

# Syllabus d'exercices, MathF117 [Version 2025-26]

Le présent document est le syllabus d'exercices du Cours de Math F117. Il est adapté du syllabus d'exercices du cours de Math F112 par E. Robinson A. Vanden Wyngaerd, lui-même issu du syllabus de J.-P. Doignon pour le cours de Math F107, adapté par N. Richard et modifié au cours des dernières années par J. Mulpas et J. De Saedeleer.

## Table des matières

|          |                        |           |
|----------|------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Notions de base</b> | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Trigonométrie</b>   | <b>6</b>  |
| <b>3</b> | <b>Géométrie</b>       | <b>8</b>  |
| <b>4</b> | <b>Fonctions</b>       | <b>14</b> |
| <b>5</b> | <b>Dérivées</b>        | <b>16</b> |
| <b>6</b> | <b>Primitives</b>      | <b>25</b> |
| <b>7</b> | <b>Complexes</b>       | <b>28</b> |

# Chapitre 1

## Notions de base

### Racines et puissances

**1.1.** Ci-dessous, on suppose  $n \in \mathbb{N}$  et  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ . Effectuer les opérations suivantes et exprimer le résultat sous la forme (exacte) la plus simple possible sans calculatrice. Par exemple pour  $\sqrt[4]{4}$  la réponse est  $\sqrt{2}$ , tandis que pour  $\sqrt[4]{16}$  la réponse est 2. Donner la réponse sous forme de fraction plutôt que sous forme décimale.

- |                                    |                                                                                            |                |
|------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| a. $\frac{2}{5} = \dots$           | d. $\left(\frac{16}{25}\right)^{-\frac{1}{4}}$                                             | h. $(2^3)^2$   |
| b. $\frac{2}{\frac{2}{5}} = \dots$ | e. $\sqrt[3]{-125}$                                                                        | i. $2^{(2^3)}$ |
| c. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ | f. $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$ | j. $2^{(3^2)}$ |
|                                    | g. $(2^2)^3$                                                                               | k. $(a^n)^n$   |

**1.2.** Ci-dessous, on suppose  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ . Simplifier

- |                                      |                                             |
|--------------------------------------|---------------------------------------------|
| a. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^5}$ | b. $\frac{\sqrt[4]{64a^6}}{\sqrt[4]{162a}}$ |
|--------------------------------------|---------------------------------------------|

**1.3.** Exprimer  $16^m$  comme puissance de 2.

**1.4.** Effectuer  $(2^2)^3$ ;  $(2^3)^2$ ;  $2^{(2^3)}$ ;  $2^{(3^2)}$ ;  $(a^n)^n$ .

### (In)Equations

**1.5.** Trouver les valeurs réelles  $x$  telles que

- |                                 |                                        |
|---------------------------------|----------------------------------------|
| a. $\frac{1}{x} = 3$            | e. $x^3 - 5x^2 = -6x$                  |
| b. $-1 = -2x + 3$               | f. $ x^2 + 4x + 3  = 1$                |
| c. $\frac{x^2 - 3x}{x + 2} = 0$ | g. $\left \frac{x-1}{5x+2}\right  = 3$ |
| d. $8 - \frac{1}{x^2} = 0$      |                                        |

**1.6.** Trouver les valeurs réelles  $x$  telles que

- |                                 |                                        |
|---------------------------------|----------------------------------------|
| a. $\frac{1}{x} < 3$            | e. $x^3 - 5x^2 < -6x$                  |
| b. $-1 < -2x + 3 \leq 2$        | f. $ x - 1  <  2 - 3x $                |
| c. $\frac{x^2 - 3x}{x + 2} > 0$ | g. $\left \frac{x-1}{5x+2}\right  > 3$ |
| d. $8 - \frac{1}{x^2} < 0$      |                                        |

## Logarithmes

**1.7.** Calculer sans faire usage de tables ou de machines :

- |                           |                      |                           |
|---------------------------|----------------------|---------------------------|
| a. $\log_2(32)$           | e. $\log_{1/2}(4)$   | h. $\log_{\sqrt{32}}(32)$ |
| b. $\log_3(27)$           | f. $\ln(e^{-7})$     | i. $\log_{16}(8)$         |
| c. $\log_{10}(0,0000001)$ | g. $\log_{10}(10^4)$ | j. $\log_8(16)$           |
| d. $\log_5(125)$          |                      |                           |

**1.8.** Calculer  $x$  tel que

- |                      |                                                                |
|----------------------|----------------------------------------------------------------|
| a. $\log_x 5 = 0.5$  | d. $\log_x a = a \quad (a > 0 \text{ et } a \neq 1)$           |
| b. $\log_x 8 = -1.5$ | e. $\log_x a = -a \quad (a > 0 \text{ et } a \neq 1)$          |
| c. $\log_x 2 = -2$   | f. $\log_x a = \frac{1}{a} \quad (a > 0 \text{ et } a \neq 1)$ |

**1.9.** Pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$  réels avons-nous  $\log_a b < 0$  ?

**1.10.** Démontrer les identités

- a.  $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c = 1$   
 b.  $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} = \frac{1}{\log_{ab} x}$

**1.11.** Exprimer les nombres suivants en fonction de la constante  $a = \log_{10} 2$  :

- a.  $\log_{10} 5$ ;                      b.  $\log_{10} 125$ ;                      c.  $\log_{10} 2,5$ .

**1.12.** Le logarithme d'un nombre vaut 3 dans une certaine base. Ce logarithme vaut 4 si l'on double la base. Quel est ce nombre ? Quelle est cette base ?

**1.13.** Pour quelle valeur de  $x$  la quantité  $\log_x 5$  est-elle d'une unité plus grande que  $\log_x 4$  ?

**1.14.** Simplifier l'expression  $\log_a (\log_a a^{a^x})$ .

**1.15.** Résoudre les équations suivantes :

- |                                                |                                                                                         |
|------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| a. $\log_3(x+2) + 1 = \log_3(x^2 + 4x)$ ;      | e. $4 \log x = \log(x^2 - 2) + \log 8$ ;                                                |
| b. $\log x + \log(x^2 + 2x - 1) = \log 2$ ;    | f. $\frac{1}{\log_{3x} 30x} + \frac{1}{\log_{2x} 30x} + \frac{1}{\log_{x-2} 30x} = 1$ ; |
| c. $\log_5(5^x - 7) = \log_{25} 324 + 2 - x$ ; | g. $(\log_4 x)^2 - \log_x x + 1 = 0$ .                                                  |
| d. $2 \log_2 x + \log_x 2 = 3$ ;               |                                                                                         |

**1.16.** Déterminer les plus grands domaines de définition des fonctions  $y = y(x)$  suivantes :

- |                                                 |                                        |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------|
| a. $y = \ln \left( \frac{3-2x}{3+2x} \right)$ ; | b. $y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$ . |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------|

**1.17.** Résoudre les équations exponentielles suivantes :

- |                                                    |                                     |
|----------------------------------------------------|-------------------------------------|
| a. $2^x + 2^{x+1} = 3$                             | e. $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} = 27$     |
| b. $3^{2x+1} + 9^x = 324$                          | f. $2^{x+1} + 4^x = 80$             |
| c. $e^x + e^{-x} = 2$                              | g. $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$      |
| d. $\left(\frac{9}{4}\right)^x - \frac{8}{27} = 0$ | h. $2(e^x - e^{-x}) = e^x + e^{-x}$ |

**1.18.** Résoudre l'équation suivante pour  $x \in \mathbb{R}$  :

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$$

**1.19.** Pour quelles valeurs du paramètre  $m$  le système suivant admet-il des solutions ? Quelles sont les solutions correspondantes ?

$$\begin{cases} e^{2x} - 7e^x + 12 = 0 \\ e^{2x} - 3e^x + m = 0 \end{cases}$$

**1.20.** En vue d'étudier des temps d'exécution d'algorithmes, on définit parfois la *taille*  $\alpha$  d'un nombre naturel  $m$  comme étant

$$\alpha = 1 + \lceil \log_2(|m| + 1) \rceil.$$

Que vaut la taille de

7 ?

9 ?

- 11 ?

1 ?

- 1 ?

0 ?

## Ensembles

**1.21.** Déterminer les ensembles suivants de  $\mathbb{R}$  :

a.  $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\}$

c.  $\{1, 2, 3\} \setminus \{3, 4, 5\}$

e.  $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} [m, m + 1]$

b.  $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\}$

d.  $\emptyset \cup \{1\} \cup \{\{1\}\}$

f.  $\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} [m, m + 1]$

**1.22.** Soit  $X$  un ensemble et  $A, B \subseteq X$ . On note  $\bar{A} = X \setminus A$ . Vérifier les lois de Morgan :

a.  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

b.  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

**1.23.** Soient  $A, B, C$  des ensembles quelconques. Montrer les lois de distributivité suivantes

a.  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

c.  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

b.  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

d.  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

**1.24.** Soient  $A_1, A_2, A_3, \dots$  des ensembles tels que  $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$  quel que soit  $n$ . Cela implique-t-il que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset?$$

**1.25.** Un sondage montre que les pourcentages de personnes votant satisfaits avec les trois candidats  $A, B, C$  sont respectivement 69%, 61% et 58 %. De plus, 28% accepteraient  $A$  et  $B$ , 30% accepteraient  $A$  et  $C$ , 27% accepteraient  $B$  et  $C$  et 12% accepteraient n'importe quel candidat. Analyser la situation et en tirer des conclusions.

**1.26.** Soient  $A = \{1, 3, 5\}$  et  $B = \{2, 4\}$ . Déterminer

a.  $A \times A$

b.  $A \times B$

c.  $B \times A$

d.  $B \times B$

**1.27.** Soient  $X$  un ensemble et  $A, B \subseteq X$  des ensembles finis tels que  $|A| = n$ ,  $|B| = m$  et  $|A \cap B| = k$ .

a. Quel est le nombre d'éléments de  $A \cup B$  ?

b. Quel est le nombre d'éléments de  $A \times B$  ?

c. Quel est le nombre d'éléments en commun de  $A \times B$  et  $B \times A$  ?

*Indication : montrer d'abord que  $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cap A)$ .*

**1.28.** Soient  $A, B, C$  des ensembles quelconques. Démontrer les affirmations suivantes.

- a.  $A \times \emptyset = \emptyset$
- b.  $A \subseteq B \Rightarrow A \times C \subseteq B \times C$
- c.  $A \neq \emptyset$  et  $B \neq \emptyset \Rightarrow A \times B \neq \emptyset$
- d.  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- e.  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

**1.29.**

- a. Montrer que pour tous ensembles  $A, B, C, D$  on a

$$(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D).$$

- b. Montrer que l'affirmation

$$\text{Pour tous ensembles } A, B, C, D : (A \cup C) \times (B \cup D) \subseteq (A \times B) \cup (C \times D)$$

est fausse.

## Polynômes

**1.30.** Effectuer les divisions euclidiennes des polynômes  $P$  par  $Q$  suivantes.

- a.  $P(X) = X^4 - X^3 + 3X$  et  $Q(X) = X^2 + 2$
- b.  $P(X) = 3X^4 - X^3 - 4X^2 + 2X + 2$  et  $Q(X) = X + 1$

**1.31.** Trouver les racines du polynôme  $X^3 - \frac{7}{2}X^2 - 7X - \frac{5}{2}$ .

**1.32.** Parmi les polynômes suivants, déterminer ceux qui sont irréductibles.

- |            |                    |                   |
|------------|--------------------|-------------------|
| a. $x - 1$ | d. $x^2 + 1$       | g. $x^2 - 2x + 1$ |
| b. $2x$    | e. $x^4 + x - 1$   | h. $x^2 - 2x + 6$ |
| c. $x^3$   | f. $-x^5 + 3x - 5$ | i. $-3x - 5$      |

## Sommes

**1.33.** Calculez les sommes suivantes. On fixe  $a \in \mathbb{R}$ .

- |                                                       |                                                       |                                                    |
|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| a. $\sum_{i=1}^5 (i^2 - 1)$                           | d. $\sum_{j=1}^2 \left( \sum_{i=1}^3 (i + j) \right)$ | g. $\sum_{i=1}^{100} (i + 2)$                      |
| b. $\sum_{i=10}^{11} (-i^3)$                          | e. $\sum_{i=0}^{10} a$                                | h. $\sum_{i=1}^{10} a^i - \sum_{i=1}^{10} a^{i+1}$ |
| c. $\sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^2 (i + j) \right)$ | f. $\sum_{k=5}^1 (k - 1)$                             |                                                    |

## Chapitre 2

# Trigonométrie

Dans la langue française, l'inverse du cosinus d'un angle  $\alpha$  est aussi désigné par le terme *sécante de l'angle*  $\alpha$  et dénoté  $\sec \alpha$ . Similairement, la *cosécante de l'angle*  $\alpha$  est donnée par  $\operatorname{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\sin \alpha}$ .

**2.1.** Quelle est la mesure en degrés d'un angle de  $\frac{\pi}{10}$  radians ? À quelle fraction d'un tour complet cet angle correspond-il ?

**2.2.** Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $A$ . On donne  $AB = 5$  cm, et  $\hat{B} = \frac{\pi}{6}$  rad. Représenter la situation, et déterminer les longueurs  $AC$  et  $BC$ .

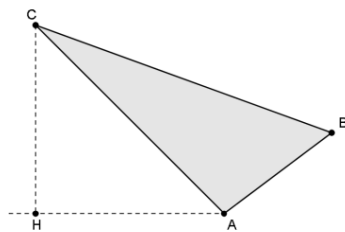
**2.3.** Si  $ABC$  est rectangle en  $A$ , que  $AB$  vaut 5 unités,  $BC$  vaut 6 unités, que vaut  $AC$  ? Quelle est la mesure de l'angle  $\hat{C}$  ?

**2.4.** On donne un trapèze  $ABCD$ , où  $AB$  est de longueur 3,  $AD$  est de longueur 5 et  $CD$  de longueur 6. Notons  $O$  l'intersection entre les diagonales  $BD$  et  $AC$ . Sachant que les côtés  $AB$  et  $AD$  d'une part, et  $AD$  et  $DC$  d'autres part sont perpendiculaires, quelle est la mesure de l'angle  $\widehat{BOA}$  ?

**2.5.** Soit  $ABC$  un triangle ; on donne  $BC = 25$ ,  $AC = 36$  et  $\hat{B} = 72^\circ$ .

- Déterminer le troisième côté et les deux autres angles en degrés.
- Déterminer la mesure de  $\hat{B}$  en radians (sans calculatrice !)

**2.6.** Sur la figure, on donne les angles  $\widehat{CAH} = 42^\circ$ ,  $\hat{A} = 105^\circ$ ,  $\hat{B} = 36^\circ$  et  $AB = 300$  m. On demande de déterminer la longueur  $CH$  sachant que l'angle dessiné en  $H$  est droit.



**2.7.** Deux édifices à toit plat sont distants de 60 m. Du toit du plus petit édifice, qui a 40 m de hauteur, l'angle d'élévation de l'arête du toit du plus grand édifice est de  $40^\circ$ . Calculer la hauteur du plus grand édifice.

**2.8.** À l'aide du cercle trigonométrique, déterminer les nombres suivants (valeur exacte) en utilisant les symétries adéquates.

- |                                      |                                       |                                       |
|--------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| a. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ | d. $\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)$  | g. $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$  |
| b. $\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)$ | e. $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)$  | h. $\cos\left(\frac{-7\pi}{6}\right)$ |
| c. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ | f. $\sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right)$ | i. $\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)$  |

**2.9.** Déterminer les valeurs exactes des expressions suivantes :  $\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $\arctan(1)$ .

**2.10.** Simplifier l'expression  $\cos(\arcsin(x))$ .

**2.11.** Trouver les valeurs exactes possibles de  $\cos \theta$  et  $\tan \theta$  sachant que  $\sin \theta = \frac{7}{16}$ , puis reporter les arcs correspondants sur un cercle.

**2.12.** Démontrer les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\sin^4(a) - \cos^4(a) &= \sin^2(a) - \cos^2(a) \\ &= 2\sin^2(a) - 1 \\ \tan^2(a) - \tan^2(b) &= \frac{1}{\cos^2(a)} - \frac{1}{\cos^2(b)} \\ \frac{\sin^2(\theta) - \cos^2(\phi)}{\sin^2(\theta) \sin^2(\phi)} &= 1 - \cot^2(\theta) \cot^2(\phi)\end{aligned}$$

**2.13.** Soit  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

- Si  $\sin x = -\frac{1}{5}$ , que vaut la tangente de  $x$  ?
- Si  $\cos x = \frac{1}{3}$ , quelles sont les valeurs possibles de la tangente de  $x$  ?

**2.14.** Résoudre les équations suivantes en  $x$  :

- $2 \sin x - 1 = 0$  ;
- $\sin x - \sin 2x = 0$  ;
- $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$  ;
- $\sin^2 2x - \sin^2 x = 0$  ;
- $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$  ;
- $\sin 2x - \cos 2x = 1$  ;
- $\sin x = \sqrt{3} \cos x$  ;
- $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$  ;
- $\arccos 2x = \arcsin x$  ;
- $\arccos(2x^2 - 1) = 2 \arccos \frac{1}{2}$ .

**2.15.** Déterminer la valeur de chacune des expressions suivantes :

- $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$  ;
- $\arccos \frac{1}{2}$  ;
- $\arctan 1$  ;
- $\operatorname{arccotg}(-1)$  ;
- $\sin(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2})$  ;
- $\cos(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2})$  ;
- $\operatorname{coséc}(\arcsin \frac{1}{2})$  ;
- $\cotg(\arctan 1)$  ;
- $\sec(\operatorname{arccotg} \sqrt{3})$ .

**2.16.** Déterminer la valeur (en fonction de  $x$ ) de chacune des expressions suivantes :

- $\sin(2 \arccos x)$
- $\cot(\arccos x)$
- $\cos(2 \arcsin x)$
- $\sin(2 \arccos 4x)$
- $\sin(\arctan x)$
- $\tan(\arcsin 5x)$

## Chapitre 3

# Géométrie

### Dans le plan

**3.1.** On donne les points  $a = (1, 2)$ ,  $b = (4, 4)$  et  $c = (4, 3)$  du plan. Déterminer

- les composantes des vecteurs  $\vec{ab}$  et  $\vec{ba}$ ;
- les coordonnées du milieu du segment  $ab$ ;
- les coordonnées du centre de gravité du triangle  $abc$ .

**3.2.** Soit  $g$  le centre de gravité du triangle  $abc$ ; calculer la somme vectorielle

$$\vec{ga} + \vec{gb} + \vec{gc}.$$

**3.3.** On donne les points  $a = (1, 7)$  et  $b = (6, -3)$ .

- Déterminer les coordonnées du point  $c$  situé sur la droite  $ab$  et tel que  $\vec{ac} = \frac{2}{3}\vec{cb}$ .
- Même question avec  $a = (1, -8)$ ,  $b = (8, -1)$  et  $\vec{ac} = \frac{3}{4}\vec{cb}$ .

**3.4.** La longueur d'un vecteur  $\vec{ab}$  du plan euclidien est 13, son origine est le point  $a = (-2, 3)$ , la projection de son extrémité sur l'axe  $oy$  est le point  $(0, 8)$ . Déterminer les coordonnées de  $b$  et les composantes de ce vecteur.

**3.5.** Dans le plan, donner l'équation des droites suivantes :

- l'axe  $Ox$ ;
- l'axe  $Oy$ ;
- la droite qui passe par les points  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$ ;
- la droite qui passe par les points  $(1, 0)$  et  $(0, 2)$ ;
- la droite qui passe par les points  $(1, 4)$  et  $(-1, 2)$ ;
- la droite parallèle à l'axe  $ox$  qui passe par  $(2, -4)$ ;
- la droite parallèle à la droite d'équation  $x + 3y = -4$  qui passe par le point  $(1, 2)$ .

**3.6.** Quelle est l'équation de la droite du plan qui passe par  $(2, -3)$  et qui est parallèle à la droite passant par  $(4, 1)$  et  $(-2, 2)$  ?

**3.7.** Trouver l'équation de la droite passant par le point  $(2, 1)$  et par le point d'intersection des droites d'équations respectives

$$3x - 2y + 10 = 0 \quad \text{et} \quad 4x + 3y - 7 = 0.$$

**3.8.** Quelle est l'équation de la perpendiculaire à la droite d'équation  $2x - 3y - 4 = 0$ , qui passe par le point  $(3, -2)$  ?

**3.9.** Soit le point  $p = (3, 5)$  du plan euclidien. Quelles sont les coordonnées des points symétriques de  $p$  par rapport

- a. à l'origine ;
- b. à l'axe  $ox$  ;
- c. à l'axe  $oy$  ;
- d. au point  $(7, -2)$  ;
- e. à la première bissectrice ;
- f. à la droite d'équation  $x + 2y = 3$ .

**3.10.** Déterminer la valeur du paramètre réel  $k$  pour que dans le plan coordonné

- a. la droite d'équation  $3kx + 5y + k = 0$  passe par le point  $(-1, 4)$  ;
- b. la droite d'équation  $4x - ky - 7 = 0$  ait une pente 3 ;
- c. la droite d'équation  $kx - y = 3k - 6$  coupe l'axe des  $x$  au point d'abscisse 5.

**3.11.** Considérons dans le plan coordonné le triangle formé par les droites d'équations respectives

$$x - y + 2 = 0,$$

$$2x + 3y + 9 = 0,$$

et

$$4x + y - 7 = 0.$$

- a. Déterminer les coordonnées des sommets de ce triangle.
- b. Déterminer les coordonnées des milieux de ses côtés.
- c. Écrire les équations de ses médianes.

**3.12.** Le point d'intersection  $g$  des médianes d'un triangle se trouve sur l'axe des abscisses. Deux des sommets coïncident avec les points  $a = (2, -3)$  et  $b = (-5, 1)$ , le troisième sommet étant sur l'axe des ordonnées. Trouver les coordonnées des points  $c$  et  $g$ .

**3.13.** Démontrer que la droite d'équation  $2x + y + 3 = 0$  coupe le segment limité par les points  $a = (-5, 1)$  et  $b = (3, 7)$ .

**3.14.** Dans le plan coordonné, quelle est l'équation de la droite parallèle à la droite d'équation  $2x + 3y - 5 = 0$  et qui passe par le point d'intersection des droites d'équations  $2x - 5y + 9 = 0$  et  $4x + 7y - 1 = 0$  ?

**3.15.** Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0.$$

**3.16.** Écrire l'équation du cercle qui contient les points  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$  et  $(3, 1)$ .

**3.17.** Trouver les équations des droites tangentes au cercle d'équation  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$  et parallèles à la droite d'équation  $x + y = 0$ .

## Dans l'espace

**3.18.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , calculer

- a.  $(1, 2, 3) \times (-1, 4, 2)$
- b.  $((1, 2, 3) \times (-1, 0, 2)) \times (0, -6, 1)$
- c.  $(1, 2, 3) \times ((-1, 0, 2) \times (0, -6, 1))$

**3.19.** Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , on donne les vecteurs  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  de composantes respectives  $(1, 2, 3)$ ,  $(0, 3, -4)$  et  $(2, 2, -2)$ . On demande

- la longueur de  $\vec{v}_2$  ;
- l'angle entre  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_3$  ;
- le produit vectoriel  $\vec{v}_2 \times \vec{v}_3$ .

**3.20.** Dans l'espace euclidien de dimension 3, calculer l'angle entre deux diagonales d'un cube.

**3.21.** Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , trouver l'aire du triangle de sommets  $p = (1, 3, 2)$ ,  $q = (2, -1, 1)$ ,  $r = (-1, 2, 3)$ .

**3.22.** Soit  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  des vecteurs de l'espace euclidien  $\mathbb{E}^3$  tels que  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ . Montrer que  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$ .

**3.23.** Montrer que l'on a  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$  pour tout  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{E}^3$ .

**3.24.** Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  le triangle de sommets  $a = (-1, 4, -1)$ ,  $b = (5, 8, 5)$ ,  $c = (11, -4, 7)$  est-il rectangle ? Calculer l'aire de ce triangle.

**3.25.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , quelle est l'équation du plan

- parallèle au plan  $oxy$  et coupant l'axe  $oz$  au point  $(0, 0, -3)$  ;
- parallèle au plan  $oyz$  et coupant l'axe  $ox$  au point  $(-4, 0, 0)$  ;
- contenant l'axe  $oz$  et passant par le point  $(1, 1, 1)$  ;
- passant par les points  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  et  $(0, 0, 1)$  ;
- passant par les points  $(2, 0, 0)$ ,  $(0, 6, 0)$  et  $(0, 0, 5)$  ;
- passant par les points  $(-3, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$  et  $(0, 0, -1)$ .

**3.26.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , trouver l'équation du plan

- contenant l'origine et parallèle au plan d'équation  $3x + 7y - 6z + 3 = 0$  ;
- contenant le point  $(-1, 2, 4)$  et parallèle au plan d'équation  $3x + 7y - 6z + 3 = 0$ .

**3.27.** Quelle est l'équation du plan de  $\mathbb{R}^3$

- passant par  $a = (3, 4, -5)$  et parallèle aux vecteurs de composantes  $(3, 1, -1)$  et  $(1, -2, 1)$  ?
- passant par  $a = (2, -1, 3)$  et  $b = (3, 1, 2)$  et parallèle au vecteur de composantes  $(3, -1, 4)$  ?

**3.28.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , donner des équations paramétriques et cartésiennes

- de l'axe  $ox$  ;
- de la droite parallèle à l'axe  $oy$  qui passe par le point  $a = (2, -1, 3)$  ;
- de la droite qui passe par les points  $a = (0, 1, 1)$  et  $b = (2, 3, 0)$  ;
- de la droite parallèle à la droite d'équations

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

qui passe par le point  $a = (1, 2, 3)$  ;

- de la droite parallèle au plan d'équation  $x + y - 2z = 3$ , contenue dans le plan d'équation  $2x - y + z = 1$  et qui passe par le point  $e = (1, 1, 0)$ .

**3.29.** Quelle est l'équation du plan de  $\mathbb{R}^3$  qui passe par le point  $a = (2, -2, 1)$  et qui contient la droite  $D$  d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -5t + 2 \\ z = 2t - 3 \end{cases}$$

**3.30.** Trouver des équations cartésiennes de la droite de  $\mathbb{R}^3$  passant par le point  $(-3, 5, 10)$  et parallèle à la droite d'équations

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

**3.31.** Pour quelle(s) valeur(s) de  $a$  les droites de  $\mathbb{R}^3$

$$D_1 \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{-y}{3} = \frac{z-1}{4}$$

et

$$D_2 \equiv \frac{x-3}{a} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$$

sont-elles sécantes ?

**3.32.** Trouver l'équation du plan de  $\mathbb{R}^3$  passant par la droite d'équations

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

et parallèle à la droite d'équations

$$\begin{cases} 5x + 2y - z = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

**3.33.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , la droite d'équations

$$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2 + 3t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

est-elle parallèle au plan d'équation  $x + 2y + 2z - 6 = 0$  ?

**3.34.** Pour quelle valeur de  $\lambda$  la droite de  $\mathbb{R}^3$  d'équations

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{\lambda}$$

est-elle parallèle au plan d'équation  $6x - y + 3z - 5 = 0$  ?

**3.35.** Écrire l'équation du plan de  $\mathbb{R}^3$

- passant par  $(3, -2, 4)$  et perpendiculaire à la droite d'équations  $x - 2 = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$  ;
- passant par  $(-1, 2, -3)$  et perpendiculaire à la droite joignant les points  $(-3, 2, 4)$  et  $(5, 4, 1)$  ;
- passant par  $(2, -3, 4)$  et perpendiculaire à la droite joignant ce point au point  $(4, 4, -1)$  ;
- passant par les points  $(3, 2, 1)$ ,  $(1, 3, 2)$  et  $(1, -2, 3)$ .

**3.36.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , trouver des équations cartésiennes de la perpendiculaire au plan  $2x - y + 2z + 3 = 0$  qui passe par le point  $a = (-2, -4, 3)$ . Quelle est la distance de  $a$  à ce plan ?

**3.37.** Quelle est l'équation du plan de  $\mathbb{R}^3$  qui passe par les points  $a = (1, -1, -2)$  et  $b = (3, 1, 1)$  et qui est perpendiculaire au plan d'équation  $x - 2y + 3z - 5 = 0$  ?

**3.38.** Trouver l'équation du plan de  $\mathbb{R}^3$  perpendiculaire à la droite d'équations

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3},$$

qui passe par le point  $(4, -2, 1)$ .

**3.39.** Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , soit  $p$  le point de coordonnées  $(3, 5, 1)$ . Déterminer les coordonnées des points symétriques de  $p$  par rapport à

- a. l'axe  $ox$  ;
- b. l'axe  $oz$  ;
- c. l'origine ;
- d. le point  $(-1, 2, 3)$  ;
- e. la première bissectrice du plan  $Oxy$  ;
- f. le plan  $Oyz$  ;
- g. le plan d'équation  $x + y - 2z = 2$ .

**3.40.** Trouver la (ou les) valeur(s) de  $k$  pour que le plan de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $x + ky - 2z - 9 = 0$

- soit parallèle au plan  $6x - 2y - 12z = 7$ ;
- soit perpendiculaire au plan  $2x - 4y + z = 3$ ;
- fasse un angle de mesure  $\pi/3$  avec le plan  $2x - 2y + z = 0$ ;
- soit parallèle à la droite d'intersection des plans  $x + y + z = 1$  et  $x + y + z = 2$ .

$$D \begin{cases} x = y \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$$

avec le plan d'équation  $x + y = 2$ .

**3.41.** Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , on donne les droites  $D_1$  et  $D_2$  d'équations

$$D_1 \equiv x - 3 = -y - 2 = \frac{z}{2}, \quad D_2 \equiv x + 2 = y - 3 = \frac{z + 5}{2}$$

et les plan  $\alpha$  et  $\beta$  d'équations

$$\alpha \equiv 2x - 2y + z - 3 = 0, \quad \beta \equiv 3x - y + 2z - 1 = 0$$

On demande de calculer l'angle entre

|                        |                        |                          |
|------------------------|------------------------|--------------------------|
| a) $D_1$ et $D_2$ ;    | b) $D_1$ et $\alpha$ ; | c) $D_1$ et $\beta$ ;    |
| d) $D_2$ et $\alpha$ ; | e) $D_2$ et $\beta$ ;  | f) $\alpha$ et $\beta$ . |

**3.42.** Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  on donne le point  $a = (1, 3, -4)$  et le plan d'équation  $3x + y - 2z = 0$ .

- Trouver des équations de la perpendiculaire abaissée de  $a$  sur  $\alpha$ .
- Quelles sont les coordonnées du point  $a'$  symétrique de  $a$  par rapport à  $\alpha$  ?
- Calculer la distance de  $a$  à  $\alpha$ .

**3.43.** Représenter les droites de  $\mathbb{R}^3$  d'équations

$$\begin{cases} z - 1 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y - 5 = 0 \\ z + 4 = 0 \end{cases}$$

sur un dessin.

**3.44.** Quelle sont dans  $\mathbb{R}^3$  les équations des plans bissecteurs des plans  $\alpha$  et  $\beta$

$$\alpha \equiv 6x - 6y + 7z = -21, \quad \beta \equiv 2x + 3y - 6z = 12 ?$$

**3.45.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , trouver l'angle entre les plans d'équations respectives  $3x+2y-5z=4$  et  $2x-3y+5z=8$ .

**3.46.** Donner dans  $\mathbb{R}^3$  des équations de la projection orthogonale de la droite d'équations

$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -4 + 3\lambda \end{cases}$$

sur le plan d'équation  $2x - 3y + z = 12$ .

**3.47.** Écrire l'équation de la sphère de  $\mathbb{R}^3$  centrée en  $(3, 6, -4)$  et tangente au plan  $2x - 2y - z - 10 = 0$ .

## Autres systèmes de coordonnées

**3.48.** Complétez le tableau suivant décrivant des points de  $\mathbb{R}^2$  en coordonnées cartésiennes et polaires.

| Coordonnées cartésiennes $(x, y)$ | Coordonnées polaires $(r, \theta)$ |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| $(1, 0)$                          |                                    |
| $(0, 1)$                          |                                    |
|                                   | $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$        |
| $(-1, -1)$                        |                                    |
|                                   | $(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$      |
|                                   | $(4, \frac{3\pi}{2})$              |

**3.49.** Complétez le tableau suivant décrivant des points de  $\mathbb{R}^3$  selon les coordonnées demandées :

| Cartésiennes $(x, y, z)$ | Cylindriques $(r, \phi, z)$             | Sphériques $(\rho, \theta, \phi)$   |
|--------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------|
| $(1, 0, 0)$              | $(1, 0, 0)$                             | $(1, 0, \frac{\pi}{2})$             |
| $(0, 1, 0)$              |                                         |                                     |
|                          | $(0, 0, 1)$                             |                                     |
|                          |                                         | $(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ |
|                          | $(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2})$ |                                     |
| $(-2, 2, 0)$             |                                         |                                     |

**3.50.** Dessiner les sous-ensembles de points du plan tels que leurs coordonnées polaires  $(r, \theta)$  satisfont les (in)équations suivantes.

- a.  $r < 1$                       c.  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$                       e.  $\frac{5\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{4}$  et  $2 \leq r \leq 3$ .  
b.  $1 \leq r \leq 2$                       d.  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$

**3.51.** Dessiner les sous-ensembles de points de l'espace tels que leurs coordonnées cylindriques  $(r, \phi, z)$  satisfont les (in)équations suivantes.

- a.  $r = 1$                       c.  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$                       e.  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  et  $r \leq 3$  et  $-1 \leq z \leq 1$ .  
b.  $1 \leq r \leq 2$                       d.  $z = 0$

**3.52.** Dessiner les sous-ensembles de points de l'espace tels que leurs coordonnées sphériques  $(\rho, \theta, \phi)$  satisfont les (in)équations suivantes.

- a.  $\rho \leq 1$                       b.  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$                       c.  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

## Chapitre 4

# Fonctions

**4.1.** Tracer le graphe des fonctions suivantes :

a.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \lceil x \rceil$  ;                      b.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow |x|$  ;                      c.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{x}{|x|}$ .

**4.2.** Déterminer le plus grand domaine possible de chacune des fonctions suivantes :

|                                                      |                                             |
|------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| a. $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$                          | f. $x \mapsto \sqrt{\sin x}$                |
| b. $x \mapsto \frac{x-1}{x^2-5x+6} + \sqrt[3]{2x+1}$ | g. $x \mapsto 2\sqrt{x} + \sqrt{6-x}$       |
| c. $x \mapsto \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$              | h. $x \mapsto x\sqrt{8-x^2}$                |
| d. $x \mapsto \sqrt{1+x} - 2\sqrt[4]{5-x}$           | i. $x \mapsto \sqrt{x^2-1} - \sqrt{16-x^2}$ |
| e. $x \mapsto \frac{x^2+1}{1+\sqrt{x^2-9}}$          | j. $x \mapsto 4\sqrt{ x }$                  |

**4.3.** Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui sont paires, impaires, périodiques, croissantes, décroissantes. Pour les fonctions périodiques, déterminer la période. Chacune des fonctions envoie  $x$  sur le  $y$  indiqué (ou encore :  $y = f(x)$ ) ;  $A, B$  et  $\lambda$  sont des constantes.

|                                              |                                                                              |
|----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| a. $y = x^2$                                 | i. $y = \cos 5x + \tan 5x$                                                   |
| b. $y = x^3$                                 | j. $y = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$                                 |
| c. $y =  \sin x $                            | k. $y = \sin^2 x$                                                            |
| d. $y = \sin  x $                            | l. $y = \sin x^2$                                                            |
| e. $y = \sec x$                              | m. $y = 3 \cos \left(\frac{1}{3}x\right) + 2 \sin \left(\frac{1}{2}x\right)$ |
| f. $y = x^3 \cos x$                          | n. $y = \sin 3x + 2 \sin 6x$                                                 |
| g. $y =  x  + \sin x$                        | o. $y = 3$                                                                   |
| h. $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ |                                                                              |

**4.4.** Pour les fonctions suivantes, déterminer celles qui sont injectives, surjectives, bijectives. Donner la fonction inverse de chacune des fonctions bijectives.

|                                                                            |                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| a. $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 5x$ ;                    | g. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \rightarrow  x $ ;           |
| b. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 2^x$ ;               | h. $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{Q} : x \rightarrow \frac{x}{ x }$ ; |
| c. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} : x \rightarrow \lceil x \rceil$ ;   | i. $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \rightarrow \sqrt{x}$ ;    |
| d. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} : x \rightarrow \lfloor x \rfloor$ ; | j. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x^3$ .             |
| e. $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \lfloor x \rfloor$ ; |                                                                          |
| f. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \sin x$ ;            |                                                                          |

**4.5.** Soit la fonction ci-après, définie sur  $[-1, 1]$  :

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Construire le graphe de la fonction  $g$  qui prolonge  $f$  et telle que le domaine de définition de  $g$  soit  $\mathbb{R}$  et la période de  $g$  soit 2.
- Cette fonction  $g$  est-elle paire ou impaire ?

**4.6.** Soient les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définies ci-dessous :

$$f : x \rightarrow x^2 + 1$$

$$h : x \rightarrow 2x$$

$$j : x \rightarrow e^x$$

$$g : x \rightarrow x^3 - x$$

$$i : x \rightarrow \sin x$$

- Calculer  $g \circ f$ ,  $f \circ g$ ,  $f^2$ ,  $h^4$ ,  $i \circ j$ ,  $j \circ i$ .
- Vérifier  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ .
- Que vaut  $(f \circ j \circ h \circ i \circ g)(x)$  ?

**4.7.** Soit la courbe de  $\mathbb{R}^2$  d'équation  $y = \log_a x$ .

- Quelle est la valeur de l'abscisse du point de la courbe où la tangente passe par l'origine ?
- Quelle valeur doit prendre  $a$  pour que cette tangente soit inclinée à  $45^\circ$  sur l'axe des  $x$  ?

**4.8.** Pour quelles valeurs du paramètre  $a$  les courbes d'équations  $y = e^{2x} + 1$  et  $y = 2ae^x$  ont-elles des points d'intersection ? Pour quelle(s) valeur(s) de  $a$  n'ont-elles qu'un seul point d'intersection ? Montrer qu'elles sont alors tangentes en ce point et écrire l'équation de la tangente commune.

**4.9.** Pour chacune des fonctions suivantes déterminer son domaine de définition, sa fonction réciproque, et le domaine de définition de la fonction réciproque.

$$\text{a. } y = \ln(\arccos x)$$

$$\text{c. } y = 10^{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$\text{b. } y = \arctan\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$$

$$\text{d. } y = e^{\sin 3x}$$

$$\text{e. } y = \arccos(e^{x+1})$$

**4.10.** Tracer le graphe de la fonction cosécante. Cette fonction est-elle périodique, continue ?

**4.11.** Considérons la fonction sécante appliquant  $x$  sur  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ .

- Esquisser son graphe.
- Déterminer les asymptotes.
- Proposer une définition de la fonction  $x \mapsto \operatorname{arcséc} x$ . Quel domaine a-t-elle ? Quelle est son image ?

**4.12.** Représenter les graphes des fonctions  $l$  et  $f$  définies par  $l(t) = \sin(2t + \pi)$  et  $f(t) = \sin(2t) + \pi$ .

**4.13.** Déterminer le plus grand domaine de définition possible des fonctions  $x \mapsto y = y(x)$  suivantes :

$$\text{a. } y = \operatorname{arccotg} 3x$$

$$\text{e. } y = \sin\left(\arccos \frac{x}{3}\right)$$

$$\text{b. } y = \arcsin 5x$$

$$\text{f. } y = \arccos\left(\frac{2x}{x+1}\right)$$

$$\text{c. } y = \arctan(\sin 3x)$$

$$\text{g. } y = \arccos(\tan 2x)$$

$$\text{d. } y = \arccos\left(\frac{3x}{x-2}\right)$$

$$\text{h. } y = \arcsin(\cot 3x)$$

**4.14.** Tracer le graphe de la fonction  $x \mapsto y = \sin x$ . En déduire les graphiques des courbes

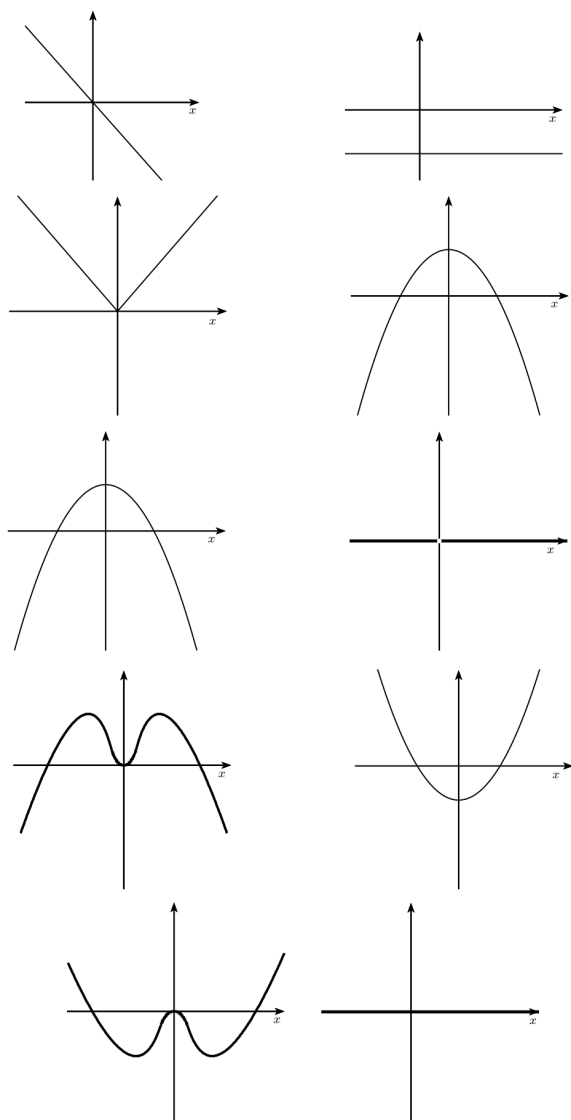
$$y = \sin 2x, \quad y = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

## Chapitre 5

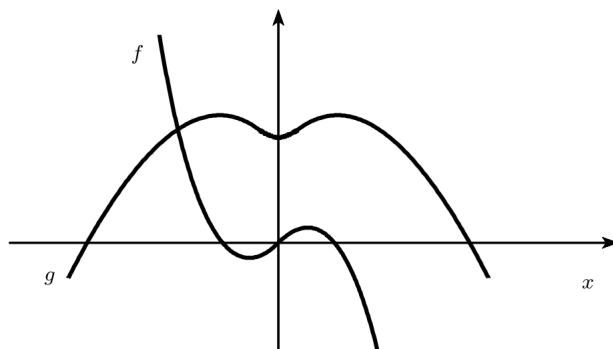
# Dérivées

### Definitions et calculs

**5.1.** Voici dans la colonne de gauche les graphes de cinq fonctions. La colonne de droite donne, dans le désordre, les graphes des dérivées secondes. Rétablissez l'ordre.



**5.2.** Voici, dans le même système d'axes, les graphes de deux fonctions  $f$  et  $g$ . Laquelle de ces deux fonctions est la dérivée de l'autre ?



**5.3.** Donner, pour chacune des fonctions  $x \mapsto y$  suivantes, le domaine de définition et la nature des points où la dérivée première s'annule ou devient infinie :

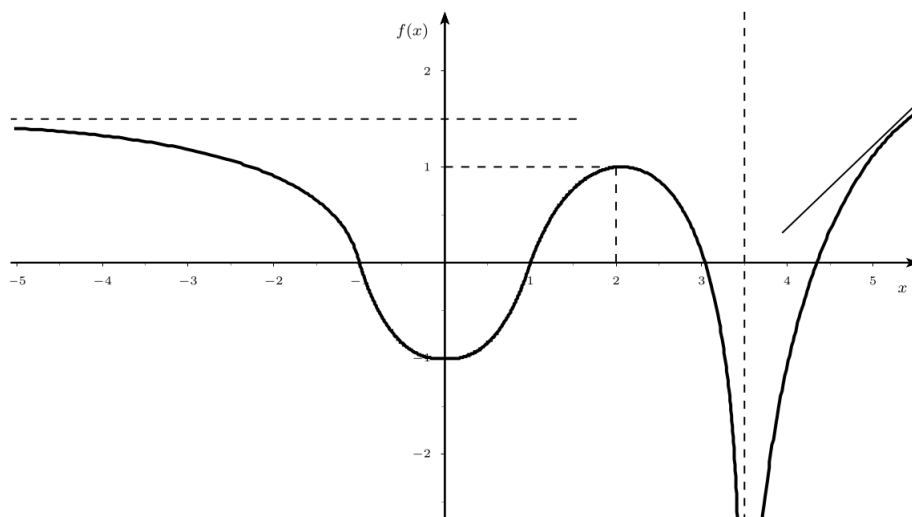
a)  $y = \sqrt{x^2(x+1)}$ ;    b)  $y = (x^3 - 3x + 2)^{1/3}$ ;    c)  $y = 2 + \sqrt[3]{x^2}$ .

**5.4.** Dans un même système de coordonnées, tracer les graphes de la fonction  $y = y(x)$  donnée et de sa dérivée, pour :

a)  $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ ;    b)  $y = \sin^2 x$ .

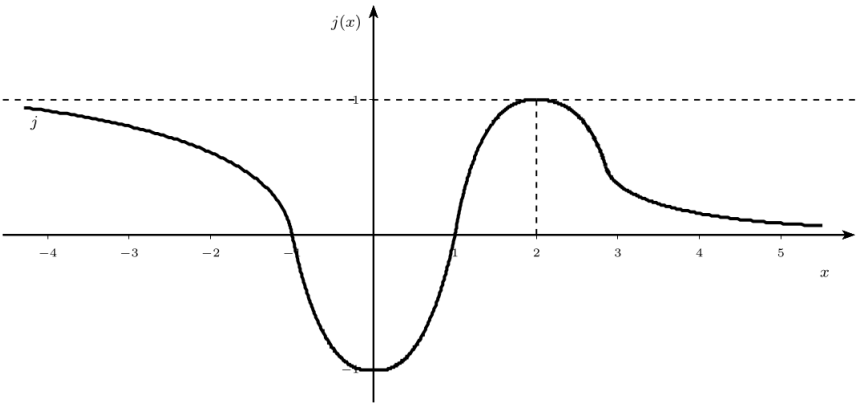
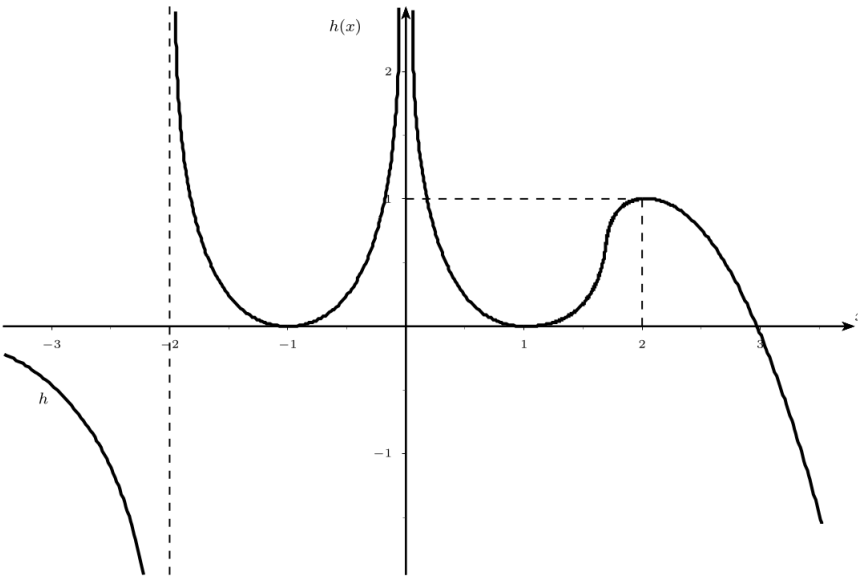
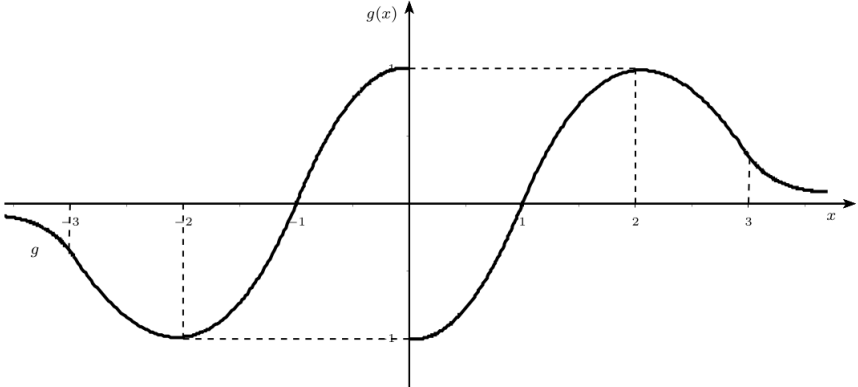
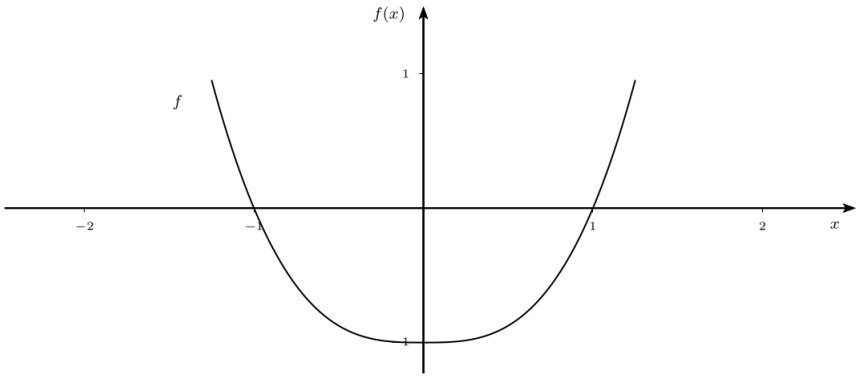
**5.5.** On donne le graphe d'une fonction  $x \mapsto f(x)$ . On demande de dessiner (allure grossière)

- |                                                  |                                                          |
|--------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| a. le graphe de la fonction $x \mapsto f(-x)$ ;  | e. le graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ ; |
| b. le graphe de la fonction $x \mapsto  f(x) $ ; | f. le graphe de la fonction $x \mapsto f'(x)$ .          |
| c. le graphe de la fonction $x \mapsto f( x )$ ; |                                                          |
| d. le graphe de la fonction $x \mapsto -f(x)$ ;  |                                                          |



**5.6.** On donne le graphe d'une fonction  $f$  (ou  $g$ , etc.). On demande de dessiner (allure grossière)

- le graphe de la fonction dérivée  $f'$  de  $f$ ;
- le graphe de la fonction  $\frac{1}{f}$ ;
- le graphe de la fonction dérivée  $\left(\frac{1}{f}\right)'$  de la fonction  $\frac{1}{f}$ .



**5.7.** Calculer, en utilisant la définition, les dérivées premières des fonctions appliquant  $x$  sur

$$\text{a) } y = x^2; \quad \text{b) } y = \sqrt{x}; \quad \text{c) } y = \frac{1}{2x+1}.$$

**5.8.** Calculer les dérivées premières des fonctions  $y = y(x)$  suivantes (où  $a, b$  et  $c$  sont des constantes) :

$$\text{a. } y = x^6 - 3x^4 + 19x^3 - 8x + 4$$

$$\text{b. } y = \frac{x^8}{8(1-x^2)^4}$$

$$\text{c. } y = (2x+1)(3x+2)\sqrt[3]{3x+2}$$

$$\text{d. } y = \frac{x(3x+2x^2)}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

$$\text{e. } y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\text{f. } y = \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}}$$

$$\text{g. } y = \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}$$

$$\text{h. } y = (2-x)(1-5x)$$

$$\text{i. } y = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$$

$$\text{j. } y = \frac{1}{8}(1+x^3)^{8/3} - \frac{1}{5}(1+x^3)^{5/3}$$

$$\text{k. } y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

$$\text{l. } y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$\text{m. } y = \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{n. } y = \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{\sqrt{1-x+x^2}}$$

**5.9.** Calculer les valeurs des dérivées première, deuxième et troisième des fonctions  $y = y(x)$  suivantes aux points indiqués.

$$\text{a. } y = x^4 + 6x^4 - x^3, \quad x = 2;$$

$$\text{b. } y = x^{3/2}, \quad x = 0;$$

$$\text{c. } y = x + \frac{1}{x}, \quad x = \frac{1}{2};$$

$$\text{d. } y = \frac{1+x^2-x^4}{\sqrt{1+x^2+x^2}}, \quad x = 1.$$

**5.10.** Calculer la dérivée première par rapport à  $x$  de

$$\text{a) } y = t^2 - 4t, \quad \text{si } t = \sqrt{2x^2+1};$$

$$\text{b) } y = t - 3t^2, \quad \text{si } t = \sqrt{x^2-6x+3};$$

$$\text{c) } y = \sqrt{3t^2-5t+4}, \quad \text{si } t = x^2.$$

**5.11.** Soit la courbe de  $\mathbb{R}^2$  d'équation  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$ . Quelles sont les pentes de ses tangentes aux points d'abscisse 1 et 2 ?

**5.12.** Former les équations des tangentes et des normales à la courbe d'équation  $y = (x-1)(x-2)(x-3)$  dans  $\mathbb{R}^2$ , aux points d'intersection avec l'axe des abscisses.

**5.13.** Déterminer les points où les tangentes à la courbe d'équation  $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$  dans  $\mathbb{R}^2$  sont parallèles à l'axe des abscisses.

**5.14.** Déterminer le(s) point(s) où la tangente à la courbe de  $\mathbb{R}^2$  d'équation

$$y = \frac{x}{1-x^2}$$

fait un angle de  $45^\circ$  avec  $ox$ .

**5.15.** Soit la courbe de  $\mathbb{R}^2$  d'équation  $y = x^2 + px + 5$ . Déterminer  $p$  pour que la tangente au point  $a$  d'abscisse  $-1$  soit parallèle à la première bissectrice. Écrire les équations de la tangente et de la normale en  $a$ .

**5.16.** On considère la courbe d'équation  $y = x^2 + px + q$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Déterminer  $p$  et  $q$  pour que cette courbe soit tangente à la droite d'équation  $y = x - 1$  au point  $(3, 2)$ .

**5.17.** Déterminer le(s) point(s) où la normale à la courbe  $y = x^3 + x$  est parallèle à  $x + 4y + 6 = 0$ . Pour chaque point, donner l'équation de la normale.

**5.18.** Déterminer les coordonnées du point de contact et l'équation de la tangente menée par l'origine à la courbe d'équation  $y = e^x$  dans  $\mathbb{R}^2$  (la dérivée de  $e^x$  vaut  $e^x$ ).

**5.19.** Déterminer  $b$  et  $c$  pour que les courbes de  $\mathbb{R}^2$  d'équations  $y = \frac{1-x}{1+x}$  et  $y = x^2 + bx + c$  se coupent perpendiculairement au point  $(0, 1)$ .

**5.20.** Si  $f$  est une fonction paire (impaire), est-ce que sa dérivée  $f'$  est impaire (paire). La réciproque est-elle vraie ?

**5.21.** Une fonction réelle d'une variable réelle est définie par

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

- Quel est le plus grand domaine de définition de la fonction  $f$  ?
- Étudier la croissance de la fonction  $f$ .
- Déterminer toutes les asymptotes au graphe de la fonction  $f$ .
- Tracer le graphe de la fonction  $f$ .
- Soit  $g$  la fonction inverse ou réciproque de la fonction  $f$  (définie de sorte que son domaine soit aussi grand que possible). Calculer une expression de la dérivée  $g'(t)$  sous forme de quotient de deux polynômes en  $t$ .

**5.22.** Esquisser, dans un système d'axes, les graphes des fonctions  $f, f', f^{-1}, (f^{-1})'$  si

- $f(x) = x^{1/3}$ ;
- $f(x) = x^{3/8}$ , pour  $x \geq 0$ .

**5.23.** Vérifier que

$$(x^2 e^x)^{(n)} = [(n-1)n + 2nx + x^2]e^x.$$

Calculer la 200ème dérivée de  $x^2 e^x$  en  $x = 1$ .

**5.24.** Calculer la valeur de chacune des fonctions suivantes au point indiqué :

- $y = 2 \cosh x - \sinh x$ , pour  $x = \frac{1}{2} \ln 3$
- $y = 3 \cosh x - 2 \sinh x$ , pour  $x = \frac{1}{2} \ln 2$
- $y = \cosh 2x + 2 \sinh 2x$ , pour  $x = \frac{1}{2} \ln 5$

**5.25.** Calculer les dérivées premières des fonctions  $x \mapsto y$  suivantes :

- |                                           |                                                                 |
|-------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| a. $y = \ln(x^2 + 1)$ ;                   | g. $y = x^{\ln x}$ ;                                            |
| b. $y = \ln(\ln x)$ ;                     | h. $y = \operatorname{sh} x \sin x$ ;                           |
| c. $y = \log_5 \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ ; | i. $y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$ ;                          |
| d. $y = 2^{\sqrt{x}}$ ;                   | j. $y = \ln[(2x^2 + 3)^{1/4}(x^3 - 6)^{1/3}(3x^4 + 7)^{1/2}]$ ; |
| e. $y = 5^{\operatorname{tg} 2x}$ ;       | k. $y = e^{\frac{1+x}{1-x}}$ .                                  |
| f. $y = x^{1/x}$ ;                        |                                                                 |

**5.26.** Vérifier que si  $y = e^{x^2}$ , alors

$$y^{(n)} = 2(n-1)y^{(n-2)} + 2xy^{(n)}$$

pour  $n > 1$ . Calculer la cinquième dérivée de  $e^{x^2}$  en  $x = 1$ .

**5.27.** Démontrer les identités suivantes :

- a.  $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$  ;
- b.  $\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}$  ;
- c.  $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$ .

**5.28.** Le passage par les logarithmes aide également au calcul des dérivées. Par exemple, soit  $f(x) = x^x$  ; de

$$\ln f(x) = x \ln x,$$

nous déduisons en dérivant par rapport à  $x$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln x) + \frac{x}{x},$$

donc

$$f'(x) = (1 + \ln x)f(x)$$

et

$$f'(x) = (1 + \ln x)x^x.$$

En utilisant la même méthode, calculer la dérivée de chacune des fonctions  $f$  données par

- a.  $f(x) = x^r$ , avec  $r \in \mathbb{R}$
- b.  $f(x) = \sqrt[5]{(x-3)^3(x+1)^2}$
- c.  $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x)$ , où  $f_1, f_2, f_3$  sont des fonctions dérivables
- d.  $f(x) = a^x$ , avec  $a \in \mathbb{R}$
- e.  $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$
- f.  $f(x) = (\sin x)^{\ln \tan x}$

**5.29.** Tracer dans un même système d'axes les graphes des fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique. Déterminer les asymptotes.

**5.30.** Tracer le graphe de la fonction sinus hyperbolique. Admet-il des asymptotes ? La fonction est-elle paire, impaire, périodique ?

**5.31.** Calculer les dérivées premières des fonctions  $y = y(x)$  suivantes (où  $a, b \in \mathbb{R}$ ) :

- a.  $y = \sin(x^2 + 1)$
- b.  $y = \cos \sqrt{1 - 2x}$
- c.  $y = \tan \sqrt{x}$
- d.  $y = \csc x \cot x$
- e.  $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$
- f.  $y = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$
- g.  $y = \sin nx \cdot (\sin x)^n$
- h.  $y = \sqrt{a \sin^2 x + b \cos^2 x}$
- i.  $y = \csc^4 x$
- j.  $y = \tan x - \cot x$
- k.  $y = \cos(\sin x)$
- l.  $y = \frac{\sin(a-x)}{\sin(a+x)}$
- m.  $y = \arcsin(5x)$
- n.  $y = \arccos\left(\frac{3x}{x-2}\right)$
- o.  $y = \arctan(\sin 3x)$
- p.  $y = \arccos\left(\frac{b+a \cos x}{a+b \cos x}\right)$ ,  $|a| > |b|$
- q.  $y = \sin\left(\arccos \frac{x}{3}\right)$

**5.32.** Calculer les valeurs des dérivées première, deuxième et troisième des fonctions  $y = y(x)$  suivantes aux points indiqués :

- a)  $y = \sin x \cos x$ , pour  $x = \frac{\pi}{3}$  ;
- b)  $y = 4 \sin x - 3 \cos x$ , pour  $x = 0$  ;
- c)  $y = \sin 3x \cos x$ , pour  $x = \frac{\pi}{4}$ .

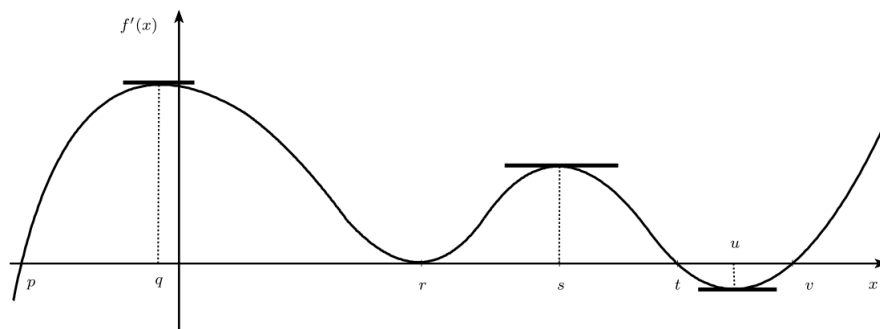
**5.33.** Prouver que la dérivée d'ordre  $n \geq 3$  de la fonction  $x \mapsto y = \arctan x$  satisfait la formule de récurrence

$$y^n = \frac{-2(n-1)xy^{n-1} - (n-1)(n-2)y^{n-2}}{1+x^2}$$

Calculer la valeur de la cinquième dérivée de  $\arctan x$  au point  $x = 1$ .

## Comportement de fonctions

**5.34.** Si le graphe ci-dessous est celui de la fonction dérivée  $f'$ , pour quelle(s) valeur(s) de  $x$  la fonction  $x \mapsto f(x)$  admet-elle



- a) un minimum local ?
- b) un maximum local ?
- c) un point d'inflexion à tangente horizontale ?
- d) un point d'inflexion ?

Sur quel sous-ensemble de l'intervalle  $[a, h]$  la fonction  $f$  est-elle

- e) croissante ?
- f) décroissante ?

**5.35.** Si les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  possèdent en tout point une dérivée seconde, lesquelles des assertions suivantes sont vraies ?

- a) Si  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x$  réel,  $f'(x) \leq g'(x)$  pour tout  $x$  réel.
- b) Si  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x$  réel,  $f''(x) \leq g''(x)$  pour tout  $x$  réel.
- c) Si  $f'(x) \leq g'(x)$  pour tout  $x$  réel,  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x$  réel.
- d) Si  $f(0) \leq g(0)$  et  $f'(x) \leq g'(x)$  pour tout  $x$  réel positif,  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x$  réel positif.

**5.36.** Déterminer les extrémums des fonctions  $y = y(x)$  suivantes :

- a)  $y = 2 \sin x + \cos 2x$  ;
- b)  $y = \sin^3 x + \cos^3 x$  ;
- c)  $y = x^2 + \frac{250}{x}$ .

**5.37.** Si la somme de deux nombres réels est 12, quelle est la plus grande valeur atteinte par leur produit ?

**5.38.** Prouver qu'un rectangle de périmètre donné a toujours une aire inférieure ou égale à celle du carré de même périmètre.

**5.39.** Un fermier désire clôturer un champ rectangulaire par du fil métallique sur trois côtés et par une haie sur le quatrième. S'il possède 2400 m de fil, quelle est la plus grande surface qu'il peut clôturer ?

**5.40.** Un carton publicitaire doit contenir  $54 \text{ cm}^2$  de texte imprimé. Si on laisse une marge de 1 cm en haut et bas de page, et de 1,5 cm de chaque côté, trouver les dimensions les plus économiques du carton. (NB : Le prix du carton est directement proportionnel à sa superficie !).

**5.41.** La somme de deux nombres est 12. Trouver ces nombres si

- a) la somme de leurs carrés est minimal ;
- b) le produit de l'un avec le carré de l'autre est maximal ;
- c) le produit de l'un avec le cube de l'autre est maximal.

**5.42.** Dans le plan euclidien  $\mathbb{R}^2$ , on considère le point  $c = (3, 5)$ . Par ce point on trace une droite  $D$  qui couple l'axe  $ox$  en un point  $a$  d'abscisse positive et l'axe  $oy$  en un point  $b$  d'ordonnée positive. Comment doit être la droite  $D$  pour que le triangle  $oab$  ait une aire minimum ?

**5.43.** Pour quelles valeurs de  $k$  la fonction  $x \mapsto y$  avec

$$y = \cos 2x + k \cos x$$

admet-elle un extrémum d'abscisse  $x = \frac{\pi}{3}$  ?

**5.44.** Déterminer la fonction sinusoïdale  $y = C \sin(x + \varphi)$  qui atteigne le maximum 2 pour  $x = 1$  et applique 0 sur 0.

**5.45.** Déterminer  $n$  pour que la fonction

$$y = (x - 6)^n e^x$$

admette un extrémum en  $x = 4$ . Quelle est la nature de cet extrémum ?

**5.46.** Déterminer les valeurs de  $p$  et  $q$  telles que la fonction appliquant  $x$  sur

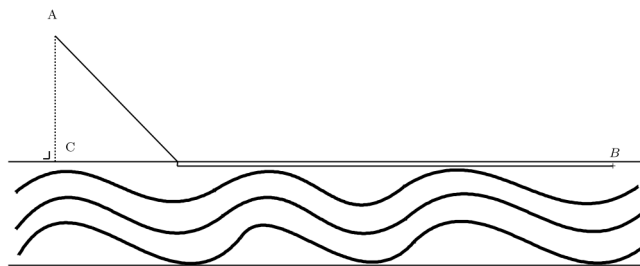
$$y = \frac{x^2 + px + q^2}{x}$$

ait deux extrémums de valeurs respectivement 0 et 4. Quelles valeurs de  $x$  donnent ces extrémums ? Quelles sont les natures de ces extrémums ?

**5.47.** Déterminer les points d'inflexion des courbes de  $\mathbb{R}^2$  d'équation

- a)  $y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$  ;
- b)  $y = e^{-x^2}$  ;
- c)  $y = \frac{\sin x}{\sin(x + \frac{\pi}{4})}$ .

**5.48.** Une personne doit se rendre de  $A$  en  $B$  sur la figure, d'abord en marchant à la vitesse  $v_1$ , puis en nageant dans le canal à la vitesse  $v_2$



Déterminez en fonction de  $v_1, v_2$  et de la longueur  $|CB|$  en quel point la personne doit se mettre à l'eau pour minimiser son temps de déplacement de  $A$  à  $B$ . Le bord du canal est supposé rectiligne.

**5.49.** Soit la fonction qui applique  $x$  sur

$$y = 2a \sin bx - a \sin bx.$$

Déterminez les constantes  $a$  et  $b$  pour que cette fonction applique 0 sur 0 et atteigne le maximum  $y = 2$  en  $x = 1$ .

**5.50.** Donner pour chacune des fonctions suivantes, le domaine de définition et la nature des points où la dérivée première s'annule ou devient infinie :

- a)  $y = \sqrt{x^2(x+1)}$ ;
- b)  $y = (x^3 - 3x + 2)^{1/3}$ ;
- c)  $y = 2\sqrt[3]{x^2}$ .

**5.51.** Soit la fonction  $f$  spécifiée par

$$f(x) = \frac{x^2 + (m-2)x - 10}{x^2 - 2x - 3}$$

où  $m$  est un paramètre réel ;

- a) donner son domaine de définition ;
- b) pour quelles valeurs de  $m$  la fonction  $f$  est-elle partout croissante ?
- c) pour quelles valeurs de  $m$  la fonction  $f$  possède-t-elle un maximum et un minimum ?
- d) les graphes de ces fonctions  $f$  passent-ils tous par un même point ? Si oui, lequel ?

**5.52.** Esquisser, dans un même système de coordonnées, le graphe de la fonction  $y = y(x)$  donnée et de sa dérivée :

- a)  $y = e^{x/2}$ ;
- b)  $y = \ln|x^2 - 1|$ .

**5.53.** Représenter dans un même système d'axes et sur le domaine  $[-2, 2]$  les fonctions  $f$  spécifiées par

- a)  $f(x) = 2^x$ ,  $f(x) = 2^{x-1}$ ;
- b)  $f(x) = 2^{|2x|}$ ,  $f(x) = 2^x - 1$ .

**5.54.** Faire le graphe des fonctions  $y = y(x)$  suivantes :

- |                                     |                                                   |                                         |
|-------------------------------------|---------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 1) $y = \frac{(x+1)^3}{x^2}$ ;      | 10) $y = \frac{x^2}{x-1}$ ;                       | 20) $y = x^2 e^{-x}$ ;                  |
| 2) $y = \frac{x^3 - x + 1}{x^2}$ ;  | 11) $y = \frac{x}{1+x^2}$ ;                       | 21) $y = \frac{\ln x}{x}$ ;             |
| 3) $y = 3x^{2/3} - 2x$ ;            | 12) $y = \sqrt{-x^2 - 1}$ ;                       | 22) $y = x \ln x$ ;                     |
| 4) $y = \sqrt{x^2(x+1)}$ ;          | 13) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ ;             | 23) $y = x \ln^2 x$ ;                   |
| 5) $y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ; | 14) $y = \left  \frac{(x+2)(x-1)}{x-2} \right $ ; | 24) $y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$ ; |
| 6) $y = \frac{x^3 - x + 1}{x^2}$ ;  | 15) $y = x^2(x-3)^{1/3}$ ;                        | 25) $y = \frac{1}{x} + 2 \ln x$ ;       |
| 7) $y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ ;   | 16) $y = \frac{(x+1)^2}{x^3}$ ;                   | 26) $y = \sqrt{x} \ln x$ ;              |
| 8) $y = \frac{x}{1+x^2}$ ;          | 17) $y = x^2 \arctan \frac{1}{1-x}$ ;             | 27) $y = 2 \ln x - 1 + \frac{1}{x}$ ;   |
| 9) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ ;        | 18) $y = x e^{1/x}$ ;                             | 28) $y = 2^{1/x}$ ;                     |
|                                     | 19) $y = x e^{-x^2}$ ;                            | 29) $y = \frac{e^x}{x}$ ;               |
|                                     |                                                   | 30) $y = \sqrt{x} e^x$ .                |

**5.55.** Soit  $f(x) = \sin(x)$ . Esquisser les graphes de  $f$  et de ses polynômes de Taylor à l'ordre 0, 1, 2 et 3 en 0.

## Chapitre 6

# Primitives

**6.1.** Soit  $f$  une fonction admettant comme primitive la fonction appliquant  $x$  sur  $2 \sin^2 x$ . Déterminer parmi les expressions suivantes celles qui représentent aussi une primitive de  $f$  :

- a.  $-\cos 2x$ ;                      b.  $-\cos^2 x$ ;                      c.  $\cos x^2$ ;                      d.  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ .

**6.2.** Soit  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Donner, par intégration immédiate, une primitive de la fonction envoyant la valeur réelle  $x$  sur

- |                              |                                  |                                                   |                                  |
|------------------------------|----------------------------------|---------------------------------------------------|----------------------------------|
| a. $\cos x$ ;                | g. $e^{-x+5}$ ;                  | m. $\frac{1}{\sin^2(x)}$ ;                        | s. 1993;                         |
| b. $\sin(3x - 2)$ ;          | h. $e^{\sin x} \cos x$ ;         | n. $(\operatorname{ch} x)(\operatorname{sh} x)$ ; | t. $e^x \cos(e^x)$ ;             |
| c. $x^5$ ;                   | i. $2^x$ ;                       | o. $\frac{x}{5x^2 - 1}$ ;                         | u. $\frac{1}{a^2 - x^2}$ ;       |
| d. $\frac{1}{6x + 11}$ ;     | j. $\operatorname{sh}(-x + 6)$ ; | p. $\frac{\sin x}{\cos^3 x}$ ;                    | v. $\frac{\arctan x}{1 + x^2}$ . |
| e. $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ ; | k. $\frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ ;  | q. $\cot(x)$ ;                                    |                                  |
| f. $\frac{1}{\cos^2 9x}$ ;   | l. $\frac{1}{a^2 + x^2}$ ;       | r. 0;                                             |                                  |

**6.3.** Calculer, en décomposant l'intégrande :

- a.  $\int (x + \sqrt{x}) dx$ ;                      c.  $\int \cos^2(x - 2) dx$ ;  
b.  $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}\right) dx$ ;                      d.  $\int \tan^2 x dx$ .

**6.4.** Calculer, par changement de variable :

- |                                         |                                                    |                                                                |
|-----------------------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| a. $\int e^{5x-3} dx$ ;                 | f. $\int \frac{\cos x}{5 + \sin^2 x} dx$ ;         | k. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}$ ; |
| b. $\int x^2(1 - x^3)^2 dx$ ;           | g. $\int \frac{dx}{x \ln x}$ ;                     | l. $\int \frac{x^4 + 1}{\cos^2(x^5 + 5x)} dx$ ;                |
| c. $\int x \operatorname{tg}(x^2) dx$ ; | h. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$ ; | m. $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$ ;                      |
| d. $\int \sin^2 x \cos x dx$ ;          | i. $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ ;  | n. $\int \frac{1 - \arctan x}{1 + x^2} dx$ ;                   |
| e. $\int \frac{x}{a^2 - x^2} dx$ ;      | j. $\int 2^{x^2} x dx$ ;                           | o. $\int (\cot g x)(\ln  \sin x ) dx$ .                        |

**6.5.** Calculer

$$\int \frac{2e^{1/x}}{x^2} dx,$$

puis déterminer toutes les fonctions  $x \mapsto f(x)$  telles que

$$f'(x) = \frac{2e^{1/x}}{x^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

**6.6.** Intégrer par parties la fonction appliquant  $x$  sur

- |                             |                                      |                            |
|-----------------------------|--------------------------------------|----------------------------|
| a. $x e^x$                  | g. $x^n \ln x$ où $n \in \mathbb{N}$ | m. $\ln x$                 |
| b. $x^2 \ln x$              | h. $x \operatorname{tg}^2 x$         | n. $\arctan x$             |
| c. $\arcsin x$              | i. $\sqrt{x^2 - 1}$                  | o. $\frac{\arcsin x}{x^2}$ |
| d. $x \arctan x$            | j. $x\sqrt{1+x}$                     | p. $\frac{x}{\cos^2 x}$    |
| e. $e^x \sin x$             | k. $e^{\arcsin x}$                   |                            |
| f. $\frac{1}{x} \ln(\ln x)$ | l. $x^2 \ln(x^6 - 1)$                |                            |

**6.7.** Calculer les intégrales indéfinies (de la forme  $\int \frac{dx}{Q}$  avec  $Q$  trinôme du second degré en  $x$ ) :

- |                                      |                                          |                                                      |
|--------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| a. $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 4}$   | f. $\int \frac{dx}{x^2 + 6x - 7}$        | k. $\int \frac{dx}{4x - x^2}$                        |
| b. $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 1}$    | g. $\int \frac{3x + 1}{1 - 4x^2} dx$     | l. $\int \frac{(2 - x)dx}{4x^2 + 4x - 3}$            |
| c. $\int \frac{dx}{4 + 16x^2}$       | h. $\int \frac{3x - 1}{x^2 + 2x + 5} dx$ | m. $\int \frac{(2x - 3)dx}{4x^2 - 11}$               |
| d. $\int \frac{dx}{2 - x^2}$         | i. $\int \frac{x + 4}{x^2 + 6x + 5} dx$  | n. $\int \frac{1}{b - t^2} dt$ où $b \in \mathbb{R}$ |
| e. $\int \frac{dx}{4x^2 - 12x + 10}$ | j. $\int \frac{7x + 1}{6x^2 + x - 1} dx$ |                                                      |

**6.8.** Calculer les intégrales indéfinies (de la forme  $\int \frac{L}{Q} dx$  ou  $\int \frac{L}{\sqrt{Q}} dx$ , avec  $L$  et  $Q$  polynômes en  $x$  de degrés 1 et 2 respectivement) :

- |                                                 |                                              |                                             |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------------|---------------------------------------------|
| a. $\int \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} dx$          | c. $\int \frac{3x + 5}{\sqrt{x(2x - 1)}} dx$ | d. $\int \frac{x - 1}{x^2 + 2x + 1} dx$     |
| b. $\int \frac{x + 3}{\sqrt{3 + 4x - 4x^2}} dx$ |                                              | e. $\int \frac{6x + 5}{\sqrt{9x^2 + 1}} dx$ |

**6.9.** Décomposer en fractions simples les fonctions rationnelles de  $x$  données par :

- |                              |                                     |
|------------------------------|-------------------------------------|
| a. $\frac{2x - 1}{x^2 - 1};$ | b. $\frac{2x - 1}{(x - 2)(x + 3)}.$ |
|------------------------------|-------------------------------------|

**6.10.** Calculer les intégrales indéfinies de fonctions rationnelles :

- |                                           |                                     |                                            |
|-------------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------------|
| a. $\int \frac{dx}{x^2 + 4};$             | c. $\int \frac{dx}{3x^2 - x + 1};$  | e. $\int \frac{(2x + 3)dx}{x^2 - 5x + 6};$ |
| b. $\int \frac{2x^2 - x + 2}{2x + 3} dx;$ | d. $\int \frac{x^3 dx}{(x - 1)^2};$ | f. $\int \frac{(3x - 1)dx}{x^2 - 2x + 5};$ |

**6.11.** Calculer les intégrales indéfinies de fonctions rationnelles :

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \int \frac{2x^2 - x + 2}{2x + 3} dx ; & \text{c. } \int \frac{x^3 dx}{(x-1)^2} ; \\ \text{b. } \int \frac{dx}{x^2 - 4} ; & \text{d. } \int \frac{(2x+3)dx}{x^2 - 5x + 6} . \end{array}$$

**6.12.** Calculer les intégrales indéfinies (de fonctions rationnelles en  $\sin x$  et  $\cos x$ ) :

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \int \cos^3 x dx ; & \text{h. } \int \frac{\cos^2 x}{\cos 2x} dx ; & \text{o. } \int \sqrt{1 - \cos x} dx ; \\ \text{b. } \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx ; & \text{i. } \int \frac{\cos x}{\sin^2 x + \tan^2 x} dx ; & \text{p. } \int \cos^2 \frac{x}{2} dx ; \\ \text{c. } \int \frac{dx}{1 + \sin x} ; & \text{j. } \int \cos^3 x \sin^3 x dx ; & \text{q. } \int \frac{dx}{1 + \cos x} ; \\ \text{d. } \int \tan^2 x dx ; & \text{k. } \int \cos^2 x dx ; & \text{r. } \int \frac{\cos^3 x dx}{1 - \sin x} ; \\ \text{e. } \int \sin 5x \cos 3x dx ; & \text{l. } \int (\cos x + \sin x)^5 dx ; & \text{s. } \int \tan x \frac{1}{\sqrt{\cos x}} dx ; \\ \text{f. } \int \frac{dx}{\sin x \cos x} ; & \text{m. } \int \frac{dx}{\cos x} ; & \text{t. } \int \frac{dx}{1 + \sin x \cos x} . \\ \text{g. } \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} ; & \text{n. } \int \frac{dx}{\sin x} ; & \end{array}$$

**6.13.** Calculer

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \int \sin(\ln x) dx ; & \text{f. } \int x^2 e^{3x} dx ; & \text{k. } \int x^5 \sqrt[4]{1 + 2x^3} dx ; \\ \text{b. } \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx ; & \text{g. } \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3 - x^2}} ; & \text{l. } \int 4x^3 (\ln x)^2 dx ; \\ \text{c. } \int \frac{\cos x dx}{1 + \cos x} ; & \text{h. } \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}} ; & \text{m. } \int \frac{dx}{x^4 - 1} ; \\ \text{d. } \int x\sqrt{2 + 3x} dx ; & \text{i. } \int x \arcsin x dx ; & \text{n. } \int \arctan x dx . \\ \text{e. } \int (3x^2 + 1)^4 x dx ; & \text{j. } \int \frac{\ln 2x}{\ln 4x} \frac{dx}{x} ; & \end{array}$$

## Chapitre 7

# Complexes

**7.1.** Effectuer les opérations suivantes.

- |                          |                     |                       |                                        |
|--------------------------|---------------------|-----------------------|----------------------------------------|
| a. $(1+i) + (3-2i) - 4i$ | d. $(3+2i)^2$       | g. $\frac{2+i}{4-3i}$ | i. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{10}$ |
| b. $(2-3i)(3-2i)$        | e. $(1-i)^3$        |                       |                                        |
| c. $(3-i)(3+i)$          | f. $\frac{1}{3-5i}$ | h. $\frac{1-i}{i}$    |                                        |

**7.2.** Calculer les racines carrées de :

- |        |          |               |                |
|--------|----------|---------------|----------------|
| a. $i$ | b. $50i$ | c. $-5 - 12i$ | d. $-21 + 20i$ |
|--------|----------|---------------|----------------|

**7.3.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes.

- |                                      |                             |
|--------------------------------------|-----------------------------|
| a. $6x^2 - 12x + 7 = 0$              | f. $x^4 - 1 = 0$            |
| b. $2x^4 + x^2 - 1 = 0$              | g. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$  |
| c. $x^2 - x(4-i) + 5 + i = 0$        | h. $x^2 - (2+3i)x + 6i = 0$ |
| d. $x^2 + x + 3\sqrt{2}i = 0$        | i. $x^3 - 1 = 0$            |
| e. $x^2 - (4 \pm 2i)x + 12 + 4i = 0$ | j. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$     |

**7.4.** On considère l'équation :

$$z^3 - (1+8i)z^2 - (15-8i)z + 15 = 0.$$

- Cette équation admet une racine réelle. Quelle est cette racine ?
- Rechercher toutes les racines de cette équation dans le champ des nombres complexes.

**7.5.** Calculer en se servant de la représentation polaire

- |                                           |                                              |
|-------------------------------------------|----------------------------------------------|
| a. $(3+3i)(-1+i\sqrt{3})$ ;               | e. les racines cubiques de $1+i$ ;           |
| b. $\frac{-2-2i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}$ ; | f. les racines cubiques de $2+2\sqrt{3}i$ ;  |
| c. $(-1+i\sqrt{3})^{10}$ ;                | g. les racines quatrièmes de $1+i\sqrt{3}$ ; |
| d. les racines carrées de $3-4i$ ;        | h. les racines sixièmes de $-27i$ .          |

**7.6.** Soit les ensembles  $A, B$  et  $C$  formés respectivement par les nombres complexes  $z$  satisfaisant

$$|z-2| \leq 1, \quad |z-i| \leq 2 \quad \text{et} \quad |z-(2+2i)| \leq 2.$$

Représenter géométriquement ces ensembles dans le plan de Gauss.

**7.7.** Démontrer que deux nombres complexes non réels sont conjugués ssi la somme et le produit de ces nombres sont réels.

**7.8.** Soit  $z = 1 - i\sqrt{3}$ .

- Que vaut  $z^5$  ?
- Déterminer le plus petit nombre naturel strictement positif  $n$  tel que  $z^n$  soit réel.
- Montrer qu'aucune puissance de  $z$  n'est imaginaire pure.

**7.9.** Trouver toutes les solutions complexes de l'équation

$$z(z-2)^3 = 8z.$$

Représenter ces solutions dans le plan de Gauss et montrer que les points obtenus sont situés sur un cercle. Donner l'équation de ce cercle.

**7.10.** Trouver tous les nombres complexes  $z$  tels que  $z^2$  soit une racine carrée de  $z$ .

**7.11.** Où est l'erreur dans le raisonnement suivant ? Partons de  $i = i$  ; donc  $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$ . Comme  $-1 = \frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$ , on a  $\sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}}$ . Il en résulte que  $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$  et  $\frac{i}{1} = \frac{1}{i}$ , d'où  $i^2 = 1$ .

**7.12.** Combien existe-t-il de nombres complexes  $z$  tels que  $z^6 = 3$  ? Donnez les modules et les arguments de tous ces nombres.

**7.13.** Comment se simplifie l'équation  $x^3 - 3ix^2 - 3x - 7i = 0$  si l'on y remplace  $x$  par  $x + i$  ? En déduire les trois racines de l'équation initiale.