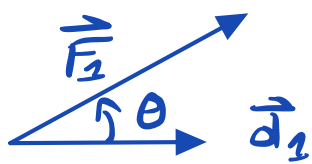


Travail & Énergie

Soit $\vec{F}$ une force sur un objet. Nous avons appris à déduire de cela l'accélération de l'objet via le Principe Fondamental de la Dynamique ($\sum_i \vec{F}_{i, \text{ext}} = m\vec{a}$). Essayons de tirer d'autres informations de cette quantité.

Soit R un référentiel tq l'origine correspond au début de l'application de $\vec{F}$.

Supposons que $\vec{F}_1$ soit constante pendant une longueur $\vec{d}_1$.



On introduit alors la quantité

$$W_1 \hat{=} \vec{F}_1 \cdot \vec{d}_1 = F_1 d_1 \cos \theta$$

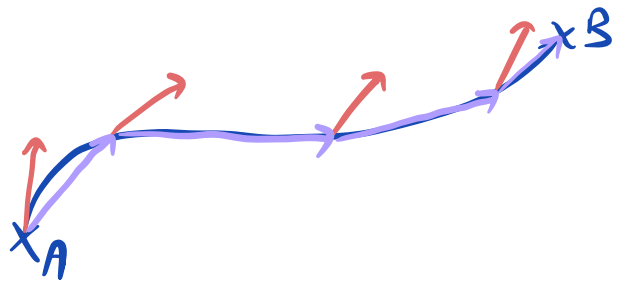
Il s'agit du travail de la force $\vec{F}_1$.

Note : $[W] = [F][d] = \text{ML}^2\text{T}^{-2} \hat{=} \text{Joules}$

Après $\vec{d}_1$, la force change (de sens, de direction ou d'intensité) et devient $\vec{F}_2$ pendant une longueur $\vec{d}_2$. Le travail total est alors $W = \vec{F}_1 \cdot \vec{d}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{d}_2$.

En généralisant pour n segments, le travail entre A et B devient

$$W_{AB} \approx \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{d}_i$$



En les limites $\vec{d}_i \rightarrow 0$ et $n \rightarrow +\infty$,

$$W_{AB} = \lim_{\substack{\Delta n_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow +\infty}} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{d}_i = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{n}$$

où $d\vec{n}$ est un élément infinitésimal de longueur.

Prop : $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{n} = \int \vec{F} \cdot \vec{v} dt$

$$\vec{F} \cdot d\vec{n} = \vec{F} \cdot \hat{e} dp = \vec{F} \cdot \hat{e} \frac{dp}{dt} dt = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

Rem : • $W > 0$ si la force possède une composante dans le sens du déplacement ; $W < 0$ si c'est
 ———— opposé.

Rem : $\vec{F} \perp d\vec{p} \Rightarrow W = 0$

Prop : Le travail de plusieurs forces correspond à la somme du travail de chaque force.

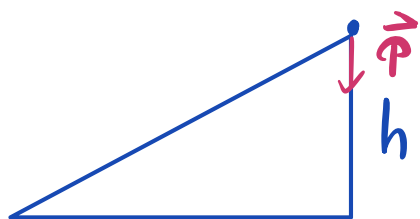
$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{p}$$

$$= \int \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{p}$$

$$= \sum_i \int \vec{F}_i \cdot d\vec{p} = \sum_i W_i$$

Exemple : Travail du poids



$$\vec{P} = -mg\hat{y}$$

$$d\vec{n} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$$

$$W = \int \vec{P} \cdot d\vec{n}$$

$$= \int -mg\hat{y} \cdot [dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}] = \int_h^0 -mg dy = mgh$$

Note : Observons que ce travail ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement de la différence en hauteur.

Exemple : $\vec{F}_n = -kx\hat{x}$



$$W_{if} = \int_i^f -kx dx = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)$$

A nouveau, le travail ne dépend pas du chemin !

Déf : Une force est dite conservative si son travail entre deux points ne dépend pas du chemin suivi.

Déf : $P = \frac{dW}{dt}$ Puissance

Prop : $P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{n}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ //

Passons maintenant à l'énergie. On établira ensuite le lien entre travail et énergie.

Thm (Énergie cinétique).

Soit un corps de masse m subissant une force $\vec{F}$ entre les deux points A et B. Le travail est

$$W_{AB} = \frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2) = E_{c,B} - E_{c,A}$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{n}$$

$$\stackrel{PFD}{=} m \int_A^B \vec{a} \cdot d\vec{n}$$

$$(\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt})$$

$$= m \int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{n}}{dt} dt$$

$$= m \int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt$$

$$\text{Or, } \frac{d|\vec{v}|^2}{dt} = \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$$

$$W_{AB} = \frac{m}{2} \int_A^B \frac{d|\vec{v}|^2}{dt} dt = \frac{m}{2} [v_B^2 - v_A^2] \quad \Downarrow$$

Le travail correspond à la variation d'une quantité

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad [K] = \text{ML}^2\text{T}^{-2} \stackrel{!}{=} \text{J} = [\text{W}] \quad \Downarrow$$

que l'on appelle énergie cinétique!

Si on lance une balle en l'air, elle monte jusqu'à atteindre un point maximal. Elle s'arrête puis redescend.

→ Son énergie cinétique diminue.

* Où va l'énergie cinétique "pendue" ?

→ Cela dépend des forces en jeu.

Pour quantifier cela, on note que le travail peut s'exprimer comme la contribution de deux termes

$$W = W_c + W_a$$

où W_c est le travail des forces conservatives ;

W_a  .

Les forces conservatives ne dépendant que des points initial et final, on peut lui associer une énergie ne dépendant que de la position : l'énergie potentielle. Ainsi, posons

$$W_c = U_i - U_f$$

Prop : En l'absence de forces non-conservatives, la quantité $E = K + U$ est conservée.

$$K_f - K_i = W_c = U_i - U_f \Rightarrow K_f + U_f = U_i + K_i$$

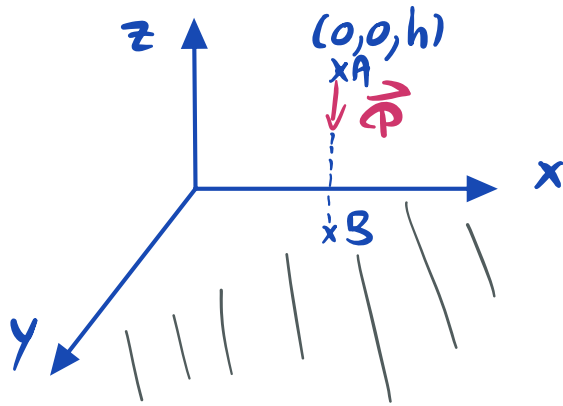
Aons, $\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -\frac{dU}{dt}$.

L'énergie n'est pas conservée si $\exists$ des forces r cons.

$$E = E_0 + W_a$$

Exemple : Énergie potentielle de la force de pesanteur.

Soit un objet de masse m au voisinage de la Terre ($h \ll R_T$).



$$\vec{P} = -mg\hat{z}$$

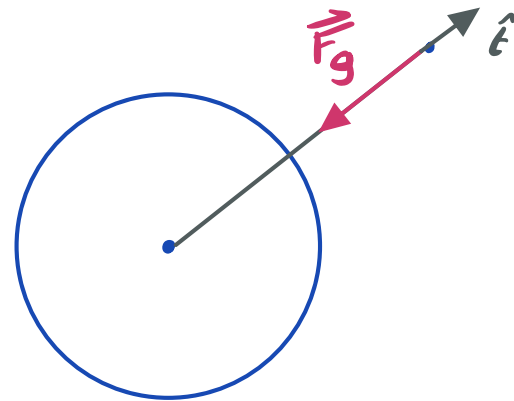
$$\begin{aligned} U_B - U_A &= - \int_A^B (-mg\hat{z}) \cdot d\vec{n} \\ &= + \int_h^0 mg dz = -mgh \end{aligned}$$

On définit le potentiel à 0 par $U(z=0) = U_B$.

$$\Rightarrow \boxed{U(h) = mgh}$$

Exemple : Énergie potentielle de la force grav.

On considère cette fois un objet à une altitude $h \approx R_T$.



$$\vec{F}_G = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{e}_r$$

$$\begin{aligned} U_B - U_A &= - \int_A^B \vec{F}_G \cdot d\vec{n} \\ &= G M m \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = G M m \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U_B - U_A = -G M m \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

On suppose que le potentiel généré par la Terre (objet M) est nul loin de celui-ci.

$$\lim_{r_A \rightarrow +\infty} U_A = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{U_{\text{grav}}(r) = -G \frac{Mm}{r}}$$

Exemple: Énergie potentielle d'une force de rappel

Note: $W_{if} = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)$

$$\rightarrow U_f - U_i = -W_{if} \rightarrow \boxed{U_{\text{ressort}} = \frac{1}{2}kx^2}$$

Vocabulaire: "Une force dérive d'un potentiel,"

Soit $F(x, y, z)$ une force conservative. Alors,

$$U(x_0, y_0, z) - U(x_0, y_0, z_0) = - \int_{z_0}^z F_z(x_0, y_0, z) dz$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial z} = -F_z$$

Cette relation se vérifiant pour chaque composante,

$$\vec{F}(x, y, z) = -\vec{\nabla} U$$

Où on introduit l'opérateur différentiel $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$.