

Révisions : TP 7

Fonctions continues

Exercice 1. Soit

$$f : (0, \infty) \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \cos\left(\frac{1}{x-1}\right), \{1\}$$

et considérons le sous-ensemble

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}.$$

Déterminer l'ensemble des points qui sont dans $\text{adh}(A)$ mais pas dans A . Justifier soigneusement.

Exercice 2. Soient $f, g, h : U \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \text{pour tout } x \in U.$$

Supposons que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell = \lim_{x \rightarrow a} h(x),$$

où $a \in \mathbb{R}$ est adhérent à U . Démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell.$$

Exercice 3. Soit la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ x^2 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Trouver les points où f est continue.

Exercice 4. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que si l'image de f est l'intervalle $[f(a), f(b)]$, alors f est continue. Trouver un exemple illustrant que l'hypothèse de croissance de la fonction est importante.

Exercice 5. Étant donné une fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telle que $f(0) = 0 = f(1)$, montrer que pour tout nombre $0 < d < 1$, il existe $x \in [0, 1]$ tel que

$$f(x+d) = f(x).$$