

Exercices : préparation au test de novembre

Exercice 1. Soient $A, B \subset \mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$$

Exercice 2. Soient $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$. Supposons que

$$x_n \rightarrow l \quad \text{et} \quad y_n \rightarrow m \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty$$

et que de plus $x_n \leq y_n$ pour tout n .

1. Montrer que $l \leq m$.
2. Si $x_n < y_n$ pour tout n , est-il vrai que $l < m$?

Exercice 3. Soient $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$. Supposons que

$$x_n \rightarrow l \quad \text{et} \quad y_n \rightarrow m \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty$$

et que $l < m$.

1. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$x_n < y_n \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

2. Donner un exemple de suites $(x_n), (y_n)$ satisfaisant ces hypothèses mais pour lesquelles le premier N qui satisfait la conclusion est $N = 10^{10}$.

Exercice 4. Soient (x_n) et (y_n) deux suites bornées.

- (a) Donnez un exemple où

$$\limsup(x_n y_n) > \limsup x_n \cdot \limsup y_n.$$

- (b) Trouvez une condition suffisante pour que

$$\limsup(x_n y_n) \leq \limsup x_n \cdot \limsup y_n.$$

- (c) Donnez un exemple où cette dernière inégalité est stricte.

- (d) Démontrez que si $x_n, y_n \geq 0$ pour tout n , alors dès que l'une des deux suites converge, on a égalité :

$$\limsup(x_n y_n) = \limsup x_n \cdot \limsup y_n.$$