

QUESTION 1

1. (6 points) Soit $n \in \mathbb{N}_0$, donnez la définition du déterminant d'une matrice carrée $n \times n$.
2. (8 points) En utilisant la **méthode du pivot de Gauss**, calculez l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.

Définition *réursive*.

- ▶ Si $n = 1$: Le déterminant d'une matrice 1×1 est égal au seul nombre de la matrice: $\det M = M_{11}$. $M = (M_{ij})$
- ▶ Si $n \geq 2$: Le déterminant d'une matrice M de taille $n \times n$ est défini par **récurrence** de la manière suivante :
 1. On choisit une rangée: ligne ou colonne, peu importe laquelle.
 2. Pour chaque élément M_{ij} de la rangée on calcule le déterminant de la matrice obtenue **en enlevant la i -ième ligne et la j -ième colonne de M** , qui est de taille $(n-1) \times (n-1)$. On note D_{ij} ce déterminant.
 3. Le déterminant de M est la somme tous les produits $(-1)^{i+j} M_{ij} D_{ij}$ lorsqu'on parcourt la rangée:

$$\det M = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} M_{ij} D_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} M_{ij} D_{ij}.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{ligne } i \text{ fixée}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{colonne } j \text{ fixée}}$

Ca ne dépend pas de la rangée choisie.

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - L_3 \\ L_1 \rightarrow L_1 + L_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ L_1 \rightarrow L_1 + 3L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \rightarrow -L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ est inversible, d'inverse}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$