

## Révisions : TP 9

### Fonctions dérivables

**Exercice 1.** Supposons que  $f : [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$  est une fonction continue. Posons

$$F(s) = \int_0^s f(t) dt$$

pour tout  $s \in [0, 1]$ . Montrer qu'il existe  $m > 0$  tel que

$$F(s) \geq ms \quad \text{pour tout } s \in [0, 1].$$

**Exercice 2.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable et posons

$$M = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

On suppose que  $f$  est bornée et que

$$\sup_{x \in [a, b]} f'(x) = M,$$

c'est-à-dire que la valeur maximale de la dérivée de  $f$  coïncide avec son taux de variation moyen sur  $[a, b]$ . Soit  $g$  la fonction affine définie par

$$g(x) = M(x - a) + f(a),$$

qui coïncide avec  $f$  en  $a$  et en  $b$ . Montrer que  $f = g$  sur  $[a, b]$ .

*Coup de pouce : poser  $h = f - g$  et montrer que  $h$  est la fonction nulle.*

**Exercice 3.** Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continues sur  $[a, b]$  et dérivables sur  $(a, b)$ . On suppose de plus que  $g'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in (a, b)$ .

(a) Démontrer que  $g(a) \neq g(b)$ .

(b) Démontrer qu'il existe  $c \in (a, b)$  tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

(Ce résultat s'appelle le théorème de la valeur moyenne comparative.)

*Conseil : considérer la fonction  $h(x) = f(x) - \lambda g(x)$ , où  $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ .*

**Exercice 4.** Montrer que pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ , on a

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|.$$