

QUESTION 2

1. (8 points) Calculez l'intégrale triple

$$\int_E z \, dx \, dy \, dz,$$

où $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0, z^2 \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

2. (5 points) Calculez la longueur de la courbe paramétrique :

$$\gamma : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t - \sin(t), 1 - \cos(t)).$$

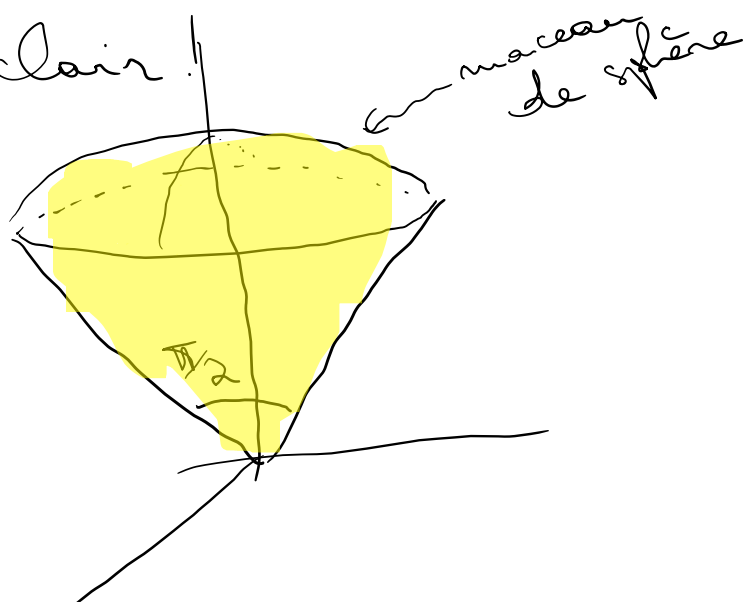
1. On commence par analyser E .

$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ représente la boule unité fermée

$z^2 \geq x^2 + y^2$ représente un cône d'apex au sommet $\frac{\pi}{2}$.

$z \geq 0$ est clair !

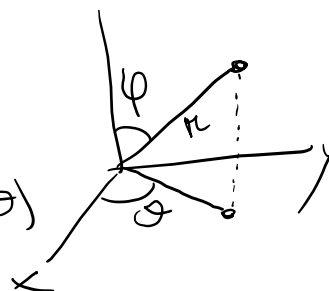
$\leadsto E =$



En coord sphérique :

$$x = r \sin(\varphi) \cos(\theta), \quad y = r \sin(\varphi) \sin(\theta)$$

$$z = r \cos(\varphi)$$



E est décrit par

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq 1 \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \\ 0 &\leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Donc $\int_E z \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 r \cos(\varphi) \cdot r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \cos(\varphi) \sin(\varphi) \int_0^1 r^3 \, dr \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \cos(\varphi) \sin(\varphi) \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \cos(\varphi) \sin(\varphi) \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin^2(\varphi)}{2} \right]_0^{\pi/4} \, d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{2} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$$

(Solution possible avec coord cylindrique.)

2. La longueur de la courbe est donnée par $\int_0^{\pi} \|\gamma'(t)\| \, dt$.

$$\gamma'(t) = (1 - \cos(t), \sin(t))$$

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} \\ &= \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2 + \sin^2} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos(t)} = \sqrt{2 \cdot 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= 2\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ &\quad \text{pour } t \in [0; \pi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Longueur } \gamma \text{ est } &\int_0^{\pi} 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) dt \\ &= 2 \left[-2\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{\pi} = -4(0 - 1) \\ &= 4 \end{aligned}$$