

Question 2 :

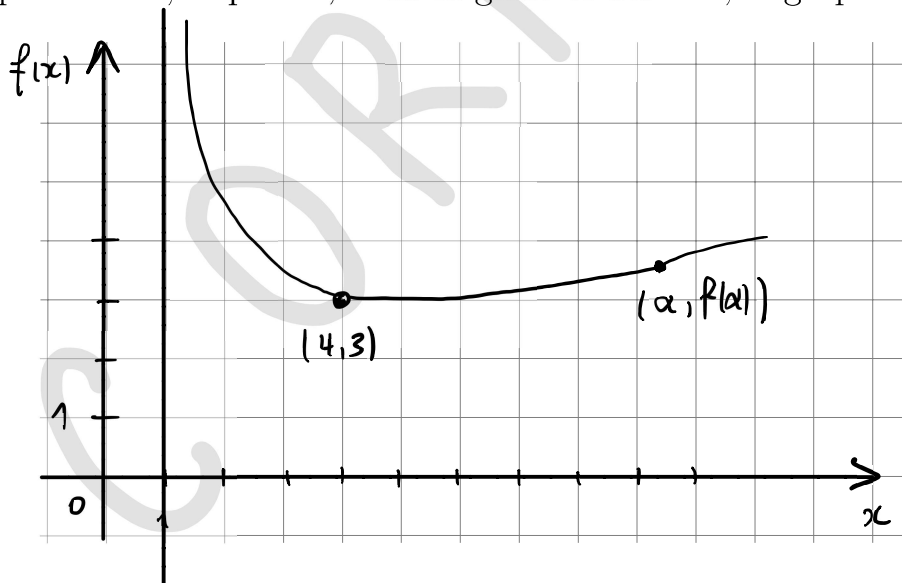
Considérer la fonction réelle donnée par $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x+7}{x-1}}$.

- (a) Déterminer le (plus grand) domaine de f .
- (b) , Montrer que $\frac{x^2+x+7}{x-1} = x + 2 + \frac{9}{x-1}$.
- (c) \ , La fonction f admet-elle des points critiques sur son domaine ? Si oui, trouver leurs coordonnées et les caractériser.
- (d) / Déterminer les asymptotes de f s'il en existe.
- (e) (\ , Voici le tableau de variation de f'' :

x	1	α
$f''(x)$	-	+

où $\alpha \approx 9,39$ et $f(\alpha) \approx 3,53$.

En utilisant ce tableau et les informations collectées aux points précédents, esquisser, dans la grille ci-dessous, le graphe de f .



Réponse question 4 :

(a) Le delta de x^2+x+7 est $1^2-4.7=-27<0$
 et son coefficient de tête est $1>0$ donc
 $x^2+x+7<0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Réponse question 4 (suite) :

		1	
$x-1$	-	0	+
x^2+x+7	+	+	+
$\frac{x^2+x+7}{x-1}$	-	1	+

$$\text{dom } f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+x+7}{x-1} \geq 0 \right\}$$

$$=]1, +\infty[$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad x+2 + \frac{9}{x-1} &= \frac{(x+2)(x-1) + 9}{x-1} \\ &= \frac{x^2+2x-x-2+9}{x-1} \\ &= \frac{x^2+x+7}{x-1} \end{aligned}$$

(c) Pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+x+7}{x-1}}} \cdot \left(\frac{x^2+x+7}{x-1} \right)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+x+7}{x-1}}} \cdot \left(x+2 + \frac{9}{x-1} \right)' \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+x+7}{x-1}}}}_{>0} \cdot \left(1 - \frac{9}{(x-1)^2} \right) \end{aligned}$$

On a $f'(x) = 0$ lorsque $\frac{9}{(x-1)^2} = 1$

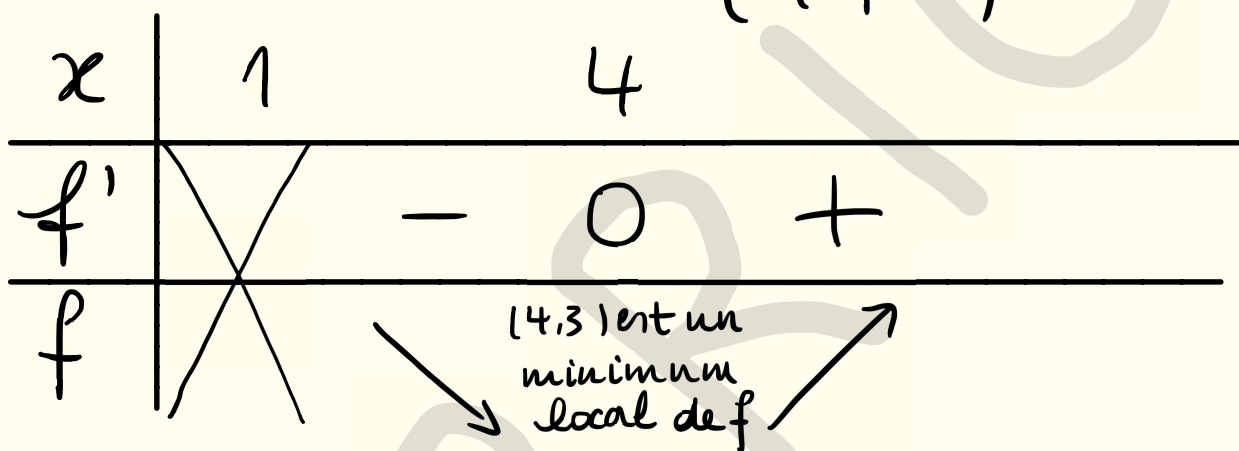
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x-1 = \pm 3$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{cases} -2 \\ 4 \end{cases}$$

Comme $-2 \notin \text{dom } f$, on a un unique point critique en $x = 4$.

Les coordonnées du point du
 graphe ayant cette abscisse
 sont $(4, f(4)) = (4, \sqrt{\frac{16+4+7}{4-1}})$
 $= (4, 3)$



(d) A asymptotes verticales ?

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+2 + \frac{9}{x-1}}$$

$\underbrace{\quad \quad \quad}_{\rightarrow 3} \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{\rightarrow +\infty}$

$$= +\infty$$

Asymptote verticale en $x=1$

Asymptotes horizontales?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\underbrace{x+2}_{+\infty} + \underbrace{\frac{9}{x-1}}_0} = +\infty$$

Pas d'asymptote horizontale

Asymptotes obliques?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2+\frac{9}{x-1}}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+2+\frac{9}{x-1}}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{9}{x^2(x-1)}} = 0$$

Pas d'asymptote oblique