

## Révisions : TP 10

### Fonctions dérivables

**Exercice 1. Propriétés des fonctions sin et cos en partant des définitions en termes de séries de puissances.**

1. En partant des définitions en termes de séries de puissances, vérifiez que  $\sin' = \cos$  et  $\cos' = -\sin$ .
2. En prenant la dérivée de l'expression ci-dessous, démontrez que pour tout  $x$ ,

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

**Exercice 2.** Soit  $f : E = \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

1. Énoncer le théorème de Taylor.
2. Déterminer le développement de Taylor d'ordre  $k$  de  $\sin(x)$  autour de  $a = 0$ .
3. Appliquer le théorème de Taylor à  $\sin(x)$  avec  $k = 1$  pour déduire que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existe et pour déterminer sa valeur.
4. On note  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in E, \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x), & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que cette fonction est dérivable en  $a = 0$  et que  $\tilde{f}'(0) = 0$  (ici le théorème de Taylor avec  $k = 2$  vous sera utile).

5. La fonction  $\tilde{f}' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est-elle continue en  $a = 0$  ? Justifier.

**Exercice 3.** Considérons la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} \right),$$

où  $a, b$  sont des nombres réels. Le but de cette question est de déterminer pour quelles valeurs des réels  $a, b$  cette série converge.

1. Énoncer le théorème de Taylor.
2. Écrire le développement de Taylor d'ordre  $k$  de  $f(x) = e^x$  en 0. Que dit le théorème de Taylor au sujet des restes correspondants d'ordre 1 et 2 ?
3. Donner une expression pour

$$e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n}$$

faisant intervenir notamment le reste du développement de Taylor de  $f$  à l'ordre 1 au point  $x = \frac{1}{n}$ .

4. Énoncer le critère d'équivalence pour la convergence des séries.
5. Démontrer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n} \right)$$

converge si et seulement si  $a = 1 = b$ .