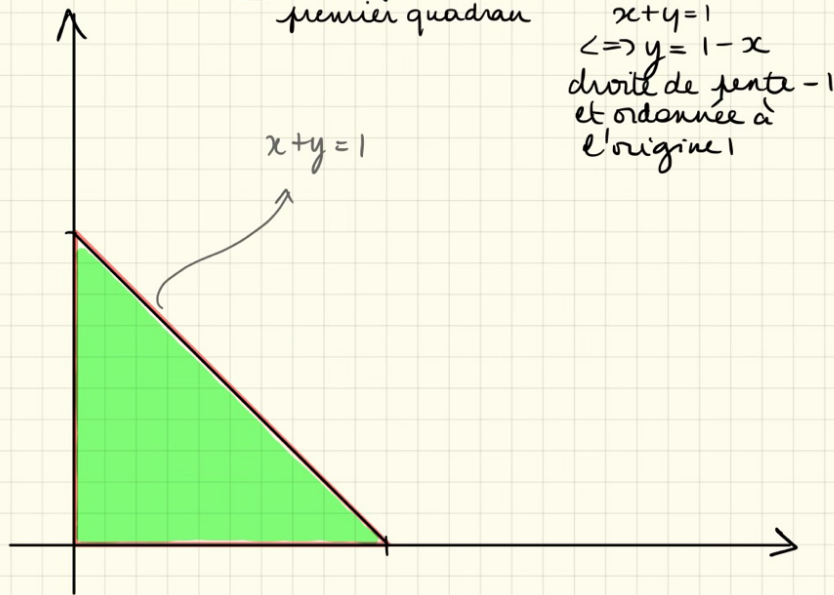
c. $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < 1\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 - 3y^2 + x - 2y - 1$

d. $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 - 3y^2 + x - 2y - 1$

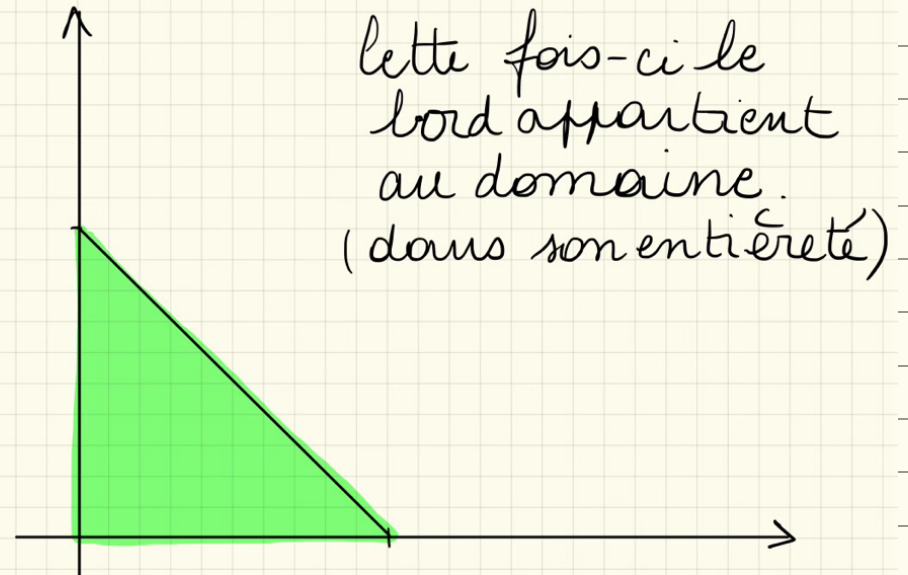
↑ ↑ ↑
La seule différence est dans le domaine de définition

Comparons les domaines :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x > 0, y > 0}_{\text{premier quadrant}}, \underbrace{x + y < 1}_{\substack{x+y=1 \\ \Leftrightarrow y=1-x \\ \text{droite de pente } -1 \\ \text{et ordonnée à l'origine } 1}}\}$$



$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$



Domaine pour 17.3 (c):

Ne contient pas son bord

Domaine pour 17.3 (d):

Contient son bord (i.e. fermé)

Pourquoi est-il important de considérer le bord ?

Raison 1: Soit une fonction $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et un extremum local $a \in \text{dom}(f)$ de f . Si a est à l'intérieur de $\text{dom}(f)$, alors a doit être un point critique, i.e. on doit avoir $\nabla f(a) = 0$.

- Mais si a est au bord de $\text{dom}(f)$, il n'est pas garanti que a soit un point critique de f .

Raison 2: Si $\text{dom}(f)$ est borné (les points de $\text{dom}(f)$ ne peuvent pas être à distance arbitrairement grande de l'origine) et fermé (i.e. $\text{dom}(f)$ contient son bord), alors f doit atteindre un max global et un min global sur son domaine.

Rem: Les 2 raisons seront illustrées par le 17.3

17.3. Déterminez les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes :

c. $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < 1\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 - 3y^2 + x - 2y - 1$

Approche générale optimisation:

① On cherche les extrema locaux (Rem: tout extremum global est un extremum local)

1.1: On cherche les extrema locaux sur l'intérieur du domaine.

1.1.1.: On cherche les pts critiques (i.e. les a où $\nabla f(a) = 0$) à l'intérieur du domaine.

[Car un extremum local à l'intérieur de $\text{dom}(f)$ doit être un point critique.]

1.1.2.: Pour chaque pt critique intérieur, on détermine s'il s'agit bien d'un ext. local (et si oui, s'il s'agit d'un max ou d'un min local), par ex. avec le test de la Hessienne.

(i.e. test de la dérivée seconde) $\leadsto$ pas fait ici.

1.2.: On cherche les ext. locaux sur le bord du domaine.

② Parmi les extr. locaux, on détermine lesquels sont des ext. globaux.

Rem: Pour le 17.3 (c), tous les points du domaine sont à l'intérieur du domaine, donc tous les extr. (loc. ou glob.) seront des pts crit.

$\Rightarrow$ On commence par chercher les pts crit. de f .

ÉTAPE 1 : calculer le gradient

$$(x, y) \mapsto x^3 - 3y^2 + x - 2y - 1$$

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 1, -6y - 2)$$

ÉTAPE 2 : trouver les points
 $(x, y) \in \text{dom } f$ tels que $\nabla f(x, y) = 0$

$$\text{On a } \nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 1 = 0 \\ -6y - 2 = 0 \end{cases}$$

Il n'existe aucun tel point puisque
 $3x^2 + 1 \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ ne possède
aucun extremum (local ou global)

d. $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 - 3y^2 + x - 2y - 1$

Comme le domaine
est

→ fermé (il contient tout
son bord) et
→ borné (il est "limité")

la fonction doit atteindre
un maximum et un
minimum (globaux) sur son
domaine.

Comme ces extremas ne peuvent pas être atteints à l'intérieur du domaine, ils doivent être atteints sur le bord.

20.3d

Analysons le comportement de f sur les points du bord du domaine.

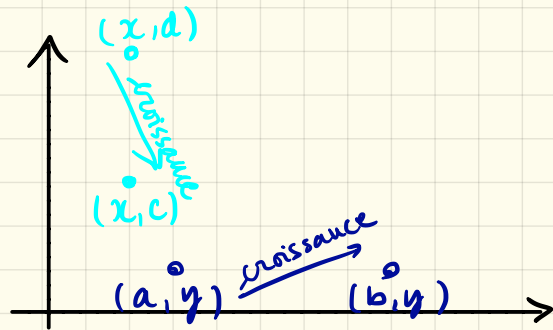
On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 1 > 0 \text{ quand } x \geq 0$$

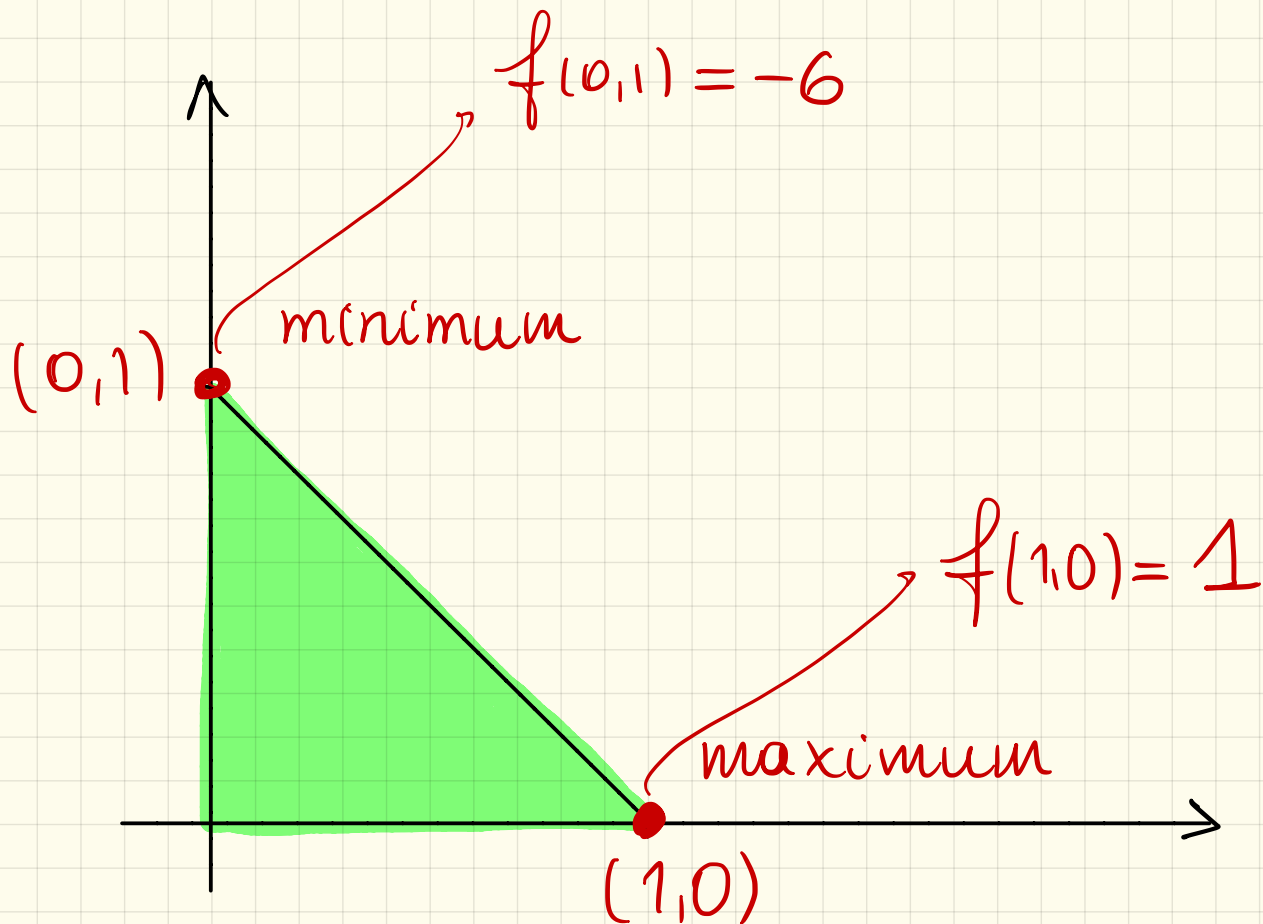
$$\text{et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -6y - 2 < 0 \text{ quand } y \geq 0$$

Sur notre domaine, la dérivée partielle première de f en x est strictement croissante donc $f(a, y) < f(b, y)$ quand $a < b$

20.3 d
De même, la dérivée partielle première de f en y est strictement négative donc $f(x, c) > f(x, d)$ quand $c < d$



Plus on est en bas à droite, plus la valeur de la fonction augmente.



Rappel : Calcul d'intégrale double :

Définition XVII.3. Un domaine $A \subset \mathbb{R}^2$ est dit *verticalement simple* s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ et des fonctions $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

Le domaine est *horizontalement simple* s'il existe $c, d \in \mathbb{R}$ et des fonctions $h_1, h_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}.$$

Résultat XVII.4 (Théorème de Fubini, version faible). Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

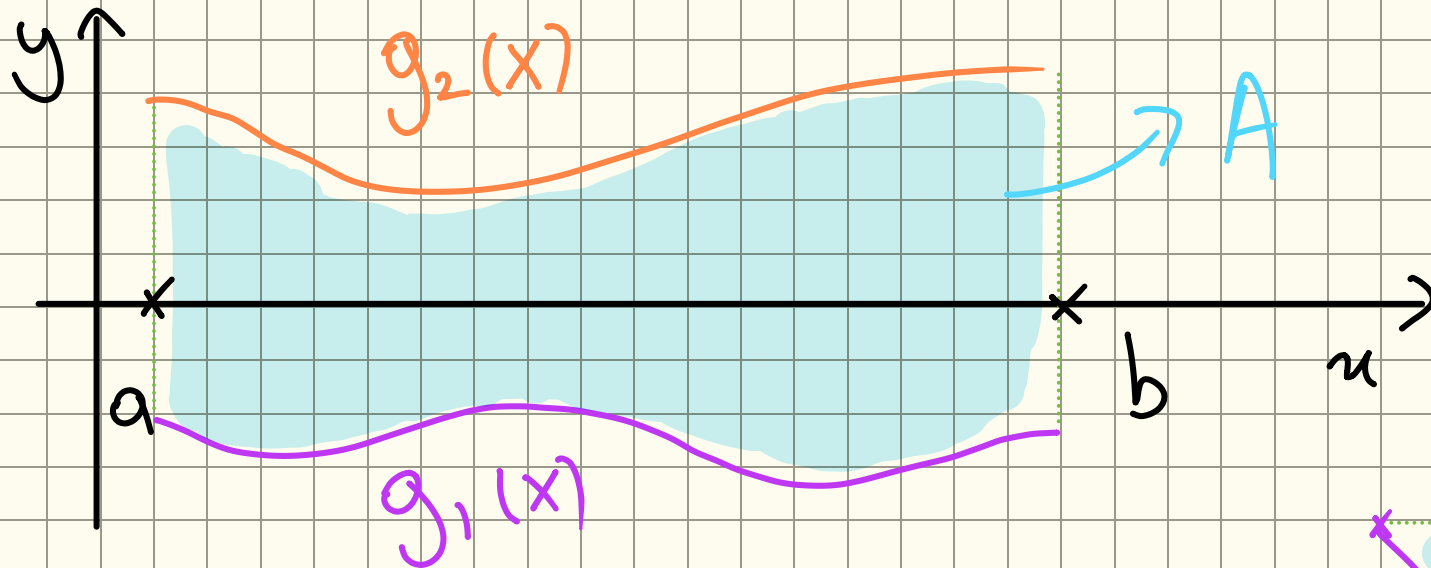
* Si A est verticalement simple, alors

$$\iint_A f = \iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

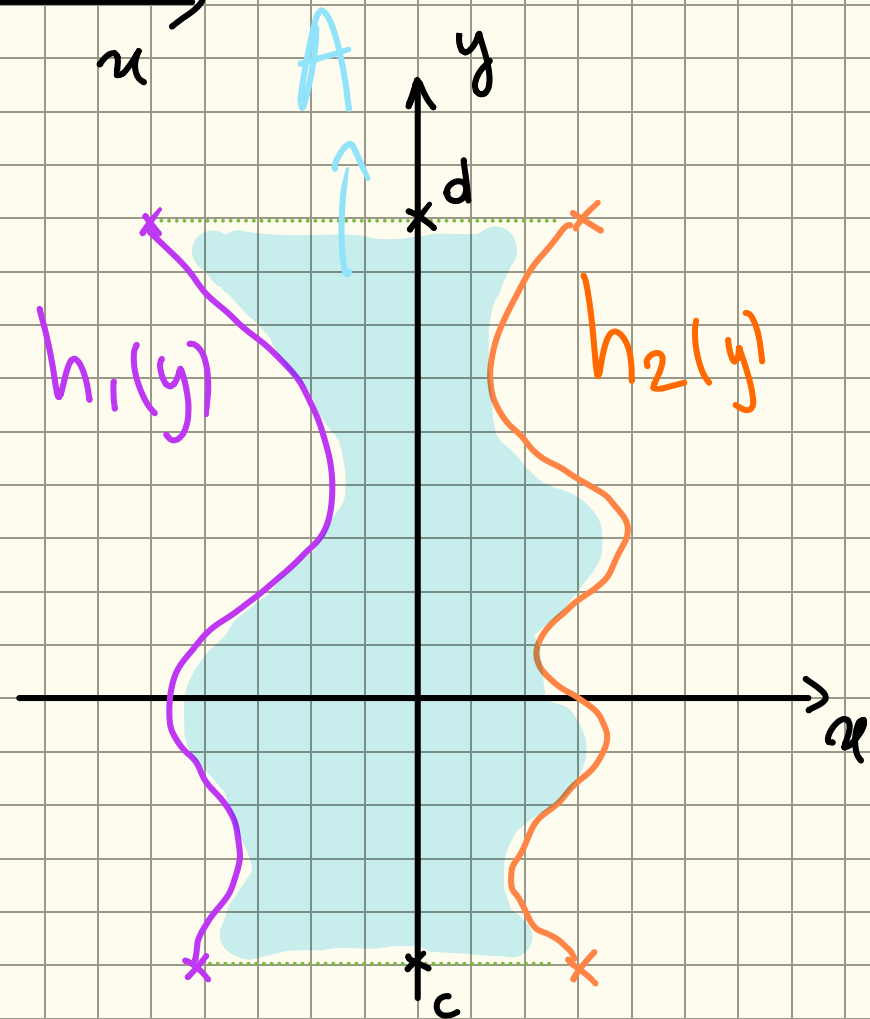
* Si A est horizontalement simple et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, alors

$$\iint_A f = \iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Domaine verticalement simple:

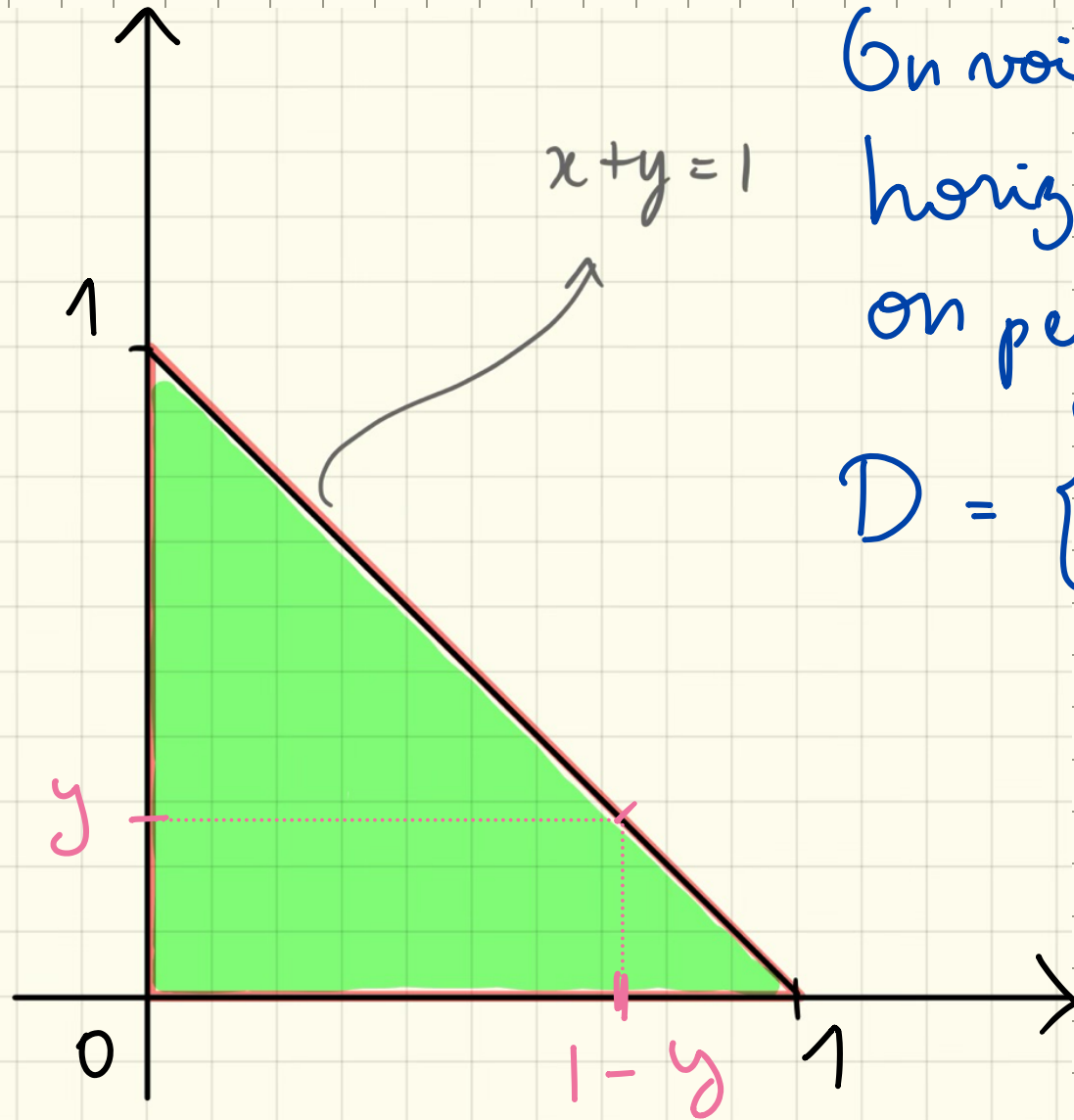


Domaine horizontalement simple:



c. $\iint_D (x+y)^2 dx dy$, où D est la région bornée du plan délimitée par les trois droites d'équations respectives $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$;

Étape 1: Représenter le domaine:



On voit que le domaine est horizontalement simple, i.e. on peut l'écrire

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 \text{ et } 0 \leq x \leq 1-y\}$$

Étape 2 : Effectuer le calcul :

19.2c

$$\begin{aligned} & \iint_D (x+y)^2 dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} (x^2 + 2xy + y^2) dx dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + yx^2 + xy^2 \right]_{x=0}^{1-y} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{(1-y)^3}{3} + y(1-y)^2 + (1-y)y^2 - (0+0+0) \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\underbrace{\frac{1-3y+3y^2-y^3}{3}}_{\frac{1}{3}-y+y^2-\frac{1}{3}y^3} + \overbrace{y(1-2y+y^2)}^{y-2y^2+y^3} + \cancel{y^2} - \cancel{y^3} \right) dy \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} y^3 \right) dy$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 (1 - y^3) dy$$

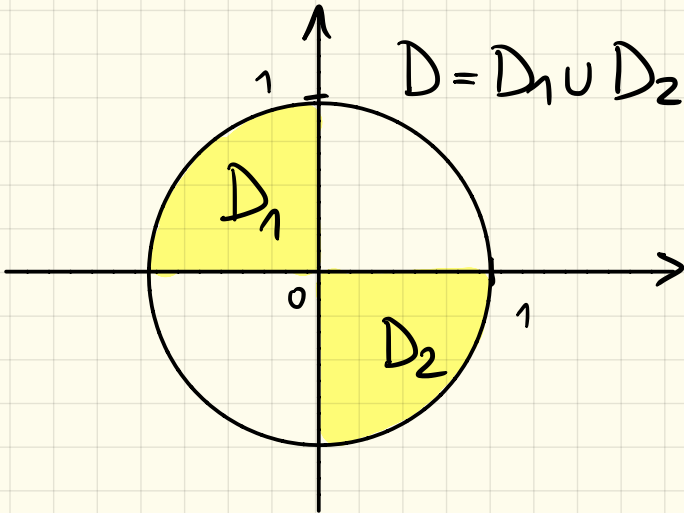
$$= \frac{1}{3} \left[y - \frac{y^4}{4} \right]_{y=0}^1$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} - (0 - 0) \right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

k. $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy$,
 où D est défini par $xy < 0$ et $x^2 + y^2 \leq 1$.

xy est négatif quand
 x et y sont de signes opposés



$$D = D_1 \cup D_2$$

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy$$

$$= \iint_{D_1} \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy + \iint_{D_2} \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy$$

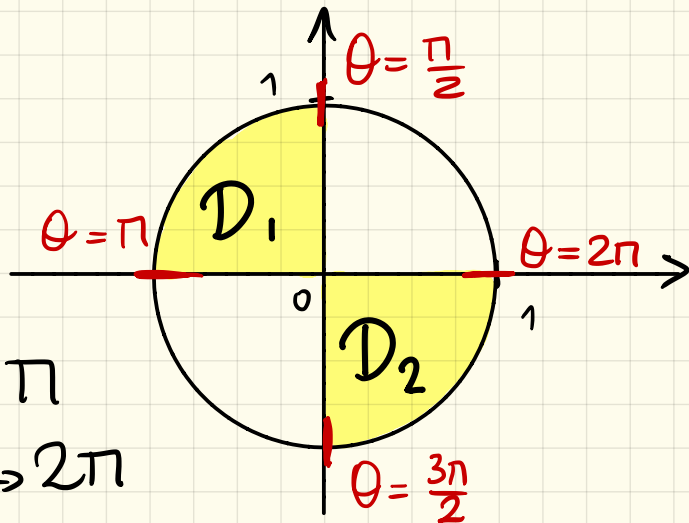
Description de D_1 et D_2 en coordonnées polaires :

$$\rho : 0 \rightarrow 1$$

et

$$\text{pour } D_1, \theta : \frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$$

$$\text{pour } D_2, \theta : \frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$$



Il n'est pas possible, cette fois, de s'en sortir avec une seule intégrale (θ prend des valeurs dans deux intervalles séparés).

$$\iint_{D_1} \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2} \, \rho \, d\rho \, d\theta$$

$\underline{\underline{L}}$ coordonnées polaires

$$\int \sqrt{1-\rho^2} \, \rho \, d\rho = -\frac{1}{2} \int \sqrt{u} \, du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + \text{const}$$

$u = 1-\rho^2 \quad \leftarrow$
 $du = -2\rho \, d\rho$

$$= -\frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + \text{const} = -\frac{1}{3} (1-\rho^2)^{\frac{3}{2}} + \text{const}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[-\frac{1}{3} (1-\rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{\rho=0}^1 d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(0 - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta$$

$$= \frac{1}{3} \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_{D_2} \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy \\
&= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2} \, \rho \, d\rho \, d\theta \\
&= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \left[-\frac{1}{3} (1-\rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{\rho=0}^1 d\theta \\
&= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \left(0 - \left(-\frac{1}{3}\right) \right) d\theta \\
&= \frac{1}{3} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} d\theta = \frac{1}{3} \left(2\pi - \frac{3\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx dy$$

$$= \iint_{D_1} \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx dy + \iint_{D_2} \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx dy$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

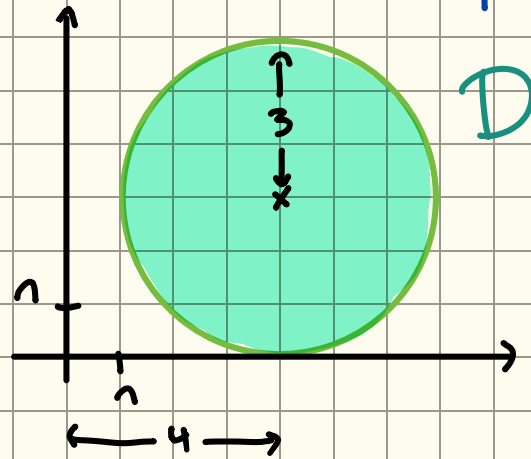
c. $\iint_D dx dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } (x - 4)^2 + (y - 3)^2 \leq 9\}$;

Interpretation géométrique :

- $\iint_D dx dy$ nous donnera l'aire de la région D .
- La région D en question est le disque de rayon 3 centré en $(4, 3)$

⇒ On devrait obtenir

$$\iint_D dx dy = \pi(3^2) = 9\pi$$



Rappel changement de coordonnées (cf sylla)

Résultat XVII.6. De manière générale si un point donné a des coordonnées (par exemple polaires) (u, v) , et si nous notons

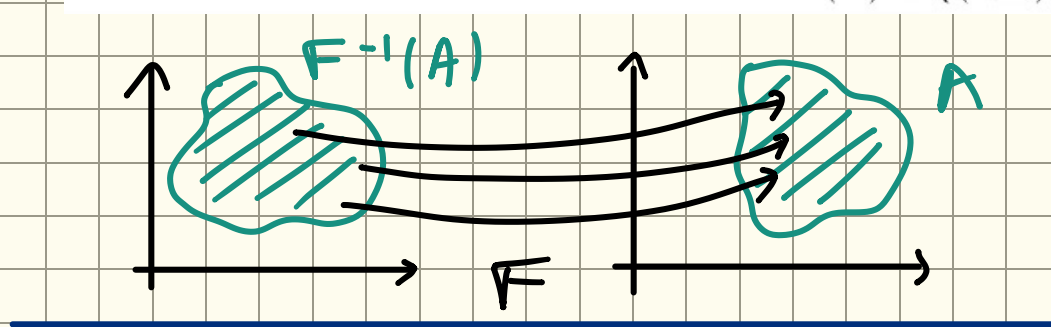
$$F(u, v) = (F_1(u, v), F_2(u, v))$$

l'application donnant les coordonnées cartésiennes correspondant à ce même point (« application de changement de coordonnées »), alors on peut écrire l'égalité

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_{F^{-1}(A)} f(F(u, v)) |\det \text{Jac } F_{(u, v)}| du dv.$$

où $F^{-1}(A)$ est l'ensemble des couples (u, v) représentant des points dont les coordonnées cartésiennes $F(u, v) = (x, y)$ sont dans A :

$$F^{-1}(A) := \{(u, v) \text{ t.q. } F(u, v) \in A\}.$$



$$\text{Jac } F_{(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

ex: coord. polaire :

$$(x, y) = F(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(r, \theta) \\ F_2(r, \theta) \end{pmatrix}, \text{ on a } |\det \text{Jac } F(r, \theta)| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \right| = r$$

$$\text{donc } dx dy = r dr d\theta$$

⇒ c. $\iint_D dx dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } (x-4)^2 + (y-3)^2 \leq 9\}$;

Idee : On va changer de coord. pour recentrer le disque
(en effectuant une translation)

Nouvelle coordonnées : $\begin{cases} u = x-4 \\ v = y-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u+4 \\ y = v+3 \end{cases}$

alors $(x, y) = F(u, v) = F_1(u, v)$ avec $\begin{cases} F_1(u, v) = u+4 \\ F_2(u, v) = v+3 \end{cases}$

Jacobien : $\text{Jac } F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u+4) & \frac{\partial}{\partial v}(u+4) \\ \frac{\partial}{\partial u}(v+3) & \frac{\partial}{\partial v}(v+3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

alors $|\det \text{Jac } F(u, v)| = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1$ et
 $dx dy = du dv$

Nouveau domaine d'intégration:

Pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $F(u, v) = (u+4, v+3) \in D$

$$\Leftrightarrow 9 \geq ((u+4)-4)^2 + ((v+3)-3)^2 = u^2 + v^2$$

$$\text{donc } F^{-1}(D) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 9\}$$

Nouvelle intégrale:

$$\iint_D dx dy = \iint_{F^{-1}(D)} du dv = \iint_{\{u^2 + v^2 \leq 9\}} du dv ; \text{ pour calculer cette}$$

dernière intégrale, on passe en coord. polaire, i.e. on pose $(u, v) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, et on trouve

$$\iint_{\{u^2 + v^2 \leq 9\}} du dv = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^3 r dr d\theta = 2\pi \int_0^3 r dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^3 = 9\pi$$

19.4. Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 2 - x^2 - y^2$.
Faites un schéma de cette surface
en dessinant aussi le système d'axes.
Calculez ensuite le volume de la région
située entre le plan d'équation $z = 0$ et la surface S ,
au dessus du plan $z = 0$.

Lignes de niveau de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2 - x^2 - y^2$:

$$2 - x^2 - y^2 = C \in \mathbb{R}$$

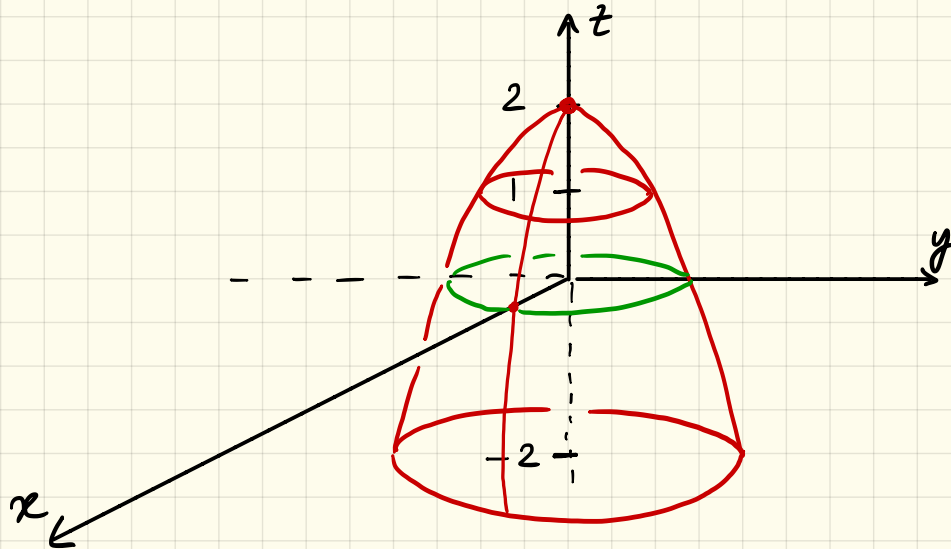
$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 + y^2}_{\geq 0} = 2 - C \quad \rightarrow \text{Cercle de rayon } \sqrt{2 - C}$$

$$\text{On doit avoir } 2 - C \geq 0 \Leftrightarrow C \leq 2$$

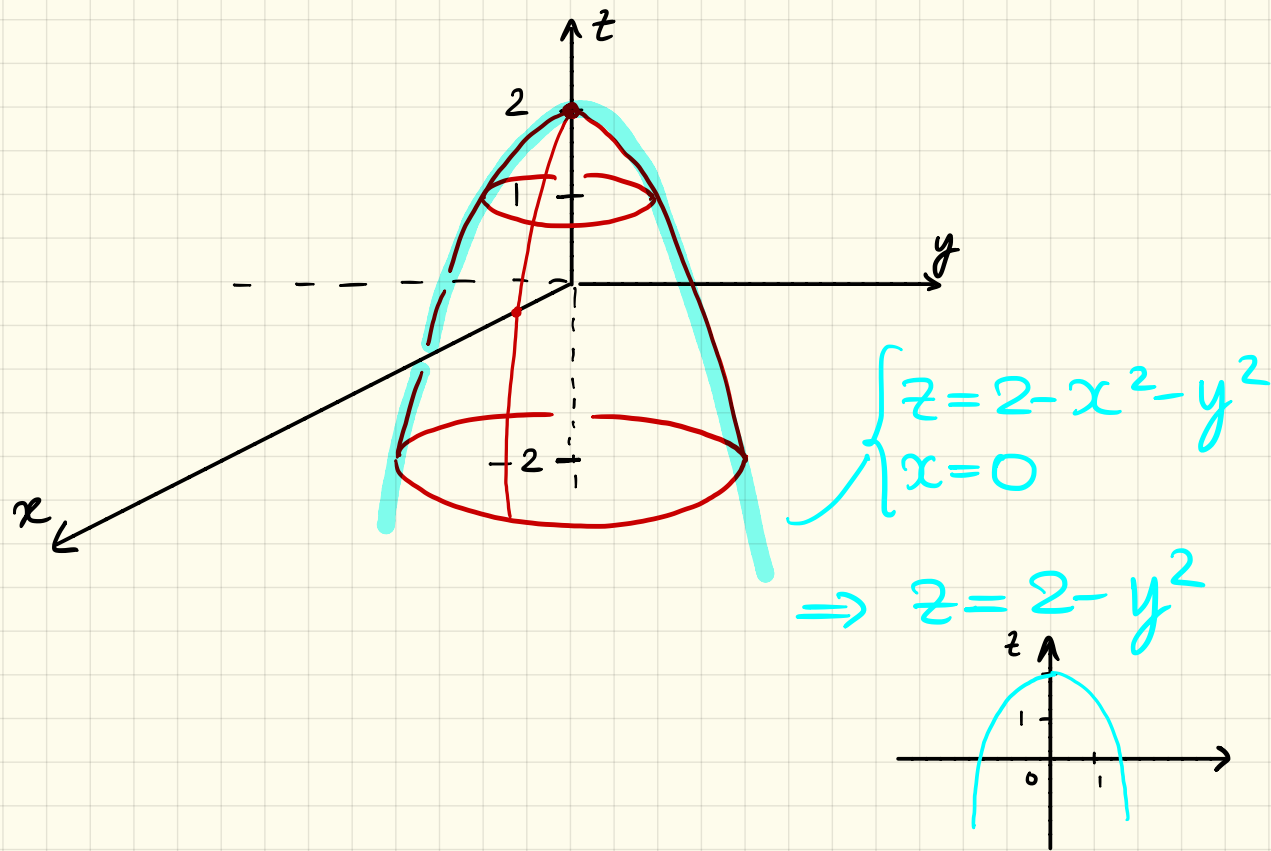
$$C = 2 : x^2 + y^2 = 0 \rightarrow \text{point } (0,0)$$

$$C = 1 : x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \text{cercle de rayon } 1$$

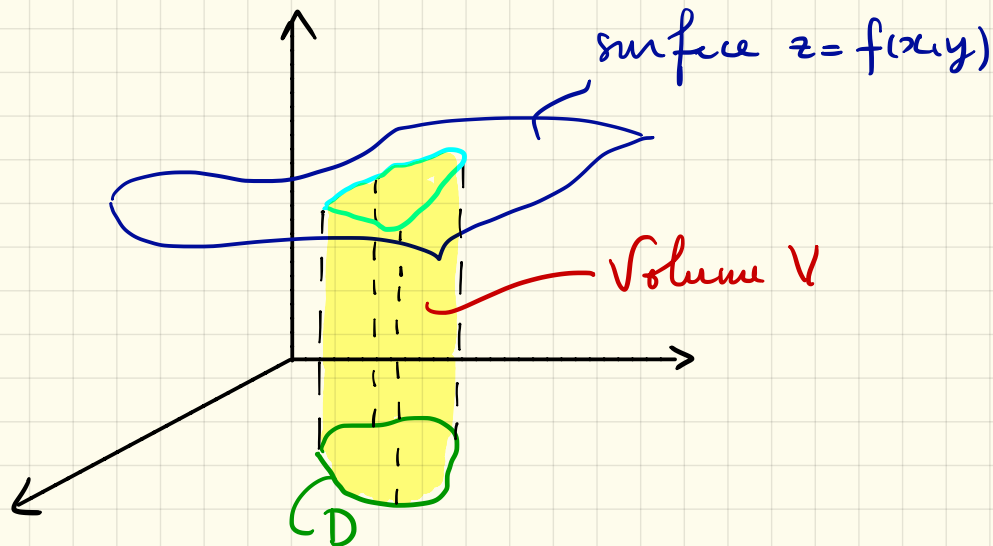
$$C = -2 : x^2 + y^2 = 4 \rightarrow \text{cercle de rayon } 2$$



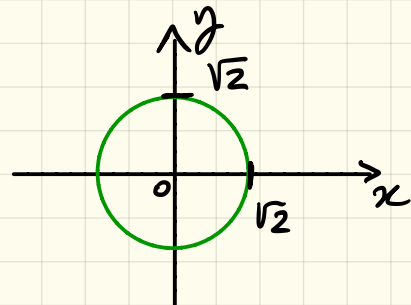
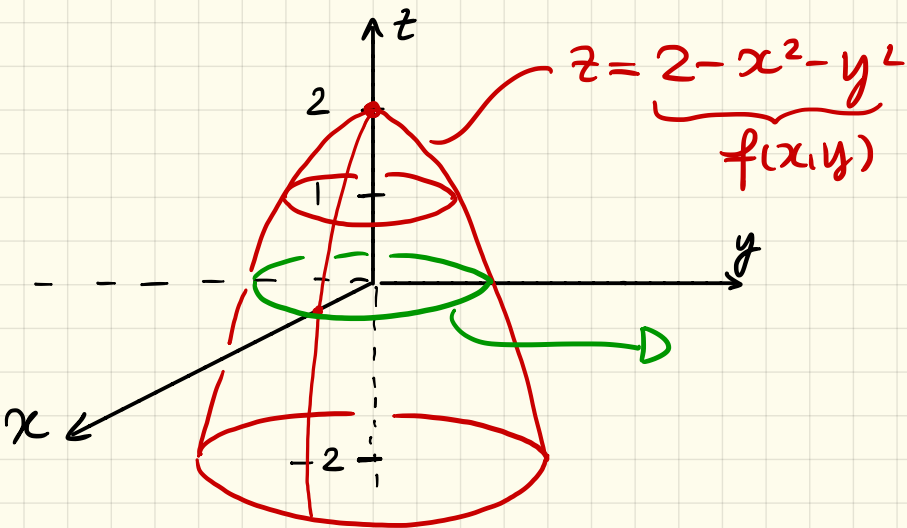
$$C = 0 : x^2 + y^2 = 2 \rightarrow \text{cercle de rayon } \sqrt{2} \approx 1.4$$



Volume situé sous une surface d'équation
 $z = f(x, y)$ et au dessus d'un domaine
 $D \subseteq \mathbb{R}^2$



$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$



Description de D
 en coordonnées polaires:
 $\rho: 0 \rightarrow \sqrt{2}$
 $\theta: 0 \rightarrow 2\pi$

$$\begin{aligned} \text{Volume recherché} &= \iint_D (2 - \underbrace{x^2 + y^2}_{\rho^2}) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (2 - \rho^2) \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

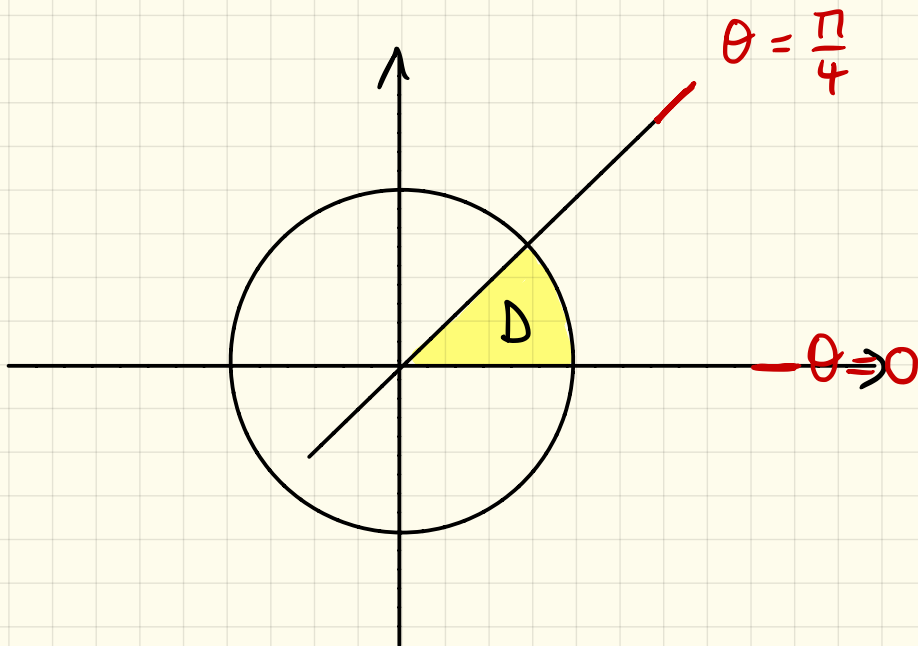
(coordonnées polaires)

$$\begin{aligned}& \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho - \rho^3) \, d\rho \, d\theta \\&= \int_0^{2\pi} \left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{\sqrt{2}} d\theta \\&= \int_0^{2\pi} \left(2 - \frac{4}{4} - 0 \right) d\theta \\&= \int_0^{2\pi} d\theta \\&= 2\pi - 0 = 2\pi\end{aligned}$$

19.5. Calculer, à l'aide d'une intégrale double, l'aire de la région bornée de $\mathbb{R}^2$

d. délimitée par les droites d'équations $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$ en coordonnées polaires,

ainsi que par l'arc de cercle de rayon 1 centré à l'origine et intercepté par ces deux droites.



$$\begin{aligned}\text{Aire de } D &= \iint_D dx dy \\&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \rho d\rho d\theta \\&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_{\rho=0}^1 d\theta = \frac{1}{2} \\&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) \\&= \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

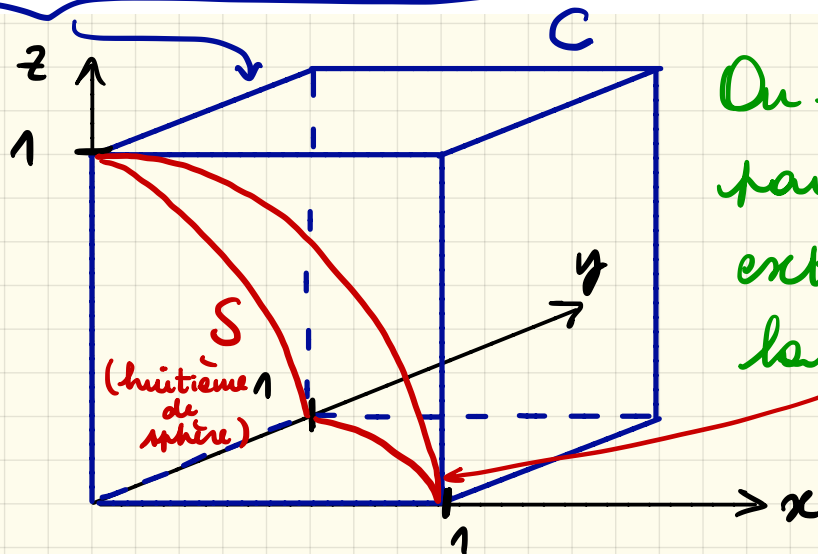
19.7. Déterminer

c. $\iiint_D dx \, dy \, dz,$

si $D = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q.}$

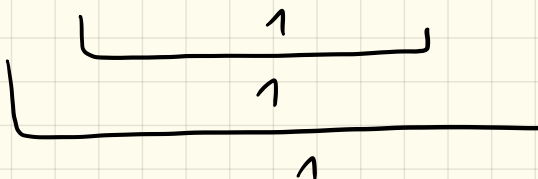
$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ et $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1 \}$.

$$D = C \setminus S$$



On est dans la
partie du cube
extérieure à
la sphère.

$$\iiint_D dx dy dz = \iiint_C dx dy dz - \iiint_S dx dy dz$$

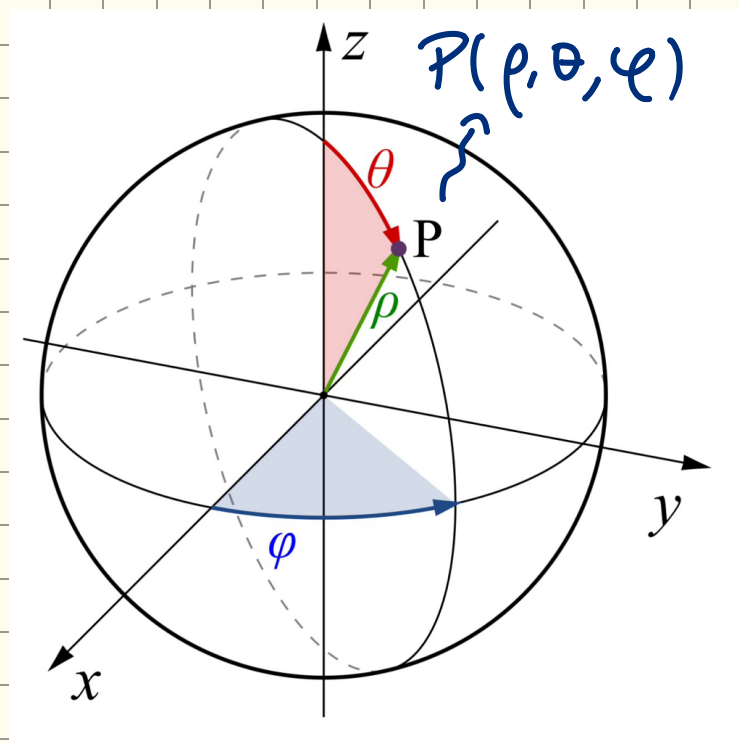
$$\iiint_C dx dy dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dx dy dz$$


$$= 1$$

Cohérent : Volume du cube

$$1 \times 1 \times 1 = 1$$

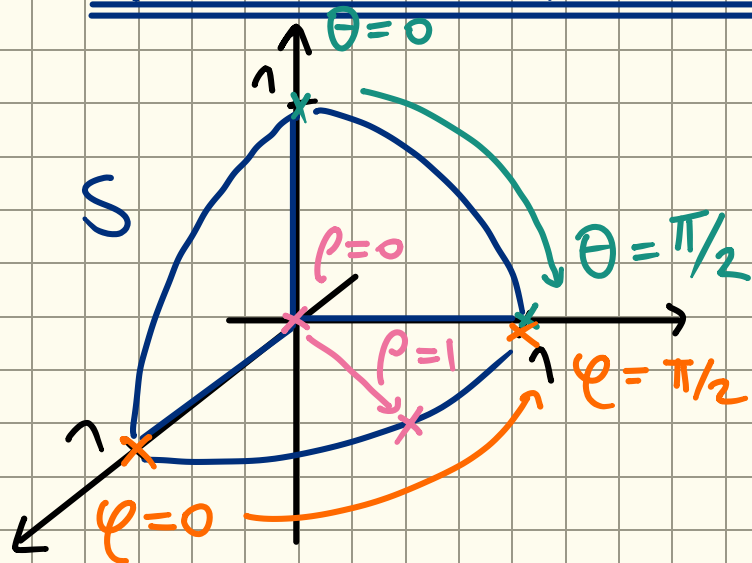
* Pour calculer $\iiint_S dx dy dz$, on passe en coord. sphériques



Élément de volume:

$$dx dy dz = \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi$$

Nouveau domaine d'intégration:



On voit que $P(\rho, \theta, \varphi) \in D$
ssi :
$$\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \end{cases}$$

Def. coord. sph.:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$

$$\iiint_S dx dy dz$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^3}{3} \sin \phi \right]_{\rho=0}^1 d\theta \, d\phi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3} \sin \phi \right) d\theta \, d\phi = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \, d\theta \, d\phi$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \sin \phi \, d\phi = \frac{\pi}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \, d\phi$$

$$= \frac{\pi}{6} \left[-\cos \phi \right]_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6} (0 - (-1)) = \frac{\pi}{6}$$

Cohérent :

19.7 c

Volume du $\frac{1}{8}$
de sphère = $\frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

Formule
volume
sphère :
 $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \text{rayon}^3$

$$\begin{aligned}\iiint_D dx dy dz &= \iiint_C dx dy dz - \iiint_S dx dy dz \\ &= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.\end{aligned}$$