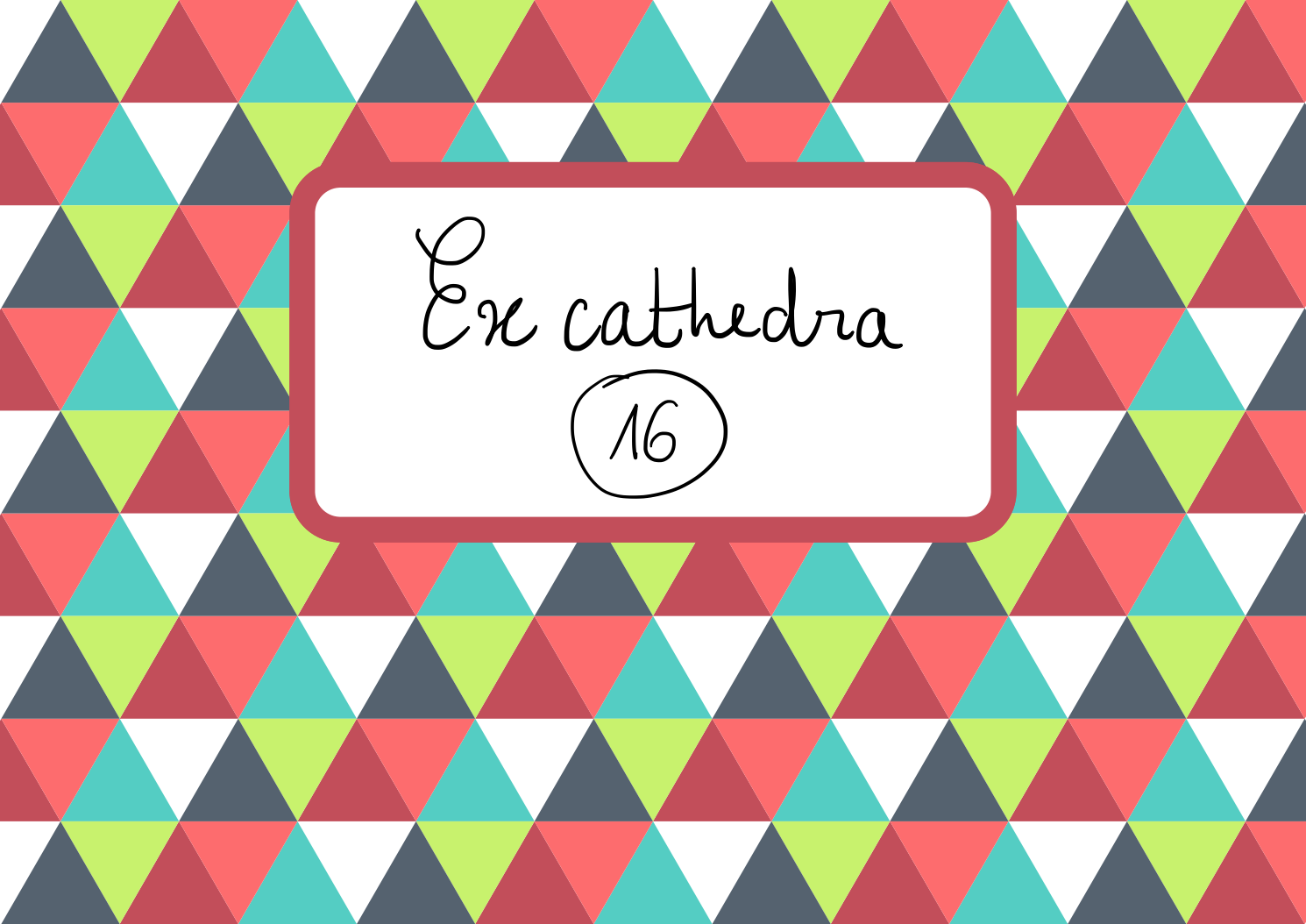




Ex cathedra

16

18.1. Pour quelle(s) valeur(s) réelle(s) de a
l'équation différentielle

en la fonction inconnue $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto y(t)$

$$\frac{dy}{dt}(t) = (t - a)y(t)$$

admet-elle la solution

$$y(t) = C e^{r(t-1)^2}$$

où C et r sont des constantes réelles données avec $C \neq 0$?

$$y(t) = C e^{r(t-1)^2}$$

On a

$$\frac{dy}{dt}(t) = C e^{r(t-1)^2} \cdot \frac{d(r(t-1)^2)}{dt}$$

la dérivée reste
une fonction de t

$$= C e^{r(t-1)^2} r \cdot 2(t-1)$$

$$= 2 r C (t-1) e^{r(t-1)^2}$$

$$y(t) = Ce^{r(t-1)^2}, \quad \frac{dy}{dt}(t) = 2rC(t-1)e^{r(t-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dt}(t) = (t-a)y(t)$$

Pour quelles valeurs de a a-t-on

$$2rC(t-1)e^{r(t-1)^2} = (t-a)Ce^{r(t-1)^2}.$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$?

$$\cancel{2\pi(t-1)} \underset{C \neq 0}{e^{\cancel{\pi(t-1)^2}}} = (t-a) \underset{C \neq 0}{\cancel{e^{\pi(t-1)^2}}} \underset{e^{\pi(t-1)^2} \neq 0}{\neq 0}$$

$$\Leftrightarrow 2\pi(t-1) = t-a$$

$$\Leftrightarrow 2\pi t - 2\pi = t - a$$

Si $\pi \neq \frac{1}{2}$, aucune valeur de a ne convient.

Si $\pi = \frac{1}{2}$, la seule valeur de a qui convient est $a = 2\pi = 1$.

18.5. Sans résoudre l'équation,
déterminer le lieu des points (x, y)
où la solution $y = y(x)$ de l'équation différentielle

$$y' = xy - 1$$

atteint un minimum ou un maximum.

Si la fonction $y: x \mapsto y(x)$
atteint un extremum au
point (a, b) alors on a $y(a) = b$
et $y'(a) = 0$.

$$y' = xy - 1 \rightsquigarrow y'(x) = xy(x) - 1$$

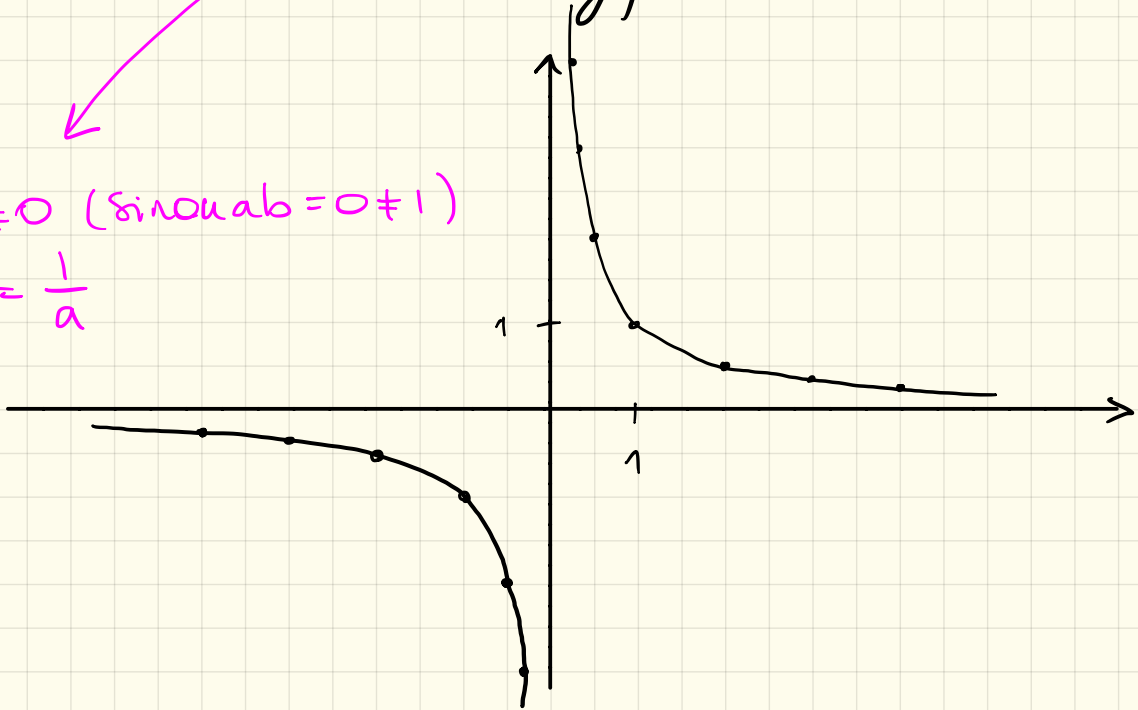
Dans notre équation, remplaçons x par a (où (a, b) est notre extremum). On obtient

$$\underbrace{y'(a)}_0 = a \cdot \underbrace{y(a)}_b - 1$$

$$\text{Donc } 0 = ab - 1 \Leftrightarrow ab = 1.$$

Le lieu des points (a, b) qui satisfont $ab = 1$ est un couple de branches d'hyperbole

$a \neq 0$ (sinon $ab = 0 \neq 1$)
 $b = \frac{1}{a}$



Montrer que toutes les solutions
ont un graphe dans $\mathbb{R}^2$ qui coupe les
axes sous un angle constant.

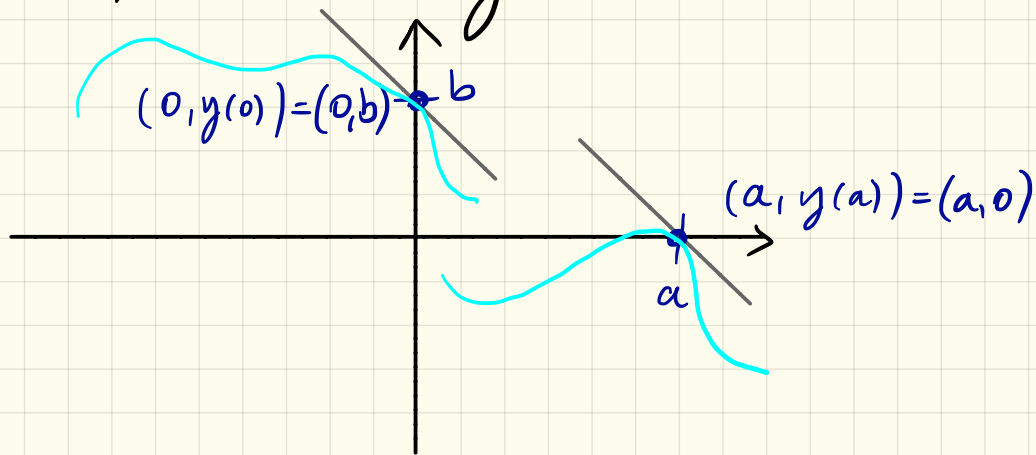
Soit $y : x \mapsto y(x)$ une solution
à l'équation

$$y' = xy - 1$$

On s'intéresse à l'angle que
forme le graphe de y avec les
axes

— c'est-à-dire —

On s'intéresse à l'inclinaison des tangentes au graphe de y aux points auxquels il intersecte les axes; ces points auront des coordonnées $(a, 0)$ (avec $y(a) = 0$) ou $(0, b)$ (avec $y(0) = b$)



$$y' = xy - 1$$

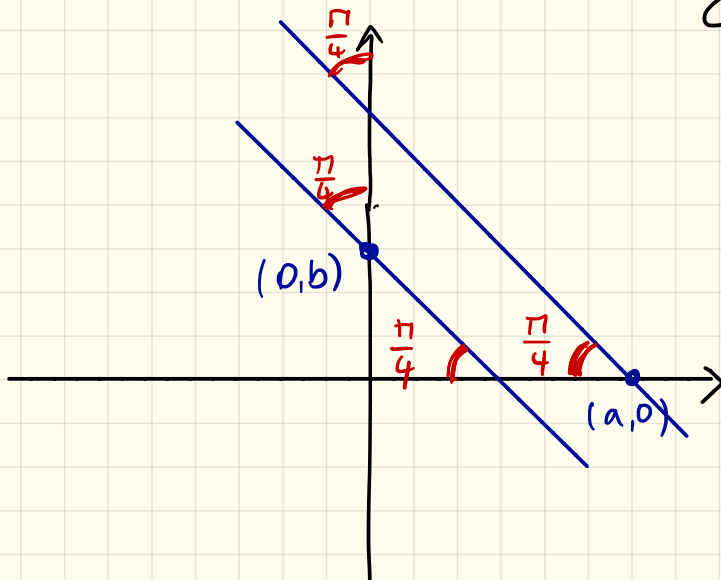
① Que se passe-t-il à un point du type $(a, y(a)) = (a, 0)$?

$$y'(a) = a \cdot \underbrace{y(a)}_0 - 1 \Rightarrow y'(a) = -1$$

② Que se passe-t-il à un point du type $(0, y(0))$?

$$y'(0) = 0 \cdot y(0) - 1 \Rightarrow y'(0) = -1$$

Dans les deux cas, la dérivée vaut -1 et donc la tangente a une pente de -1 : elle forme un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec l'axe Ox et avec l'axe Oy



18.9. Résoudre les équations différentielles du premier ordre à variables séparables :

On a du y' (et
du y), pas
de y'' etc.

↓
Technique de
résolution : on
sépare les x des y
(voir exemple).

e) $(1+y)dx - (1+x)dy = 0$,

$x_0 = 1, \quad y_0 = 2.$

Où se trouve la dérivée? $y' = \frac{dy}{dx}$
On peut diviser par dx et réécrire cette équation $(1+y) - (1+x)y' = 0$

↳ conditions initiales, on n'en occupe à la fin!

$$(1+y)dx - (1+x)dy = 0$$

$$\frac{dx}{1+x} = \frac{dy}{1+y}$$

↳ Séparation (équation à variables séparables)

En intégrant, on obtient

$$\ln |1+x| + C = \ln |1+y|$$

avec $C \in \mathbb{R}$.

A partir de $\ln|1+x|+C=\ln|1+y|$,
on fait en sorte de retrouver
 y en fonction de x :

$$|1+x|e^{\underline{C}} = |1+y|$$

$$1+y = \pm(1+x)e^C$$

$$y = \pm(1+x)e^C - 1$$

$$\begin{aligned} e^{\ln|1+x|+C} \\ &= e^{\ln|1+x|} \cdot e^C \\ &= |1+x| \cdot e^C \end{aligned}$$

Étape "sécurité":

Vérifions que $y(x) = \pm(1+x)e^c - 1$
sont bien des solutions à l'équation

$$(1+y) - (1+x)y' = 0.$$

On a $y'(x) = \pm e^c$.

$$\cancel{1 \pm (1+x)e^c - 1} \mp e^c(1+x) \stackrel{?}{=} 0$$

oui!

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 2.$$

$$y(x) = \pm e^C(1+x) - 1$$

les solutions avec un - sont à rejeter

On souhaite avoir $y(1) = 2$.
Quelle doit être la valeur de C ?

$$2 = \pm 2e^C - 1 \Leftrightarrow e^C = \pm \frac{3}{2}$$

impossible ($e^C > 0$)

On a uniquement la solution
 $y(x) = \frac{3}{2}(1+x) - 1 \quad (C = \ln \frac{3}{2})$.

18.39. Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes :

c) $y'' - 2y' - 3y = 2x + 1;$

second ordre

pas 0 : non homogène

Etape 1 : Solution générale à l'équation homogène associée

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

polynôme caractéristique

Etape 2 : Solution particulière (une solution, n'importe laquelle)

Etape 3 : Sommer les résultats de ① et ②

Etape 4 : Prendre en compte les conditions initiales

Quand l'équation est déjà homogène, on ignore les étapes 2 et 3

Quand il n'y a pas de conditions initiales, on ignore l'étape 4.

Astuce dans la recherche d'une solution particulière y_{SPEL} à une équation $ay'' + by' + cy = f$:

Polynômes Si f est un polynôme de degré n , on cherche y_{SPEL} sous la forme d'un polynôme de degré :

- * n si $c \neq 0$
- * $n+1$ si $c = 0, b \neq 0$
- * $n+2$ si $c = 0, b = 0, a \neq 0$.

Exponentielles Si f a la forme $f(x) = A \exp(kx)$, pour des constantes A et k , alors on essaye y_{SPEL} de la forme :

- * $\beta \exp(kx)$, si $ak^2 + bk + c \neq 0$ (c'est-à-dire k n'est pas racine du polynôme caractéristique),
- * $\beta x \exp(kx)$, si k est racine simple du polynôme $a\lambda^2 + b\lambda + c$,
- * $\beta x^2 \exp(kx)$, si k est racine double du polynôme $a\lambda^2 + b\lambda + c$.

Rappel résolution de $ay'' + by' + cy = 0$

À une telle équation on associe son *polynôme caractéristique* : $a\lambda^2 + b\lambda + c$. Selon le nombre de racines de ce polynôme, la solution prendra une forme différente.

polynôme
caractéristique

Résultat XVIII.2. Les solutions de l'ÉLHA sont :

Cas 1 Si $b^2 - 4ac > 0$, on note $\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ les deux racines du polynôme caractéristique. La solution générale de l'équation homogène (SGEH) est alors :

$$y_{\text{SGEH}}(x) = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration.

Cas 2 Si $b^2 - 4ac = 0$, on note $\lambda = \frac{-b}{2a}$. La solution générale de l'équation homogène (SGEH) est alors :

$$y_{\text{SGEH}}(x) = (C_1 + C_2 x) \exp(\lambda x)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration.

Cas 3 Si $b^2 - 4ac < 0$, on note $\rho = \frac{-b}{2a}$ et $\omega = \frac{1}{2a} \sqrt{4ac - b^2}$. La solution générale de l'équation homogène (SGEH) est alors :

$$y_{\text{SGEH}}(x) = (C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)) \exp(\rho x)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration.

→ cas où on a deux racines complexes (conjuguées)
 $\lambda_1 = \rho + i\omega, \lambda_2 = \rho - i\omega$ (avec $\rho, \omega \in \mathbb{R}$)

$$c) y'' - 2y' - 3y = 2x + 1;$$

① Considérons l'équation homogène associée $y'' - 2y' - 3y = 0$

Son équation caractéristique est $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

On la résout :

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 3$$

Solution générale: $y_{\text{SG-HA}}(x) = Ae^{-1x} + Be^{3x}$
($A, B \in \mathbb{R}$)

Solution Générale Homogène Associée

② Recherchons une solution particulière
a' $y'' - 2y' - 3y = 2x + 1$

On cherche une solution similaire
au terme indépendant donc un
polynôme du premier degré :
 $y = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

$$y_{\text{SPEL}}(x) = ax + b, \quad y'_{\text{SPEL}}(x) = a, \quad y''_{\text{SPEL}}(x) = 0$$

↳ Solution Particulière Équation Linéaire

$$0 - 2 \cdot a - 3 \cdot (ax + b) = 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow -3ax - 2a - 3b = 2x + 1$$

$$\begin{cases} -3a = 2 \\ -2a - 3b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ 3b = -2a - 1 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{9} \end{cases}$$

Notre solution particulière sera

$$y_{\text{SPEL}}(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$$

③ Les solutions à l'équation sont de la forme :

$$y_{\text{SG}}(x) = A e^{-x} + B e^{3x} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$$

$(A, B \in \mathbb{R})$

Il y a réellement une infinité de solutions (même si on parle souvent de "la solution générale à l'équation homogène associée"), à chaque nouvelle paire de valeurs pour A et B , on a une nouvelle fonction y .

④

$$d) y'' + 9y = 9e^{3x};$$

$$① \quad y'' + 9y = 0$$

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

pas de y' dans l'homogène associée,
pas de x dans l'équation
caractéristique.

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = -9 \Leftrightarrow \lambda = \pm 3i \in \mathbb{C}$$

$$y_{\text{SGH A}}(x) = A e^{0x} \cos(3x) + B e^{0x} \sin(3x)$$

$$② \quad y_{\text{SPEL}} = a e^{3x}, (y'_{\text{SPEL}} = 3a e^{3x}), y''_{\text{SPEL}} = 9a e^{3x}$$

$$ga e^{3x} + g. ae^{3x} = ge^{3x}$$

$$\Leftrightarrow 18ae^{3x} = ge^{3x}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$y_{p_{EL}}(x) = \frac{1}{2}e^{3x}$$

③ Les solutions sont de la forme

$$y_{sg}(x) = A \cos(3x) + B \sin(3x) + \frac{1}{2}e^{3x}$$

~~④~~

$$j) y'' - 5y' + 6y = -3 \sin x;$$

(uniquement ^{trigo} solution particulière)
c'est l'étape 2

$$y_{\text{spéc}}(x) = a \cos x + b \sin x$$

$$y'_{\text{spéc}}(x) = -a \sin x + b \cos x$$

$$y''_{\text{spéc}}(x) = -a \cos x - b \sin x$$

$$-a \cos x - b \sin x - 5(-a \sin x + b \cos x) + 6(a \cos x + b \sin x) = -3 \sin x$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(-a - 5b + 6a)}_{\substack{\nearrow 5a - 5b \\ \searrow 0}} \cos x + \underbrace{(-b + 5a + 6b)}_{\nearrow 5a + 5b} \sin x = -3 \sin x$$

$$\begin{cases} 5a - 5b = 0 & (1) \\ 5a + 5b = -3 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a = -3 & (1) + (2) \\ 10b = -3 & (2) - (1) \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} a = -\frac{3}{10} \\ b = -\frac{3}{10} \end{cases}$$

$$y_{\text{sp}_{\text{EL}}}(\chi) = -\frac{3}{10} \cos \chi - \frac{3}{10} \sin \chi$$

18.40. Déterminer la solution particulière des équations différentielles suivantes répondant aux conditions initiales indiquées :

b) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + x^2,$

$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad y'_0 = 0;$

→ Étape 4.

$$b) y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + x^2,$$

$$① y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2$$

$$y_{\text{SGHA}}(x) = (A + Bx) e^{2x} \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

$$② y_{\text{SPEL}}(x) = ax^2 e^{2x} + bx^2 + cx + d$$

parce que 2 est une
racine double de
l'équation caractéristique
(voir critère en fin de PDF)

polynôme du
second degré.

$$y_{\text{SPEL}} = ax^2e^{2x} + bx^4 + cx + d$$

$$y'_{\text{SPEL}} = 2axe^{2x} + 2ax^2e^{2x} + 2bx + c$$

$$y''_{\text{SPEL}} = 2ae^{2x} + 4axe^{2x} + 4axe^{2x} + 4ax^2e^{2x} + 2b$$

$$= 2ae^{2x} + 8axe^{2x} + 4ax^2e^{2x} + 2b$$

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + x^2$$

$$2ae^{2x} + 8axe^{2x} + 4ax^2e^{2x} + 2b$$

$$- 4(2axe^{2x} + 2ax^2e^{2x} + 2bx + c)$$

$$+ 4(ax^2e^{2x} + bx^4 + cx + d) = e^{2x} + x^2$$

$$\Leftrightarrow 0x^2e^{2x} + 0xe^{2x} + 2ae^{2x} + 4bx^4 + (4c - 8b)x$$

$$+ 2b - 4c + 4d = e^{2x} + x^2$$

$$\Leftrightarrow 2ae^{2x} + 4bx^4 + (4c - 8b)x + 2b - 4c + 4d = e^{2x} + x^2$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 4b = 1 \\ 4c - 8b = 0 \\ 2b - 4c + 4d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{4} \\ c = 2b = \frac{1}{2} \\ d = c - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \end{cases}$$

$$y_{\text{SPÉL}}(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} + \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} x$$

③ Hors conditions initiales, les solutions sont de la forme

$$y_{\text{SG}}(x) = (A + Bx) e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x} + \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} x + \frac{1}{4}$$

(4) $x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad y'_0 = 0;$

$$y_{sg}(x) = (A + Bx)e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x} + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x$$

$$y'_{sg}(x) = Be^{2x} + 2(A + Bx)e^{2x} + xe^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

On veut avoir $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$

$$\begin{cases} 0 = A \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = B + 2A + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

L'unique solution qui satisfait
les conditions initiales est

$$y(x) = -\frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x} + \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x$$

18.45. Soit l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + my = 12x^2 e^{-x}.$$

a) Déterminer la constante réelle m de manière que $y = x^4 e^{-x}$ soit une solution particulière de cette équation.

$$\begin{aligned} y_{\text{SPEL}} &= x^4 e^{-x} \\ y'_{\text{SPEL}} &= 4x^3 e^{-x} - x^4 e^{-x} \\ y''_{\text{SPEL}} &= 12x^2 e^{-x} - 4x^3 e^{-x} - 4x^3 e^{-x} + x^4 e^{-x} \\ &= 12x^2 e^{-x} - 8x^3 e^{-x} + x^4 e^{-x} \end{aligned}$$

$$y'' + 2y' + my = 12x^2e^{-x}$$

$$y_{\text{sp\acute{e}l}}'' = 12x^2e^{-x} - 8x^3e^{-x} + x^4e^{-x}$$

$$y_{\text{sp\acute{e}l}}' = 4x^3e^{-x} - x^4e^{-x}$$

$$y_{\text{sp\acute{e}l}} = x^4e^{-x}$$

$$\cancel{12x^2e^{-x}} - \cancel{8x^3e^{-x}} + \cancel{x^4e^{-x}} + \underline{2(4x^3e^{-x} - x^4e^{-x})} + \underline{mx^4e^{-x}} = \cancel{12x^2e^{-x}} \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 + (m-1)x^4 = 12x^2 \quad \forall x$$

On doit avoir $m=1$.

b) Déterminer ensuite,
pour cette valeur de m ,
la solution générale.

$$y'' + 2y' + \overset{=m}{1}y = 12x^2e^{-x}$$

C'est une équation du second ordre, on la résout en 3 étapes.

① Equation homogène associée :

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Equation caractéristique :

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

$$y_{\text{SGHA}}(x) = (A+Bx)e^{-1x} = (A+Bx)e^{-x}$$

$(A, B \in \mathbb{R})$

② Solution particulière:

$$y_{\text{SPEL}}(x) = x^4 e^{-x}$$

Cette solution est fournie par le point
(a)!

③ Les solutions sont de la forme

$$\begin{aligned} y_{\text{SG}}(x) &= y_{\text{SGHA}}(x) + y_{\text{SPEL}}(x) \\ &= \underline{(A+Bx)} e^{-x} + x^4 e^{-x} \quad (A, B \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

c) Quelle est la solution particulière
qui passe par les points $(0, 0)$ et $(1, 1)$?
(c'est l'étape 4)

$$y_{\text{sp}}(x) = (A + Bx)e^{-x} + x^4 e^{-x}$$

On souhaite avoir $y(0) = 0$ et $y(1) = 1$

$$\begin{cases} 0 (= y(0)) = A \\ 1 (= y(1)) = \frac{A+B}{e} + \frac{1}{e} \end{cases}$$

$$(=) \begin{cases} A = 0 \\ B = e - 1 \end{cases}$$

L'unique solution qui satisfait les conditions est

$$y(x) = (e-1)xe^{-x} + x^4e^{-x}$$