

QUESTION 1

1. (6 points) Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I . Supposons de plus que f soit dérivable en tout point de I .

(a) Démontrez :

Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I .

(b) L'implication suivante est-elle vraie ? Justifiez

Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I .

2. (2 points) Soit A un intervalle et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, pour a un point intérieur à A , définissez : le nombre dérivé de f en a

3. (5 points) Démontrez par récurrence :

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \text{ pour tout } n \geq 1.$$

1. (a)

Preuve

On va montrer uniquement le premier point : on suppose que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, et on va montrer que f est strictement croissante sur I .

Soient donc x, y avec $x < y$. Comme f est continue sur l'intervalle $[x, y]$ et dérivable sur l'ouvert $]x, y[$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis, et en déduire l'existence de $c \in]x, y[$ avec

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Or $f'(c) > 0$ et $y - x > 0$ et donc

$$f(y) - f(x) = (y - x)f'(c) > 0 \iff f(x) < f(y)$$

C'est-à-dire que f est strictement croissante sur I .

(b) Faux, $f(x) = 0 \quad \forall x \in I$ est un contre-ex

$$f'(x) = 0 \leq 0 \quad \forall x \in I$$

mais $f \equiv 0$ n'est pas strictement décroissante.

2.

Soit A un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et soit a un point intérieur à A (ce n'est pas une extrémité de A). Si la limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe dans $\mathbb{R}$ on appelle cette limite le nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$.

3.

Démontrons par récurrence que

$$\boxed{\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2} \quad \forall n \geq 1. \quad P(n)$$

• Initialisation: $n=1$:

$$\sum_{k=1}^1 (2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$n^2 = 1^2 = 1 //$$

• Étape de récurrence:

Supposons que la formule $P(n)$ soit vraie pour n et montrons qu'alors elle est vraie pour $n+1$.

$$[\text{soit } P(n) \Rightarrow P(n+1)]$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) + (2(n+1)-1)$$

$$= n^2 + (2(n+1)-1) [P(n) \text{ vraie}]$$

$$= n^2 + 2n + 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2.$$

Par récurrence, ceci démontre bien que
 $\forall n \geq 1 : P(n) \text{ vraie}.$