

QUESTION 3

(6 points)

L'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

est-elle convergente ? Justifiez

Si oui, calculez-la.

Une borne est $+\infty \rightarrow$ intégrale impropre.

On va considérer la limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

$$\bullet \int_1^t \frac{\ln(x)}{x^2} dx \stackrel{\text{IPD}}{=} \left[\ln(x) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) \right]_1^t - \int_1^t \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$f(x) = \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow g(x) = -\frac{1}{x}$$

$$= -\frac{\ln(t)}{t} + \int_1^t \frac{1}{x^2} dx$$

$$= -\frac{\ln(t)}{t} - \left[\frac{1}{x} \right]_1^t$$

$$= -\frac{\ln(t)}{t} - \frac{1}{t} + 1$$

Donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\left(-\frac{\ln(t)}{t} \right)}_{\substack{\swarrow t \rightarrow +\infty \\ 0}} + \underbrace{\left(\frac{1}{t} \right)}_{\substack{\downarrow t \rightarrow +\infty \\ 0}} + 1 \right)$$

(par l'Hospital)

$$= 1.$$

L'intégrale converge car la limite existe et est réelle, elle vaut 1.