

Révisions : TP 11

Fonctions intégrables

Exercice 1. En faisant la substitution $x = 2 \arctan(t)$, démontrer que

$$\int \frac{1}{5 + 3 \cos(x)} dx = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{2} \tan\left(\frac{1}{2}x\right)\right).$$

Conseil : démontrer que si $x = 2 \arctan(t)$, alors

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Exercice 2. Posons, pour $m, n \in \mathbb{N}$,

$$I_{m,n} = \int_0^\pi \cos^n(x) \cos(mx) dx.$$

Cet exercice a pour but de montrer que $I_{m,n} = 0$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m > n$.

1. Expliquer pourquoi l'intégrale $I_{m,n}$ est bien définie.
2. Montrer dans un premier temps que

$$\cos(\theta) \cos(\varphi) = \frac{1}{2} (\cos(\theta + \varphi) + \cos(\theta - \varphi)),$$

pour tout $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$.

3. Procéder par récurrence sur n pour montrer que $I_{m,n} = 0$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m > n$:

- (a) Montrez que $I_{m,0} = 0$ pour tout $m > 0$.
- (b) Montrer, au moyen du point 2., que si $I_{m,n} = 0$ pour tout $m > n$, alors $I_{m,n+1} = 0$ pour tout $m > n + 1$.

Exercice 3.

1. Énoncer et démontrer le théorème fondamental de l'analyse première version.

2. Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : I \rightarrow (a, b)$ une fonction dérivable, définie sur un intervalle ouvert I . On définit la fonction

$$G : I \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^{g(x)} f(t) dt.$$

Calculer $G'(x)$ pour $x \in I$.

3. Montrer que la quantité

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_x^1 \frac{1}{1+t^2} dt$$

est indépendante de $x \in (0, \infty)$.