

QUESTION 3

1. (5 points) Soit $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, définissez la matrice Jacobienne de f au point $a \in \text{int}(A)$.
2. (6 points) Soit la fonction

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Montrez que g est **continue sur** $\mathbb{R}^2$.
Justifiez et détaillez vos calculs de limites!

1.

Définition

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ qu'on écrit comme $f = (f_1, \dots, f_m)$, où $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. La **matrice jacobienne de f au point $a \in \text{int} A$** est la matrice de taille $m \times n$ formée par les dérivées partielles $\partial_j f_i$ en a :

$$J_f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Note: $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$.

2.

La fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (ceci découle juste de l'expression de la fonction et des règles de calcul des limites).

En $(0, 0)$: On va calculer la limite de f pour $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ et montrer que cette limite vaut 0. On utilisera la définition.

Nous voulons montrer que $\forall \epsilon > 0$,

$\exists \delta > 0 : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \Rightarrow \|f(x, y) - 0\| < \epsilon$
c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| < \epsilon$$

Pour montrer ceci on commence par remarquer qu'on peut majorer $|x|^3$ et $|x|$ de la manière suivante: $|x^3| = |x|x^2 \leq |x|(x^2 + y^2)$, et de même: $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. Dès lors, $\nearrow y^2 \geq 0$.

$$\left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\| < \epsilon$$

Choisissons $\epsilon > 0$. On choisit $\delta := \epsilon$: alors si $\|(x, y)\| < \delta$, alors $|f(x, y)| \leq \|(x, y)\| < \epsilon$. Ce qui montre bien la limite cherchée.