

Question 2

/20

NOM et PRÉNOM :

MATRICULE :

Soit ϕ l'unique solution positive de l'équation

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Ce nombre, appelé *nombre d'or*, est donc tel que

$$\phi = \sqrt{\phi + 1}.$$

1. (2 pts) Expliquer pourquoi

$$1 < \phi < 2.$$

2. (4 pts) Montrer que toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ croissante et bornée converge.

3. (2 pts) On considère la suite

$$x_1 = \sqrt{1}, \quad x_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1}}, \quad x_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}, \quad \dots, \quad x_n = \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}, \dots$$

Donner, pour tout $n \geq 1$, une expression pour x_{n+1} en fonction de x_n , c'est-à-dire trouver une fonction f telle que $x_{n+1} = f(x_n)$.

4. (4 pts) Montrer que $1 \leq x_n \leq \phi$ pour tout $n \geq 1$.
5. (4 pts) Montrer par récurrence que la suite (x_n) est croissante. Indication : la fonction f est croissante.
6. (4 pts) En déduire que la suite (x_n) converge et montrer que sa limite vaut ϕ .