

QUESTION 1

1. (10 points) Démontrez : Pour tous vecteurs $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, on a

$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|.$$

Preuve

Pour tout nombre réel t , on calcule la quantité $\langle \vec{a} + t\vec{b}, \vec{a} + t\vec{b} \rangle$. Elle est positive par définition du produit scalaire. Nous pouvons la ré-écrire grâce à la bilinéarité sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle \vec{a} + t\vec{b}, \vec{a} + t\vec{b} \rangle &= \langle \vec{a}, \vec{a} + t\vec{b} \rangle + t \langle \vec{b}, \vec{a} + t\vec{b} \rangle \\ &= \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle t + t^2 \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \\ &= \|\vec{a}\|^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle t + t^2 \|\vec{b}\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

linéarité à gauche
linéarité à droite.

Mais cette expression est un polynôme du second degré. Si elle est positive pour toute valeur de t c'est que son discriminant est négatif:

$$(2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle)^2 - 4\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \leq 0$$

qui donne alors:

$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$$

qui est l'inégalité annoncée.

□

2. (2 points) Donnez un exemple de deux vecteurs $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, pour lesquels $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| < \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$.

$$\vec{a} = (1, 0, 0) \text{ et } \vec{b} = (0, 1, 0)$$

$$0 = |\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| < \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| = 1 \cdot 1 = 1$$

par exemple

3. (2 points) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

En utilisant la formule trigonométrique pour $\sin(a+b)$, on obtient $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = (\sin x)(\cos \frac{\pi}{4}) + (\cos x)(\sin \frac{\pi}{4}) = (\sin x)/\sqrt{2} + (\cos x)/\sqrt{2}$, ce qui montre le résultat.

4. (8 points) Soit la fonction

$$f(x) = e^x \sin(x).$$

Montrez par induction que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right),$$

où $f^{(n)}$ signifie la dérivée n -ième de f .
Vous pouvez utiliser le point 2.

• $n=1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x \sin(x))' \\ &= e^x \sin(x) + e^x \cos(x) \\ &= e^x (\sin(x) + \cos(x)) \\ &= 2^{\frac{1}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

par 2.

- Supposons que la formule soit vraie pour n et mq alors elle est vraie pour $n+1$.

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' \\ &= \left(2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) \right)' \\ &\quad (\text{par hyp d'induction}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2^{\frac{n}{2}} \left(e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) + e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) \right) \\ &= 2^{\frac{n}{2}} e^x \left(\sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) \right) \\ &= 2^{\frac{n}{2}} e^x \sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &\quad (\text{par le point 2 avec } x' = x + \frac{n\pi}{4}) \\ &= 2^{\frac{n+1}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Par récurrence, on a mq $f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$
 $\forall n \in \mathbb{N}_0$. □