

Révisions : TP 6

Exercice 1. Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ une série de puissances, où $z_0, z \in \mathbb{C}$ et $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathbb{C}$.

1. Expliquer de manière rigoureuse les termes *rayon de convergence* et *disque de convergence*.
2. Deux formules permettent de calculer le rayon de convergence à partir de la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Veuillez les énoncer toutes les deux et en prouver une des deux, au choix.
3. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries de puissances suivantes :

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{7}{3}\right)^k z^k.$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\ln(k) + 7^k}{3k^5 + 3^k}\right) (i - z)^k.$

Exercice 2. Dire si l'énoncé est vrai ou faux. Dans le premier cas, écrire une démonstration ; dans le second, donner un contre-exemple et démontrer qu'il s'agit d'un contre-exemple. Vous pouvez utiliser tous les résultats du cours, à condition de les énoncer clairement et de vérifier que les hypothèses sont toutes satisfaites.

1. Le rayon de convergence de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!} (z - 2)^k$$

est infini.

Exercice 3. Déterminer et représenter dans le plan de Gauss le domaine de convergence des séries suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{\infty} z^k$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z + 1)^k}{k}$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!(z+i)^k}{k^k}$$

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^a (z-5+i)^k$$