

Exercices tutorat PHYS-H101 03/03/2026- Cinématique

1. **MRUA** : Un train a une longueur de 44 m. Le train se trouve initialement au repos avec son avant à 100 m d'un poteau. Ensuite, il accélère avec une accélération constante de $0,5 \text{ m/s}^2$.

- Quel intervalle de temps s'écoule entre le passage de l'avant et de l'arrière du train devant le poteau ?
- À quelles vitesses l'avant et l'arrière du train passent-ils devant le poteau ?

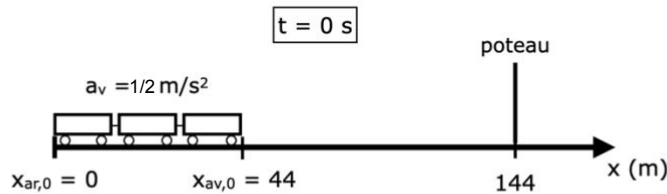


Fig. 1

- a) La figure 1 montre les données du problème et l'axe choisi pour le résoudre. Pour trouver l'intervalle de temps demandé, il faut relier la position du train (avant et arrière) avec le temps. On commence par écrire les équations du mouvement de l'avant et de l'arrière du train. La position de l'arrière du train en fonction du temps $x_{ar}(t)$ est :

$$x_{ar}(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_{ar,0}t + x_{ar,0} = \frac{1}{2}at^2.$$

où $x_{ar,0} = 0 \text{ m}$ est la position de l'arrière du train à $t = 0 \text{ s}$ (voir figure 1) et $v_{ar,0} = 0 \text{ m/s}$ la vitesse de l'arrière du train à $t = 0 \text{ s}$. De même, la position de l'avant du train en fonction du temps $x_{av}(t)$ est

$$x_{av}(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_{av,0}t + x_{av,0} = \frac{1}{2}at^2 + x_{av,0}$$

où $x_{av,0} = 44 \text{ m}$ est la position de l'avant du train à $t = 0 \text{ s}$ (voir figure 1) et $v_{av,0} = 0 \text{ m/s}$ la vitesse de l'avant du train à $t = 0 \text{ s}$. En utilisant les deux équations précédentes, on peut exprimer les temps t_{ar} et t_{av} au bout desquels l'arrière et l'avant du train atteignent le poteau

$$t_{ar} = \sqrt{\frac{2x_{ar}(t_{ar})}{a}} \quad \text{et} \quad t_{av} = \sqrt{\frac{2(x_{av}(t_{av}) - x_{ar,0})}{a}}.$$

La grandeur $x_{ar}(t_{ar}) = 144 \text{ m}$ est la position de l'arrière du train lorsqu'il atteint le poteau. De même, $x_{av}(t_{av}) = 144 \text{ m}$. L'intervalle de temps qui s'écoule entre le passage de l'avant et de l'arrière du train devant le poteau est donc

$$\Delta t = t_{ar} - t_{av} = \sqrt{\frac{2 \times 144}{0.5}} - \sqrt{\frac{2 \times (144 - 44)}{0.5}} = 24 - 20 = 4 \text{ s}.$$

- b) Les vitesses de l'avant et de l'arrière du train en fonction du temps sont $v_{av}(t) = at$ et $v_{ar}(t) = at$. À $t = t_{av}$, nous avons $v_{av}(t_{av}) = at_{av} = 0.5 \times 20 = 10 \text{ m/s}$. De même, à $t = t_{ar}$, nous avons $v_{ar}(t_{ar}) = at_{ar} = 0.5 \times 24 = 12 \text{ m/s}$.

2. La position d'une particule est donnée par

$$x(t) = 5 \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right),$$

où x est en mètres, t en secondes et l'argument de la fonction sinus en radians.

- a) Quelle est la vitesse moyenne entre 0,5 et 0,6 s ?
- b) Quelle est la vitesse instantanée en $t = 0,5$ s ?
- c) Quelle est l'accélération moyenne entre 0,5 et 0,6 s ?
- d) Quelle est l'accélération instantanée en $t = 0,5$ s ?

a) La vitesse moyenne v_m entre 0,5 et 0,6 s s'exprime

$$v_m = \frac{x(t = 0,6 \text{ s}) - x(t = 0,5 \text{ s})}{0,6 - 0,5}.$$

En utilisant l'expression de la position de la particule aux temps $t = 0,6$ s et $t = 0,5$ s, on trouve $v_m = 4,3$ m/s.

b) Pour obtenir la vitesse instantanée, il faut dériver la position en fonction du temps :

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x} = \frac{10\pi}{3} \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right).$$

En utilisant l'expression précédente, on trouve qu'à $t = 0,5$ s, $v(t = 0,5 \text{ s}) = 5,2$ m/s.

c) L'accélération moyenne a_m entre 0,5 et 0,6 s s'exprime

$$a_m = \frac{v(t = 0,6 \text{ s}) - v(t = 0,5 \text{ s})}{0,6 - 0,5}.$$

En utilisant l'expression de la vitesse instantanée aux temps $t = 0,6$ s et $t = 0,5$ s, on trouve $a_m = -20$ m/s².

d) Pour obtenir l'accélération instantanée, il faut dériver la vitesse en fonction du temps :

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \ddot{x} = -\frac{20\pi^2}{9} \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right).$$

En utilisant l'expression précédente, on trouve qu'à $t = 0,5$ s, $a(t = 0,5 \text{ s}) = -19$ m/s².

3. **MCU** : Un satellite géostationnaire fait le tour de la Terre en 24 heures. Ainsi il paraît immobile dans le ciel et constitue un élément précieux pour les télécommunications. Si un tel satellite est en orbite autour de la Terre à une altitude de 35 800 km au-dessus de la surface terrestre, quelle est son accélération, sachant que le rayon de la Terre est de $6,37 \times 10^6$ m ?

Le satellite effectue un mouvement circulaire uniforme (MCU) autour du centre de la Terre. La norme de son accélération est donc liée à sa vitesse (angulaire ou radiale) et au rayon du MCU.

En ce qui concerne le rayon de la trajectoire du satellite, il faut additionner le rayon de la Terre et la hauteur du satellite pour l'obtenir : $R = r_T + h = (35,8 + 6,37) 10^6$ m (attention à la conversion en unités du SI).

Ensuite, en ce qui concerne sa vitesse, par soucis de simplicité nous allons calculer sa vitesse radiale. Le satellite parcourt 360° ou 2π radians en une période T de 24h ($T = 86\,400$ s). Sa vitesse angulaire est donc de $\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ s}^{-1}$.

Maintenant que tout est bien défini et dans les bonnes unités, nous pouvons utiliser la formule de l'accélération normale (étant donné que le satellite n'éprouve pas, dans ce cas-ci, d'accélération tangentielle car sa vitesse angulaire est constante).

$$a_n = R\omega^2 = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = 0,223 \text{ m/s}^2$$

4. L'accélération d'une particule initialement à l'origine et immobile est décrite par $a = Bt^{0,5}$, où B est une constante.

a) Quelle valeur doit prendre B pour que la particule franchisse 100 m en 10 s (précisez l'unité) ?

b) Quelle vitesse aura la particule à cet instant ?

Nous connaissons l'accélération de la particule en fonction du temps ainsi que sa vitesse et sa position initiale. Pour obtenir sa position il nous faut d'abord intégrer l'accélération pour obtenir la vitesse et fixer la constante d'intégration afin de s'assurer que la vitesse initiale soit bien nulle (comme précisé dans l'énoncé). Cela est équivalent à prendre l'intégrale définie entre 0 et t . Ensuite, il faut intégrer encore la vitesse afin d'obtenir la position comme fonction du temps. De nouveau, la particule étant à l'origine au moment $t = 0$, fixer la constante d'intégration revient à prendre l'intégrale définie entre l'instant 0 et l'instant t .

Une fois ces deux intégrations effectuées, nous connaissons la position de la particule comme fonction du temps et du paramètre B . Ce qui nous permettra de répondre aux deux questions posées.

Premièrement :

$$v(t) = \int_0^t dt' a(t') = \int_0^t dt' B(t')^{0,5} = \left[B \frac{2}{3} t^{3/2} \right]_0^t = B \frac{2}{3} t^{1,5}.$$

Il est possible de vérifier un minimum la cohérence de ses calculs en vérifiant que $v(0) = 0$ comme il se doit. Deuxièmement :

$$x(t) = \int_0^t dt' v(t') = \left[B \frac{2}{3} \frac{2}{5} t^{5/2} \right]_0^t = B \frac{4}{15} t^{5/2}.$$

Il est possible de vérifier un minimum la cohérence de ses calculs en vérifiant que $v(0) = 0$ comme il se doit. Deuxièmement :

$$x(t) = \int_0^t dt' v(t') = \left[B \frac{2}{3} \frac{2}{5} t^{5/2} \right]_0^t = B \frac{4}{15} t^{5/2}.$$

En faisant attention à utiliser les unités du SI, on peut répondre à la question a) en imposant que $x(10 \text{ s}) = 100 \text{ m} = B \frac{4}{15} (10 \text{ s})^{5/2}$. En isolant B nous obtenons :

$$B = \frac{15}{4\sqrt{10}} \text{ m/s}^{5/2} \approx 1,19 \text{ m/s}^{5/2}.$$

On peut vérifier que B a les unités appropriées pour que la fonction nous donnant l'accélération et la vitesse ait les bonnes unités aussi, ce qui est toujours un outil utile pour vérifier ses réponses.

La réponse b) fonctionne sur le même principe. On calcule $v(10 \text{ s}) = B \frac{2}{3} (10 \text{ s})^{3/2} = 25 \text{ m/s}$.

5. Un objet est en mouvement vertical selon l'équation

$$y(t) = 10,0 - 0,50 g t^2,$$

où y est exprimé en mètres et t en secondes ; g est une constante de valeur numérique 9,81.

- Avec quelle unité s'exprime g sachant que le terme 0,50 est sans dimensions ?
- Où se trouve l'objet à l'instant $t = 0$ s ?
- À quel instant a-t-on $y = 0$ m ?
- Tracer v en fonction de t entre 0 et 2,00 s.
- Quelle est la pente de la courbe $v(t)$ à l'instant $t = 1,00$ s ?
- Préciser la forme de la courbe $y(t)$ et la signification de la pente.
 - Il faut utiliser l'analyse dimensionnelle pour trouver l'unité de g (cf. séance 1 par exemple). L'énoncé nous dit que y s'exprime en mètres et t en secondes, soit $[y] = L$ et $[t] = T$. On a donc $[g] = L T^{-2}$. La constante g s'exprime en m/s^2 .
 - À $t = 0$ s, nous avons $y(t = 0 \text{ s}) = 10,0$ m.
 - On cherche le temps t_1 tel que $y(t_1) = 0$ m. En utilisant l'équation de $y(t)$, nous avons donc $10,0 - 0,50 g t_1^2 = 0$ m, ce qui donne $t_1 = \sqrt{20/g} = 1,43$ s.
 - La vitesse en fonction du temps $v(t)$ s'obtient en dérivant la position en fonction du temps $y(t)$

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y} = -gt.$$

La figure 2 montre v en fonction de t entre 0 et 2,00 s.

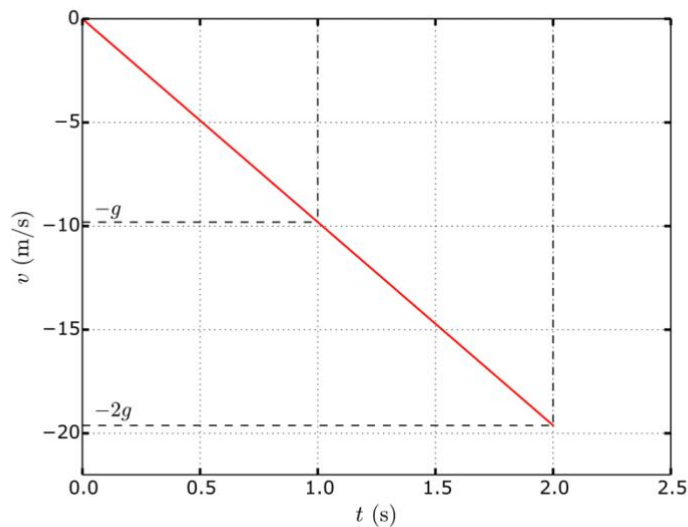


Fig. 2

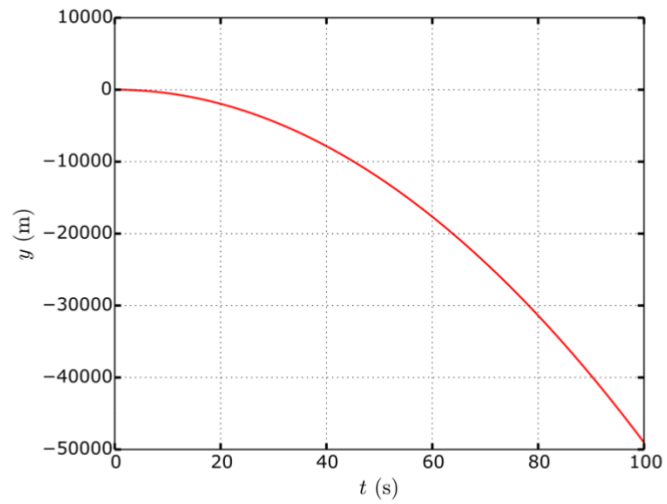


Fig. 3

- e) La pente de la courbe $v(t)$ à un instant donnée est égale à l'accélération instantanée. L'accélération instantanée s'obtient en dérivant la vitesse en fonction du temps. La dérivée de la vitesse en fonction du temps est $-g$ donc la pente de la courbe $v(t)$ à l'instant $t = 1,00\text{s}$ est $-g$.
- f) La courbe $y(t)$ est une parabole et sa pente à un point donné correspond à la vitesse instantanée de l'objet à ce point. Pour information, y en fonction de t est montré sur la figure 3 .

6. Un train de marchandises quitte Namur pour Bruxelles à 8h00 et roule avec une vitesse constante de 60,0 km/h. Un train de voyageurs quitte Bruxelles pour Namur à 8h15 et roule avec une vitesse constante de 120 km/h. Sachant que la distance entre les deux villes est de 60,0 km,

- À quelle heure se croiseront-ils ?
- À quelle distance de Namur se croiseront-ils ?

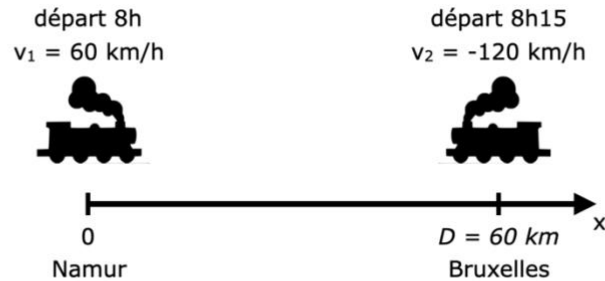


Fig. 7

- La figure 7 montre les données du problème et l'axe choisi pour le résoudre. Les trains se croiseront lorsque leurs positions seront égales. Dans un premier temps, il nous faut donc écrire les équations du mouvement des deux trains en notant qu'ils roulent à vitesse constante (accélération nulle).

(i) La position du train 1 (Namur - Bruxelles) en fonction du temps $x_1(t)$ est

$$x_1(t) = v_1 t + C_1.$$

La constante C_1 peut être déterminée en évaluant $x_1(t)$ à $t = t_1$, où t_1 est le temps de départ du train 1 (8h00). Nous avons $x(t_1) = v_1 t_1 + C_1 = 0$ m (car le train 1 est à $x = 0$ m à 8h00). On obtient $C_1 = -v_1 t_1$. Finalement :

$$x_1(t) = v_1(t - t_1).$$

(ii) La position du train 2 (Bruxelles - Namur) en fonction du temps $x_2(t)$ est

$$x_2(t) = v_2 t + C_2.$$

La constante C_2 peut être déterminée en évaluant $x_2(t)$ à $t = t_2$, où t_2 est le temps de départ du train 2 (8h15). En introduisant D la distance de Namur à Bruxelles, nous avons $x(t_2) = v_2 t_2 + C_2 = D$ (car le train 2 est à une distance D à 8h15). On obtient $C_2 = D - v_2 t_2$. Finalement :

$$x_2(t) = v_2(t - t_2) + D$$

Les trains se croisent à $t = t_c$, lorsque $x_1(t_c) = x_2(t_c)$. En utilisant les deux équations du mouvement, nous avons :

$$x_1(t_c) = x_2(t_c) \quad \Leftrightarrow \quad v_1(t_c - t_1) = v_2(t_c - t_2) + D.$$

Les trains se croisent à $t = t_c$, lorsque $x_1(t_c) = x_2(t_c)$. En utilisant les deux équations du mouvement, nous avons :

$$x_1(t_c) = x_2(t_c) \Leftrightarrow v_1(t_c - t_1) = v_2(t_c - t_2) + D.$$

En développant et en isolant t_c , on obtient

$$t_c = \frac{v_1 t_1 - v_2 t_2 + D}{v_1 - v_2} = \frac{60 \times 8 - (-120) \times 8,5 + 60}{60 - (-120)} = 8,5 \text{ h.}$$

Les trains se croiseront à 8h30. Notez qu'avec le repère choisi, $v_2 < 0$.

- b) Pour trouver cette distance, on peut évaluer la position du train 1 lors du croisement, à $t = t_c$. En reprenant l'équation du mouvement du train 1, nous avons

$$x_1(t_c) = v_1(t_c - t_1) = 60 \times (8 - 8,5) = 30 \text{ km.}$$

Les trains se croiseront à 30 km de Namur.