

Révisions : les suites

Exercice 1.

Montrer que toute suite bornée admet une sous-suite convergente en procédant comme suit.

Soit (x_n) une suite réelle bornée. Posons

$$A = \{ n \in \mathbb{N} ; x_n \geq x_m \ \forall m \geq n \}.$$

Autrement dit, $n \in A$ si et seulement si x_n est le maximum de l'ensemble $\{x_m ; m \geq n\}$.

- (a) Donner un exemple de suite pour laquelle $A = \emptyset$.
- (b) Donner un exemple de suite pour laquelle A est infini.
- (c) Si A est infini, construire une sous-suite décroissante (et bornée) et donc convergente.
- (d) Si A est fini, construire une sous-suite croissante (et bornée) et donc convergente.

Exercice 2.

- (a) Démontrer que pour tout $x \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

- (b) En déduire que pour tout $n \geq 2$,

$$n^{1/n} \leq 1 + \frac{2}{n-1}.$$

- (c) Démontrer que

$$n^{1/n} \longrightarrow 1 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

- (d) La suite $(n^{1-1/n})$ converge-t-elle ?