

NOM :

Prénom :

Matricule :

Section :

QUESTION 3

- (5 points) Énoncez le théorème fondamental du calcul intégral.
- (2 points) Donnez un exemple de fonction f définie sur $[-1; 1]$ dont vous pouvez calculez l'intégrale $\int_{-1}^1 f(x) dx$ mais qui ne soit pas dérivable sur $] - 1; 1[$.
Justifiez!
- (9 points) Calculez l'intégrale indéfinie suivante :

$$\int \frac{x-1}{x^2-3x-4} dx.$$

- (9 points) L'intégrale suivante est-elle convergente ?

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(x) dx.$$

Si non, justifiez ! Si oui, calculez-là !

Réponse à la question 3

1.

Théorème (Théorème fondamental)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a un point de I .
Alors la fonction

$$F : I \rightarrow \mathbb{R} : \underline{x} \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en $x = a$.

- $f(x) = |x| : \int_{-1}^1 |x| dx = 1$
 f n'est pas dérivable en $x = 0$.

- On va utiliser la décomposition en fractions simples.

$$\text{Carre : } x^2 - 3x - 4 = (x+1) \cdot (x-4)$$

On décompose :

$$\frac{x-1}{x^2-3x-4} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2-3x-4} = \frac{A(x-4)+B(x+1)}{x^2-3x-4}$$

$$= (A+B)x - (4A-B)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 4A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5A=2 \Leftrightarrow A=\frac{2}{5} \\ \frac{8}{5}-B=1 \Leftrightarrow B=\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2-3x-4} = \frac{\frac{2}{5}}{x+1} + \frac{\frac{3}{5}}{x-4}$$

Donc $\int \frac{x-1}{x^2-3x-4} dx = \frac{2}{5} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{3}{5} \int \frac{1}{x-4} dx$

$$= \frac{2}{5} \ln |x+1| + \frac{3}{5} \ln |x-4|$$

+ C avec $C \in \mathbb{R}$.

$$4) \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(x) dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-x} \cos(x) dx.$$

Par partie :

$$\int_0^T \underbrace{e^{-x}}_p \underbrace{\cos(x)}_{q'} dx = \left[e^{-x} \sin(x) \right]_0^T + \int_0^T \underbrace{e^{-x}}_h \underbrace{\sin x}_{h'} dx$$

$$= \left[e^{-x} \sin(x) \right]_0^T - \left[e^{-x} \cos(x) \right]_0^T - \int_0^T e^{-x} \cos(x) dx$$

$$\text{Donc : } 2 \int_0^T e^{-x} \cos(x) dx = \left[e^{-x} (\sin(x) - \cos(x)) \right]_0^T$$

$$\int_0^T e^{-x} \cos(x) dx = \frac{1}{2} \left[e^{-T} (\sin(T) - \cos(T)) - e^{-0} (\sin(0) - \cos(0)) \right]$$

$$= \frac{1}{2} e^{-T} (\sin(T) - \cos(T))$$

$$+ \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(x) dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} e^{-T} (\sin(T) - \cos(T)) + \frac{1}{2}$$

$$\text{et } |e^{-T} (\sin(T) - \cos(T))| \leq 2e^{-T} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{On conclut que } \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(x) dx = \frac{1}{2}$$

converge.
