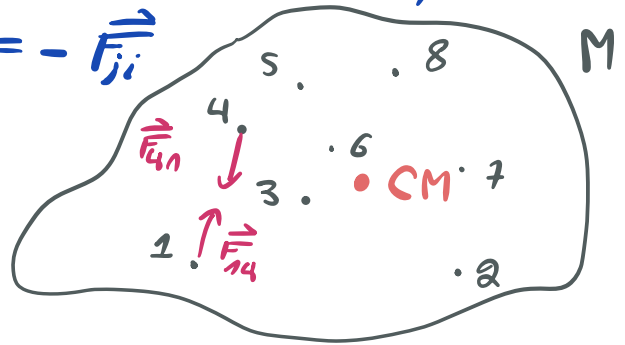


Pour chaque point $i = 1, \dots, n$ dans un système référentiel

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i \quad \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

Où $\vec{F}_i = \vec{F}_{i,ext} + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}$



Thm (CM)

Pour un système de points matériels, il existe un point particulier dont le mouvement est décrit par la 2nd loi de Newton

$$\begin{aligned} \bullet \sum_i \vec{F}_i &= \sum_i \vec{F}_{i,ext} + \sum_i \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} \\ &= \vec{F}_{ext} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{i \neq j} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \vec{F}_{ext} \end{aligned}$$

$$\bullet \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i m_i \frac{d^2 \vec{n}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_i m_i \vec{n}_i \right)$$

Note : On suppose $\frac{dm_i}{dt} = 0$.

$$\Rightarrow \sum_i m_i \vec{a}_i = M \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{M} \left(\sum_i m_i \vec{n}_i \right)$$

Où $M = \sum_i m_i$ masse totale

Ainsi, en posant

$$\vec{n}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i \frac{m_i \vec{n}_i}{M}$$

On obtient que

$$\sum_i \vec{F}_i = \boxed{\vec{F}_{ext} = M \frac{d^2 \vec{n}_{CM}}{dt^2}} = \sum_i m_i \vec{a}_i$$

Prop : $\vec{F}_{ext} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v}_{CM} = \text{cst}$

Calcul du CM d'un système

- Pour une répartition discrète de particules

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i \quad y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i \quad z_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i z_i$$

- Pour une répartition continue de particules

Répartition linéaire

$\lambda(x, y, z) \equiv \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta P} = \frac{dm}{dP}$ Masse linéique
de sorte que

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm = \frac{1}{M} \int \vec{r} \lambda dP$$

où $M = \int dm = \int \lambda(x, y, z) dP$

Répartition en surface

$\sigma(x, y, z) = \frac{dm}{dA}$ Masse surfacique
de sorte que

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_A \vec{r} dm = \frac{1}{M} \int_A \vec{r} \sigma(x, y, z) dA$$

où $M = \int_A dm = \int_A \sigma(x, y, z) dA$

Répartition en volume $\rho(x, y, z) = \frac{dm}{dV}$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} dm = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho dV$$