

NOM : Prénom : Matricule : Section :

Consignes :

- L'examen commence à 8h et dure jusqu'à 11h (temps de préparation et de ramassage des feuilles compris), si vous vous asseyez et recevez une feuille d'énoncés, vous devez rester assis jusqu'à 9h.
 - Il y a 2 parties : une partie avec des questions à choix multiples (QCM) et une partie avec des questions ouvertes.
 - Notez vos NOMS, PRÉNOMS, MATRICULE et SECTION sur toutes les pages.
 - Ne dégrafez pas les feuilles.
 - Aucun document autorisé, pas d'objet connecté, pas de calculatrice.
-

	Cadre réservé aux correcteurs
QCM:	
Question 1:	
Question 2:	
Question 3:	
Question 4:	

NOM :

Prénom :

Matricule :

Section :

Partie I : QCM — QA

Consignes :

- Cette partie contient uniquement des questions à choix multiples.
Elle vaut pour 4 points sur 20.
 - Aucun document autorisé, pas d'objet connecté, pas de calculatrice.
 - Pour vos brouillons, vous pouvez utiliser les feuilles de brouillon en fin de questionnaire et aussi les verso des feuilles de questions de type QCM.
 - Cochez, barrez ou entourez **clairement** la bonne réponse dans les cadres ci-dessous.
N'UTILISEZ PAS DE FLUO!
En cas de doute, le correcteur mettra un 0 à la question.
-

Question 1:	A	B	C	D	E	F
Question 2:	A	B	C	D	E	F
Question 3:	A	B	C	D	E	F
Question 4:	A	B	C	D	E	F
Question 5:	A	B	C	D	E	F
Question 6:	A	B	C	D	E	F
Question 7:	A	B	C	D	E	F
Question 8:	A	B	C	D	E	F

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$, laquelle des affirmations ci-dessous est vraie :

- A. $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
- B. Si on ajoute un multiple non nul d'une ligne de A à une colonne de A , cela ne modifie pas son déterminant.
- C. Si on multiplie toutes les lignes de A par 2 alors le déterminant de la nouvelle matrice vaut 2 fois le déterminant de A .
- D. Si on permute deux lignes de la matrice A , puis deux de ses colonnes, on ne change pas son déterminant.
- E. $\text{tr}(A.B) = \text{tr}(A).\text{tr}(B)$.
- F. Aucune des affirmations précédentes.

2. La solution générale de l'équation différentielle $y' + 6t.y = 2t$ est :

- A. $y = \frac{1}{3} + \alpha e^{-6t}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
- B. $y = \frac{1}{2} + \alpha e^{-3t^2}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
- C. $y = \frac{1}{2} + \alpha e^{-3t}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
- D. $y = \frac{1}{3} + \alpha e^{6t}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
- E. $y = \frac{1}{2} + \alpha e^{3t^2}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
- F. Aucune des réponses précédentes

3. On considère A et B deux matrices carrées 2×2 avec

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons $0_{2 \times 2}$ la matrice carrée nulle de taille 2×2 .
Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

- A. Si $BA = 0_{2 \times 2}$, alors $AB = 0_{2 \times 2}$.
- B. Si $B \neq 0_{2 \times 2}$, alors $AB \neq 0_{2 \times 2}$.
- C. Si $AB = 0_{2 \times 2}$, alors $BA = 0_{2 \times 2}$.
- D. Si $AB = 0_{2 \times 2} = BA$, alors $B = 0_{2 \times 2}$.
- E. Si $AB = 0_{2 \times 2} = BA$,
alors $B := \begin{pmatrix} u & -u \\ -u & u \end{pmatrix}$, avec $u \in \mathbb{R}$.
- F. Aucune des affirmations précédentes.

4. Dans les nombres complexes, laquelle des affirmations ci-dessous est vraie ?

- A. $|z + z'| < |z| + |z'|$ pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$.
- B. $|z.z'| < |z|.|z'|$ pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$.
- C. $|z + z'| = |z| + |z'|$ pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$.
- D. $|z| \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- E. $|z| > 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- F. Aucune des affirmations proposées.

5. Soit $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable et $(a; b)$ un point critique de f intérieur à A . Laquelle des affirmations suivantes est vraie :

- A. Si $(a; b)$ est un maximum local de f , alors $\det \text{Hess} f(a; b) < 0$.
- B. Si $\det \text{Hess} f(a; b) \neq 0$, alors $(a; b)$ est soit un maximum local, soit un minimum local de f .
- C. Si $(a; b)$ est un maximum local de f , alors $\det \text{Hess} f(a; b) > 0$.
- D. Si $\det \text{Hess} f(a; b) < 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} < 0$, alors $(a; b)$ est un maximum local de f .
- E. Si $\det \text{Hess} f(a; b) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} < 0$, alors $(a; b)$ est un maximum local de f .
- F. Aucune des affirmations ci-dessus.

6. Soit $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée. Laquelle des affirmations ci-dessous est vraie :

- A. $\|\gamma(t)\|$ est le vecteur normal unitaire à la courbe.
- B. $\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ est le vecteur tangent unitaire à la courbe.
- C. $\gamma'(t)$ est le vecteur normal unitaire à la courbe.
- D. $\gamma'(t)$ est le vecteur tangent unitaire à la courbe.
- E. $\|\gamma'(t)\|$ est le vecteur tangent unitaire à la courbe.
- F. aucune des affirmations proposées.

7. Laquelle des fonctions $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ admet un graphique qui soit un paraboloïde de révolution.

- A. $f_1(x, y) = 4$.
- B. $f_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- C. $f_3(x, y) = 4x - 2y$.
- D. $f_4(x, y) = xy$.
- E. $f_5(x, y) = x^2 + y^2$.
- F. aucune des fonctions proposées.

8. Soit l'intégrale multiple :

$$I := \iint_B \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx dy \text{ avec } B := \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Laquelle des intégrales ci-dessous a la même valeur que I ?

- A. $\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \rho^2} \, d\rho \right) d\theta$
- B. $\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \, d\rho \right) d\theta$
- C. $\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \, \rho \, d\rho \right) d\theta$
- D. $\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \rho^2} \, \rho \, d\rho \right) d\theta$
- E. $\iint_B 1 \, d\rho d\theta$
- F. aucune des intégrales proposées.

NOM :

Prénom :

Matricule :

Section :

Partie II : Questions ouvertes

Consignes :

- Cette partie contient uniquement des questions ouvertes.
 - Il y a deux feuilles de brouillon en fin de questionnaire, vous pouvez aussi utiliser cette feuille-ci comme brouillon.
 - Répondez **uniquement** dans l'espace prévu après chaque question ainsi qu'aux verso des feuilles correspondantes.
 - Toutes vos réponses doivent être soigneusement justifiées, sauf mention explicite du contraire.
 - Rédigez clairement vos réponses et soignez-en la présentation.
 - Vous pouvez rédiger vos réponses au crayon, MAIS PAS en rouge.
-

QUESTION 1

1. (12 points) Donnez l'ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^3$ des solutions au système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 3z = 1 \\ -4x - 5y + 5z = 3 \\ x + 2y - 2z = 3 \end{cases}$$

2. (8 points) Calculez le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

3. (4 points) Soient A et B deux matrices $n \times n$ inversibles, démontrez que :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Réponse à la question 1

NOM :

Prénom :

Matricule :

Section :

Réponse à la question 1 (suite)

NOM :

Prénom :

Matricule :

Section :

QUESTION 2

1. (6 points) Trouvez l'ensemble $T \subseteq \mathbb{C}$ des solutions complexes à l'équation

$$t^2 - 2t + 2 = 0.$$

2. (9 points) Déduisez-en l'ensemble solution $S \subseteq \mathbb{C}$ des solutions complexes à l'équation

$$z^6 - 2z^3 + 2 = 0.$$

3. (4 points) Énoncez la **formule de De Moivre**.
-

Réponse à la question 2

NOM :

Prénom :

Matricule :

Section :

Réponse à la question 2 (suite)

NOM :

Prénom :

Matricule :

Section :

QUESTION 3

(6 points) Intégrez la fonction $7x$ sur la région de $\mathbb{R}^2$ délimitée par les paraboles d'équations $y = x^2 + 3$ et $y = 2x^2 + 2$.

Réponse à la question 3

NOM :

Prénom :

Matricule :

Section :

Réponse à la question 3 (suite)

NOM :

Prénom :

Matricule :

Section :

QUESTION 4

1. (5 points) Définissez la notion de **problème de Cauchy**.
2. (8 points) Donnez la solution générale à l'équation différentielle homogène

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

3. (5 points) Résolvez le problème de Cauchy :

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

Réponse à la question 4

NOM :

Prénom :

Matricule :

Section :

Réponse à la question 4 (suite)

