

QUESTION 4

1. (4 points) Soit $ay'' + by' + c = 0$ une équation différentielle linéaire homogène du second ordre avec a, b et $c \in \mathbb{R}$. Si $b^2 - 4ac = 0$, donnez la forme théorique de la solution générale de l'équation.
2. (8 points) Donnez la(les) solution(s) $y :] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' - y \tan(x) = \frac{-1}{\cos(x)}, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1.

Cas 2 Si $b^2 - 4ac = 0$, on note $\lambda = \frac{-b}{2a}$ l'unique racine du polynôme caractéristique. La solution générale de l'équation homogène (SGEH) est alors :

$$y_{SGEH}(x) = (C_1 + C_2 x) \exp(\lambda x)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes

2. Il s'agit d'une éq lin du 1^{er} ordre
- On commence par résoudre l'équation homogène associée :

$$y' - y \tan(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\Leftrightarrow \ln(|y|) = -\ln(\cos(x)) + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y = \pm e^C \cdot \frac{1}{\cos(x)} \quad //$$

$y=0$ est sol, on trouve la SGEH :

$$y_{SGEH} = K \cdot \frac{1}{\cos(x)} \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

• Il reste à trouver une solution particulière de l'éq.

Méthode de variat^o des constantes:

On cherche une solution de la forme

$$y(x) = K(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)}.$$

Ainsi,

$$y' - y \tan(x) = - \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow K'(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} + K(x) \cdot \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} - K(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} \cdot \tan(x) \\ = - \frac{1}{\cos(x)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow K'(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} = - \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\Leftrightarrow K'(x) = -1$$

On trouve $K(x) = -x$.

La solution particulière est

$$y(x) = \frac{-x}{\cos(x)}.$$

La solution générale de l'éq lin est

$$y(x) = -\frac{x}{\cos(x)} + \frac{K}{\cos(x)}$$

avec $K \in \mathbb{R}$

• Probl de Cauchy

$$y(0) = 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{0}{\cos(0)} + \frac{K}{\cos(0)} = 1$$

$$\Leftrightarrow K = 1$$

La sol du probl de Cauchy est :

$$y(x) = -\frac{x}{\cos(x)} + \frac{1}{\cos(x)}$$

$$= \frac{-x + 1}{\cos(x)}$$