

Révisions : les séries

Exercice 1. Démontrez que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k}{(k+1)!}.$$

Rappelez-vous que

$$k! = 1 \cdot 2 \cdots (k-1) \cdot k,$$

et par convention $0! = 1$.

En déduire la n -ième somme partielle de

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$$

et démontrez que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = 1.$$

Exercice 2. Démontrez que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$,

$$\frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right).$$

Démontrez que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$$

converge et trouvez sa valeur.

Exercice 3. La série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k}$$

converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa somme et la convergence est-elle absolue ?