



Ex cathedra

15

Opérations sur les complexes :

- Idée : Outre le fait que $i^2 = -1$, "i" se comporte comme tous les autres nombres. On peut donc continuer à se servir de la distributivité, l'associativité, ...

Addition : $(a+ib) + (c+id) = a+b + \underbrace{ic+id}_{=i(c+d)} = (a+b) + i(c+d)$

Multiplication : $(a+ib)(c+id) = ac + \underbrace{a(id)}_{=iad} + ibc + \underbrace{(ib)(id)}_{=i^2bd = -bd}$
 $= (ac - bd) + i(ad + bc)$

Division : Pour cela on utilise l'astuce : $(a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2$
 $= a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2$

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id} \frac{(c-id)}{(c-id)} = \frac{(ac+bd) + i(bc-ad)}{c^2 + d^2}$$

21.1. Effectuer les opérations

$$\text{a)} \quad (1 + i) + (3 - 2i) - 4i;$$

$$= (1 + 3) + (i - 2i - 4i)$$

$$= 4 - 5i$$

partie
réelle

partie
imaginaire

$$g) \quad \frac{2+i}{4-3i};$$

$$= \frac{(2+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{8+6i+4i+\overset{-3}{\widetilde{3i^2}}}{4^2+3^2} = \frac{5+10i}{25} = \frac{1+2i}{5}$$

$$\text{i)} \quad \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^{10}.$$

$$= \left(\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} \right)^{10} = \left(\frac{1-2i+i^2}{1-i^2} \right)^{10}$$

$$= \left(\frac{1-2i+(-1)}{1-(-1)} \right)^{10} = \left(\frac{-2i}{2} \right)^{10} = (-i)^{10}$$

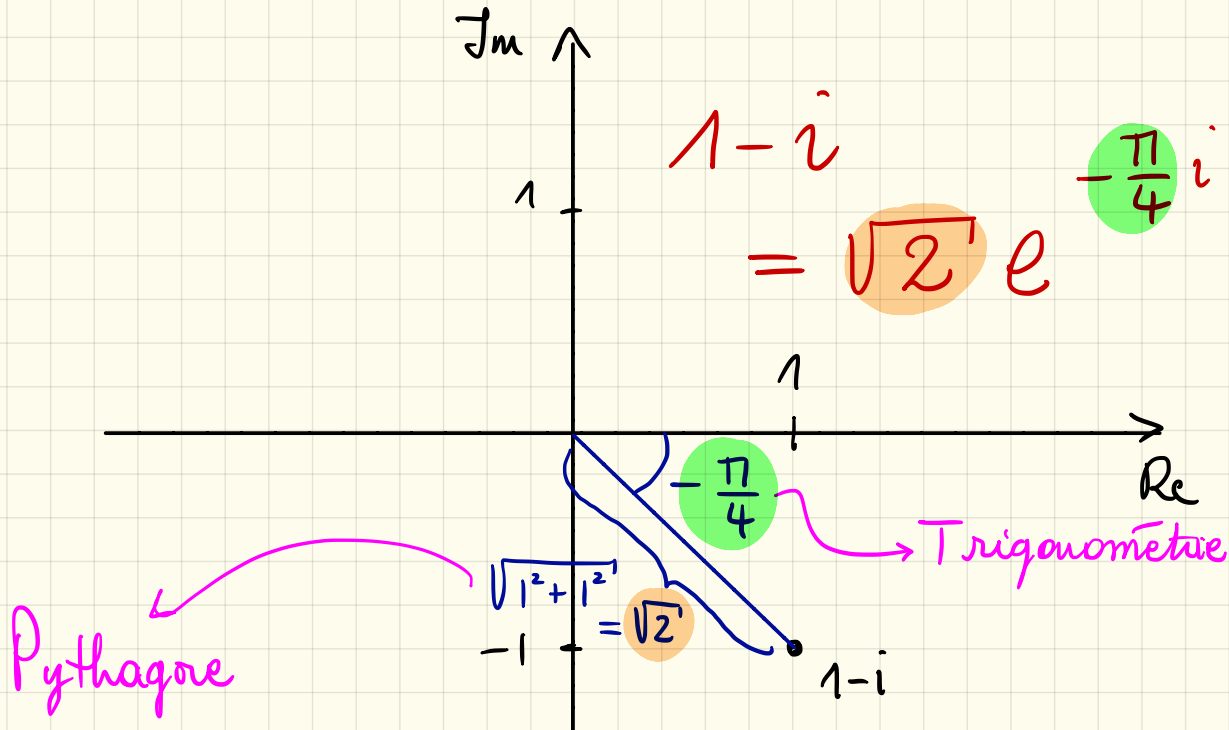
$$= i^{10} = (i^2)^5 = (-1)^5 = -1$$

Ici il est facile de calculer la 10^e puissance de notre complexe (parce qu'il est imaginaire

pure, on aurait eu autant, voire plus, de facilité s'il avait été réel). Lorsque le complexe a une partie réelle et une partie imaginaire toutes deux non-nulles, il vaut mieux passer en coordonnées polaires:

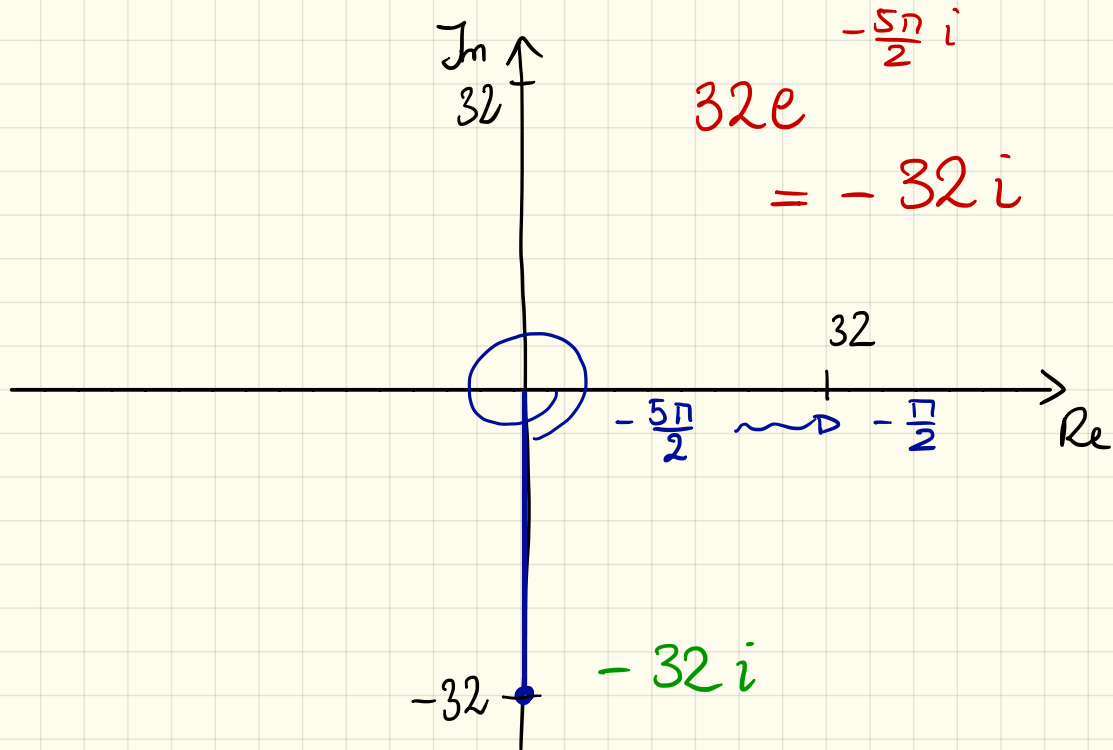
Exemple: calcul de $(1-i)^{10}$

Mise sous forme polaire



$$\begin{aligned}(1-i)^{10} &= \left(\sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^{10} \\&= (\sqrt{2})^{10} e^{10 \cdot (-\frac{\pi}{4}i)} \\&= 2^5 e^{-\frac{5\pi}{2}i} \\&= 32 e^{-\frac{5\pi}{2}i}\end{aligned}$$

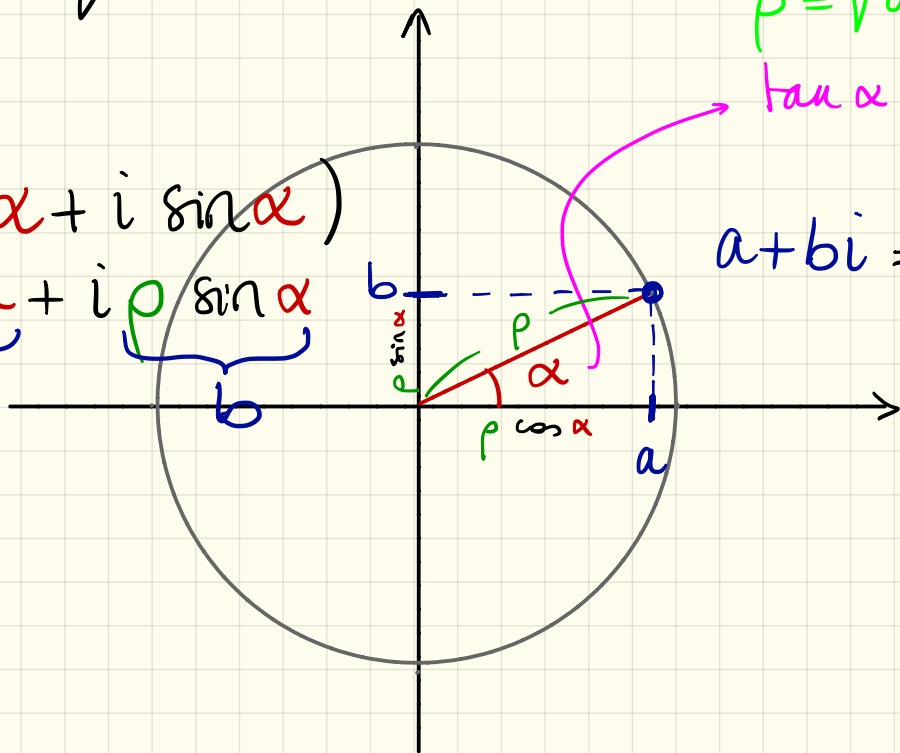
Mise sous forme cartésienne :



$$\begin{aligned} 32 e^{-\frac{5\pi}{2} i} &= 32 e^{-\frac{\pi}{2} i} \\ &= -32 \end{aligned}$$

En général :

$$\begin{aligned} &= \rho e^{i\alpha} \\ &= \rho (\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ &= \underbrace{\rho \cos \alpha}_a + i \underbrace{\rho \sin \alpha}_b \end{aligned}$$



$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{a}$$

$$a + bi = \rho e^{i\alpha}$$

21.3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

k) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0.$

Posons $t = x^2$. On obtient

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-4)(t+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \text{ ou } t = 4$$

Si l'on avait voulu résoudre l'équation dans $\mathbb{R}$, on n'aurait pas pu avoir $x^2 = -1$. Mais, dans $\mathbb{C}$, c'est une possibilité.

On a

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \text{ ou } x^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 2 \text{ ou } x = \pm i$$

L'ensemble des solutions
est

$$S = \{ \pm 2, \pm i \}$$

L'argument n'est pas unique :

Pour $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}^+$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$,

$$\rho_1 e^{i\theta_1} = \rho_2 e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + k2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Racines n^{ièmes} :

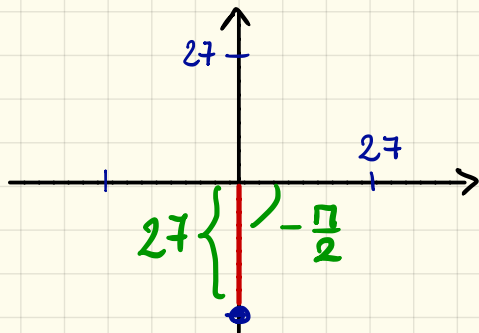
- Pour $w \in \mathbb{C}$ avec $w \neq 0$, et $n \in \mathbb{N}_0$, l'équation $z^n = w$ possède n solutions dans $\mathbb{C}$, i.e. w possède n racines n^{ièmes} (qui forment un polygone régulier centré à l'origine)
- Si $w = |w| e^{i\theta}$ (avec $\theta \in \mathbb{R}$) ces racines sont données par
$$z_k = \sqrt[n]{|w|} e^{i \left(\frac{\theta + 2\pi k}{n} \right)} \text{ avec } k = 0, 1, \dots, n-1$$

21.5. Calculer en se servant de la représentation polaire

8) les racines sixièmes de $-27i$.

On cherche les $z = \rho e^{i\theta}$ dans $\mathbb{C}$ tels
que $z^6 = -27i = 27 e^{(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\rho^6 e^{i6\theta}$$



On souhaite avoir $\rho^6 = 27$
 $6\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$$\rho^6 = 27 \Leftrightarrow \rho^2 = 3 \underset{\rho \geq 0}{\Leftrightarrow} \rho = \sqrt{3}$$

$$6\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}$$

$$k=0: \sqrt{3} e^{-\frac{\pi}{12}i} = \sqrt{3} \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{3} \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) i$$

$$k=1: \theta = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi+4\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}, \sqrt{3} e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{3} \cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{3} \sin\frac{\pi}{4} i \\ = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} i$$

$$k=2: \theta = -\frac{\pi}{12} + 2\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi+8\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}, \sqrt{3} e^{\frac{7\pi}{12}i} = \sqrt{3} \cos\frac{7\pi}{12} + \sqrt{3} \sin\frac{7\pi}{12} i$$

$$k=3: \theta = -\frac{\pi}{12} + 3\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi+12\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}, \sqrt{3} e^{\frac{11\pi}{12}i} = \sqrt{3} \cos\frac{11\pi}{12} + \sqrt{3} \sin\frac{11\pi}{12} i$$

$$k=4: \theta = -\frac{\pi}{12} + 4\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi+16\pi}{12} = \frac{15\pi}{12} = \frac{5\pi}{4}, \sqrt{3} e^{\frac{5\pi}{4}i} = \sqrt{3} \cos\frac{5\pi}{4} + \sqrt{3} \sin\frac{5\pi}{4} i$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} i$$

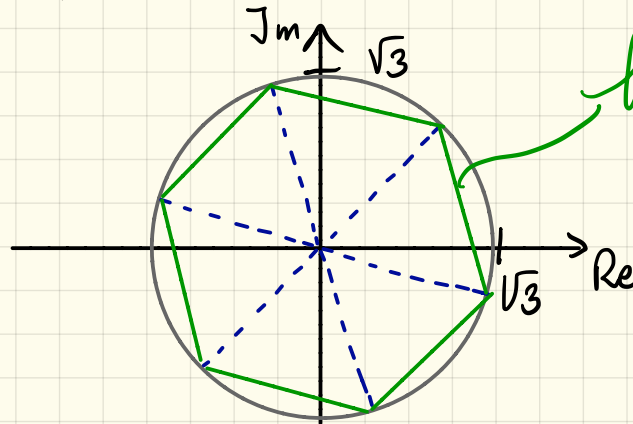
$$k=5: \theta = -\frac{\pi}{12} + 5\frac{\pi}{3} = \frac{-\pi + 20\pi}{12} = \frac{19\pi}{12}$$

$$\sqrt{3} e^{i \frac{19\pi}{12}} = \sqrt{3} \cos \frac{19\pi}{12} + \sqrt{3} \sin \frac{19\pi}{12} i$$

Représentation géométrique:

$$z_0 = \sqrt{3} e^{-\frac{\pi}{12} i}, z_1 = \sqrt{3} e^{\frac{\pi}{4} i}, z_2 = \sqrt{3} e^{\frac{7\pi}{12} i}, z_3 = \sqrt{3} e^{\frac{11\pi}{12} i},$$

$$z_4 = \sqrt{3} e^{\frac{5\pi}{4} i}, z_5 = \sqrt{3} e^{\frac{19\pi}{12} i}$$



hexagone
régulier

21.6. Représenter géométriquement ces ensembles dans le plan de Gauss.

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - (2 + 2i)| \leq 2 \right\}$$

Rappel : Pour $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$),

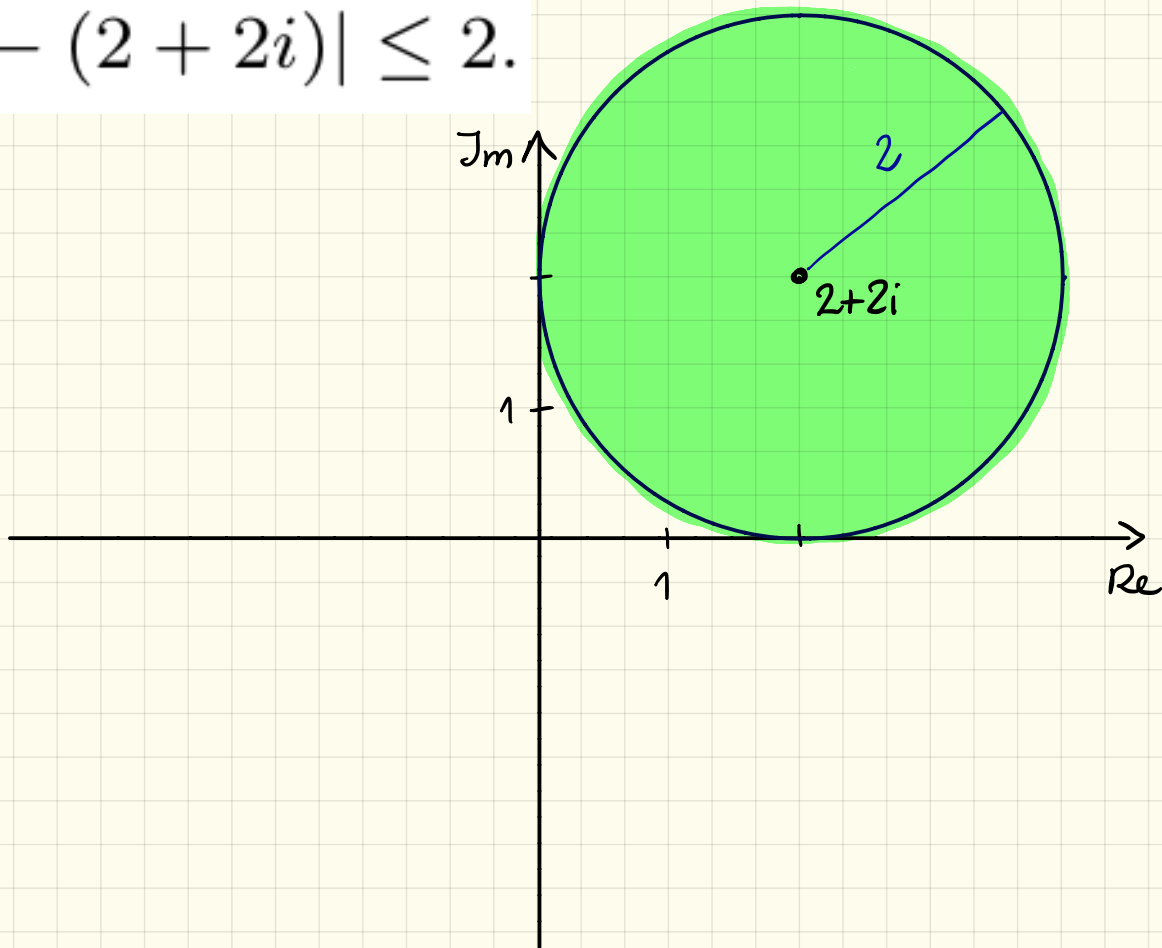
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est la distance entre z et 0

dans le plan de Gauss.

(Astuce : $\bar{z} = a - ib$ et $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$)

donc pour $z, w \in \mathbb{C}$, $|z - w|$ est la distance
entre z et w dans le plan Gaussien.

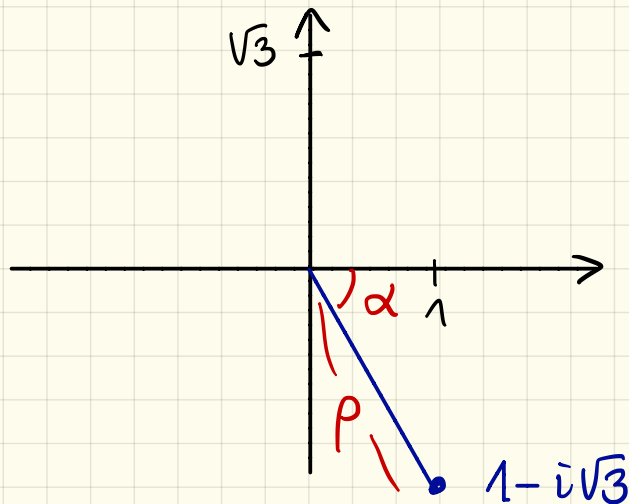
$$|z - (2 + 2i)| \leq 2.$$



21.8. Soit $z = 1 - i\sqrt{3}$.

a. Que vaut z^5 ?

$$z = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$$



$$\rho = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} \\ = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\tan \theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{3}$$

19.8. Soit $z = 1 - i\sqrt{3}$.

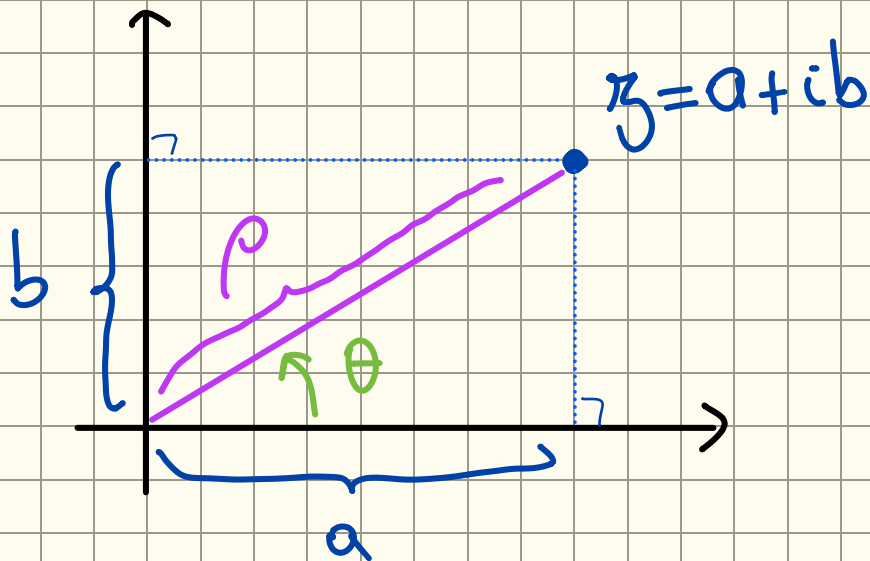
a. Que vaut z^5 ?

Mettre un n^{bre} complexe sous forme polaire :

On nous donne $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) et on veut trouver $\rho \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tq $z = \rho e^{i\theta} = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta$, i.e. tq

$$\begin{cases} a = \rho \cos \theta \\ b = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Géométriquement :



1. Trouver ρ :

On a $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Pythagore)

2. Trouver θ :

1^{ère} Possibilité: Utiliser les valeurs connues de $\cos$ et $\sin$
($\cos(\pi/2)$, $\sin(\pi/6)$, $\cos(2\pi/3)$, ...) pour trouver $\theta \in \mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} \cos \theta = a/\rho = a/\sqrt{a^2 + b^2} \\ \sin \theta = b/\rho = b/\sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

2^{ème} possibilité: Comme $a = \rho \cos \theta$, $b = \rho \sin \theta$ on a

$$\frac{b}{a} = \frac{\cancel{\rho} \sin \theta}{\cancel{\rho} \cos \theta} = \tan \theta, \text{ donc on peut chercher } \theta \in]-\pi/2, \pi/2[$$

tq $\tan \theta = b/a$ (à nouveau on teste $\theta = -\pi/4, \pi/6, \dots$)

⚠ Attention au signe de a : Une fois qu'on a $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$
avec $\tan \theta = b/a$, si $a < 0$ il faut remplacer θ par $\theta + \pi$

⚠ Si $a = 0$: dans ce cas b/a est indéfini.

Si $b > 0$, $\theta = \pi/2 + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Si $b < 0$, $\theta = -\pi/2 + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Dans tous les cas, si vous pensez avoir trouvé un ρ
et un θ , vérifiez que vous avez bien

$$\begin{cases} a = \rho \cos \theta \\ b = \rho \sin \theta \end{cases}$$

et qu'il ne faut pas remplacer θ par $\pm \theta$ ou $\theta + \pi$.

$$z^5 = \left(2 e^{-\frac{\pi}{3} i}\right)^5$$

$$= 2^5 e^{5 \cdot (-\frac{\pi}{3}) i}$$

$$= 32 e^{-\frac{5\pi}{3} i}$$

$$= 32 e^{\frac{\pi}{3} i}$$

$$= 32 \cos \frac{\pi}{3} + 32 i \sin \frac{\pi}{3}$$

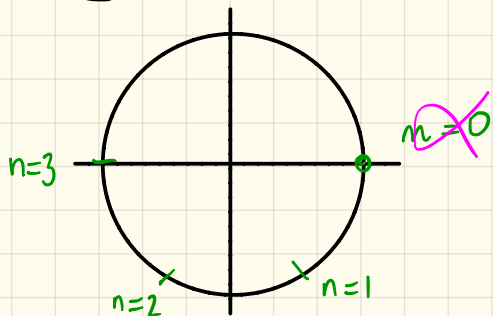
$$= \overset{16}{\cancel{32}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + \overset{16}{\cancel{32}} i \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

$$= 16 + 16\sqrt{3} i$$

b. Déterminer le plus petit nombre naturel strictement positif n tel que z^n soit réel.

$$z^n = \left(2 e^{-\frac{\pi}{3} i} \right)^n = 2^n e^{-\frac{n\pi}{3} i}$$
$$= 2^n \cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right) + i 2^n \sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$z^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right) = 0 \quad \text{⊗}$$



Le plus petit $n \in \mathbb{N}_{>0}$ qui satisfait cette condition est $n=3$.

$$\textcircled{*} \sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{n\pi}{3} = k\pi \text{ pour } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n = 3k \text{ pour } k \in \mathbb{Z}$$

i.e. n est multiple 3.

D'une façon générale, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{R}_0^+$

$\rho e^{i\theta}$ est réel ssi $\sin(\theta) = 0$ donc ssi $\theta = k\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

c. Montrer qu'aucune puissance de z n'est imaginaire pure.

z^n est imaginaire pure lorsque sa partie réelle, à savoir $2^n \cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right)$, est nulle

$2^n \cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right)$ n'est jamais nul puisque $2^n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et

$$\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$\Leftrightarrow n = -\frac{3}{2} - 3k$$

Or $-\frac{3}{2} - 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ n'est jamais un nombre² naturel.