

Syllabus d'exercices, MathF11~~2~~³ [Version 202~~6~~⁷-2~~4~~⁵]

Le présent document est le syllabus d'exercices du Cours de Math F11~~2~~³. Il est adapté du syllabus d'exercices du cours de Math F112 par E. Robinson, lui-même issu du syllabus de J.-P. Doignon pour le cours de Math F107, adapté par N. Richard et modifié au cours des dernières années par J. Mulpas et J. De Saedeleer.

Attention, les numéros et noms des chapitres de ce document ne correspondent pas exactement à ceux du cours.

Table des matières

1 Logique	3
2 Nombres	9
3 Fonctions	12
4 Fonctions logarithmes	14
5 Trigonométrie	18
6 Géométrie	20
7 Fonctions trigonométriques	25
8 Limites, asymptotes et continuité	27
9 Fonctions dérivables	30
10 Utilisation des dérivées	35
11 Primitives	39
12 Intégrale de Riemann	42
13 Matrices	46
14 Systèmes d'équations linéaires	48
15 Fonctions vectorielles d'une variable réelle	50
16 Fonction réelles de plusieurs variables	53

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	2
17 Optimisation à deux variables	56
18 Intégrales multiples	57
19 Complexes	59
20 Équations différentielles	61
A Listes d'exercices	67

Chapitre 1

Logique

1.1. Traduisez chacune des affirmations suivantes par une formule logique en utilisant les lettres indiqués et les symboles $\rightarrow$ (« implique »), $\vee$ (« ou »), $\wedge$ (« et ») et, si nécessaire, le symbole $\neg$ (« non »).

- a. Un lapin blanc est toujours gentil. (B,G)
Réponse (exemple) : $B \rightarrow G$ (« être un lapin blanc implique d'être gentil »)
- b. Les paresseux réussiront seulement si les examens sont simples. (R,S)
Réponse (exemple) : $R \rightarrow S$ est une réponse correcte. Une autre réponse correcte est « $\neg S \rightarrow \neg R$ » mais attention ! *La réponse $S \rightarrow R$ est fausse ! Le mot « seulement » a ici son importance.*
- c. S'il pleut ou neige, le match sera annulé. (P,N,A)
- d. Pour que deux vecteurs soient orthogonaux, il faut et il suffit que leur produit scalaire soit nul. (O,N)
- e. La fonction est continue si elle est dérivable. (C,D)
- f. La différentiabilité de f en p_0 entraîne la continuité de f en p_0 . (D,C)
- g. Pour que f admette un extrémum en p_0 , il faut que $\frac{\partial f}{\partial x}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. (E,N)
- h. Pour qu'il y ait indépendance du chemin, il suffit que certaines conditions techniques soient satisfaites et que le rotationnel soit nul. (I,T,N)
- i. Une condition nécessaire pour qu'il y ait indépendance du chemin est que le champ de vecteurs dérive d'un potentiel scalaire. (I,P)
- j. Une condition suffisante pour qu'une matrice $n \times n$ soit diagonalisable est qu'elle admette n valeurs propres distinctes. (D,V)

1.2. Une énorme quantité de marchandise avait été dérobée dans un magasin. Le voleur (ou les voleurs) s'était enfui en voiture. Trois malfaiteurs notoires A, B, C furent convoqués à Scotland Yard pour y être interrogés. On put établir les faits suivants de façon certaine :

- a. Nul autre que A, B, C n'avait pu participer au cambriolage.
- b. C ne faisait jamais un coup sans la complicité de A.
- c. B ne savait pas conduire.

A était-il innocent ou coindupable ?

1.3. Déterminez lesquelles des argumentations suivantes sont correctes.

- a. Luc a reçu une lettre. Si Luc est promu, il doit recevoir une lettre. Donc Luc a été promu.
- b. Si le prix de l'essence augmente, le coût de la vie augmente. Lorsque le coût de la vie augmente, la popularité du gouvernement baisse. Donc, si l'essence devient plus chère, le gouvernement perd en popularité.
- c. Une augmentation du prix du pain ou du thé est prévue. Comme le pain coûte plus cher, le prix du thé est inchangé.
- d. Lise vient de réussir l'interrogation de mathématiques. Lorsque Lise réussit un test, Jacques est heureux. Donc Jacques est heureux.

- e. Cédric se prend pour Napoléon. Seuls les fous se prennent pour Napoléon. Donc Cédric est fou.
- f. Si un nombre est divisible par 4, il est pair. Comme le nombre donné n'est pas divisible par 4, il n'est pas pair.
- g. Si un nombre est divisible par 4, il est pair. Comme le nombre donné n'est pas pair, il n'est pas divisible par 4.

1.4. Traduisez en formules mathématiques les affirmations suivantes.

- a. L'addition de nombres entiers est commutative.
- b. Tout nombre réel strictement supérieur à 1 est inférieur à son carré.
- c. La soustraction de nombres réels n'est pas commutative.
- d. L'addition membre à membre de deux inégalités de même sens fournit encore une inégalité de même sens.

1.5. Parmi les énoncés ci-dessous, lesquels sont équivalents au premier ?

- a. Si $a = b$, alors $N > 0$.
- b. Si $N \leq 0$, alors $a = b$.
- c. Si $N > 0$, alors $a = b$.
- d. Si $a \neq b$, alors $N \leq 0$.
- e. Si $N \leq 0$, alors $a \neq b$.
- f. $N > 0$ est une condition nécessaire pour que a et b soient égaux.
- g. $a = b$ est une condition nécessaire pour que N soit strictement supérieur à 0.
- h. $a = b$ est une condition suffisante pour que N soit strictement supérieur à 0.
- i. Pour que N soit strictement supérieur à 0, il faut que a et b soient égaux.
- j. Pour que N soit strictement supérieur à 0, il faut que a ne soit pas différent de b .

1.6. Lesquelles des argumentations suivantes sont correctes ?

- a. La plupart des étudiants pratiquent un sport. Fabrice, qui est étudiant, pratique donc un sport.
- b. Tout étudiant a le droit de vote. Hélène, qui a pris part au vote, est donc une étudiante.
- c. Tous les rubis sont rouges, et toutes les émeraudes vertes. Une pierre précieuse bleue est donc soit un rubis, soit une émeraude.
- d. Aucun astrologue n'est homme de science. Donc aucun homme de science n'est astrologue.
- e. Tout astrologue est un charlatan. Donc tout charlatan est astrologue.
- f. Tous les schtroumpfs déjà rencontrés sont bleus ou noirs. Il n'y a donc pas de schtroumpf rouge.

1.7. Pour un certain cours, un étudiant réussit si et seulement s'il obtient au moins 10 à l'examen écrit. Lesquelles des affirmations suivantes sont correctes ?

- a. Une condition nécessaire pour réussir est d'obtenir au moins 10.
- b. Une condition suffisante pour réussir est d'obtenir au moins 10.
- c. Une condition nécessaire et suffisante pour réussir est d'obtenir au moins 10.
- d. Si un étudiant obtient au moins 10, il réussit.
- e. Si un étudiant obtient moins de 10, il échoue.

1.8. Exprimez par une formule logique les assertions suivantes :

- a. Aucun voleur n'est admiré.
- b. Ce ne sont pas tous les voleurs qui sont admirés.
- c. Aucune personne n'est admirée si elle est un voleur.
- d. Un voleur n'attire aucune admiration.

Certaines de ces assertions sont-elles logiquement équivalentes ?

1.9. En utilisant les abréviations

$\mathbb{N}$ pour l'ensemble des nombres naturels,

$P(x)$ pour « x est pair »,

$I(x)$ pour « x est premier »,

traduisez en formules logiques les assertions suivantes :

- a. Il existe un nombre naturel pair ;
- b. Il existe un nombre naturel pair et premier ;
- c. Il est faux que tout nombre naturel pair est premier,
- d. Il existe un seul nombre naturel à la fois pair et premier.

1.10. Considérons l'assertion

Tous les gaz ont un comportement de gaz parfait lorsque leur température absolue excède la constante universelle C .

Déterminez, parmi les phrases suivantes, la négation de cette assertion.

- Il existe un gaz dont le comportement n'est pas celui d'un gaz parfait lorsque sa température n'excède pas C .
- Il existe un gaz dont le comportement n'est pas celui d'un gaz parfait lorsque sa température excède C .
- Tous les gaz ont un comportement qui n'est pas celui d'un gaz parfait lorsque leur température n'excède pas C .
- Tous les gaz ont un comportement qui n'est pas celui d'un gaz parfait lorsque leur température excède C .

1.11. Pour C et n fixés, considérons l'assertion suivante :

Tous les algorithmes de tri requièrent au moins C comparaisons pour trier n clés dans le pire des cas.

Quelle est la négation de cette assertion ?

- Il existe un algorithme de tri qui trie toujours n clés en faisant au plus $C - 1$ comparaisons.
- Il existe un algorithme de tri qui trie toujours n clés en faisant au moins C comparaisons dans le pire des cas.
- Tous les algorithmes de tri requièrent toujours au plus $C - 1$ comparaisons pour trier n clés.
- Tous les algorithmes de tri requièrent toujours au moins C comparaisons pour trier n clés.

1.12. S'il est vrai que « Certains x ne sont pas des y » et que « Tous les z sont des y », il résulte que

- Certains x ne sont pas des z
- Certains x sont des z
- Certains z ne sont pas des x
- Aucun z n'est un x

Pour chacune de ces affirmations, indiquez si elle est vraie ou fausse.

1.13. Laquelle des quatre propositions ci-dessous est la négation de « Tous les guichets sont ouverts tous les jours » ?

- Il y a un jour où tous les guichets sont fermés
- Il y a au moins un guichet qui est fermé au moins un jour
- Tous les guichets sont fermés tous les jours
- Chaque guichet est fermé au moins un jour

1.14. Quelle est la négation de l'affirmation « Tous les guichets sont ouverts tous les jours de la semaine » ?

- Aucun guichet n'est ouvert tous les jours de la semaine
- Un seul guichet est ouvert au moins un jour de la semaine
- Un guichet au moins est fermé tous les jours de la semaine
- Un seul guichet est ouvert tous les jours de la semaine
- Un guichet au moins est fermé au moins un jour de la semaine

1.15. Chacun des cartons représentés ci-dessous porte sur une face une lettre et sur l'autre un nombre.

A

M

3

6

Pour vérifier si la phrase suivante est vraie : « Si un carton porte une voyelle sur une face, alors il porte un nombre pair sur l'autre »,

- il faut retourner tous les cartons ;
- il suffit de retourner A et 3 ;
- il suffit de retourner A et M ;
- il suffit de retourner A et 6.

1.16. A, B, C sont des personnes apparentées. Le père de A figure parmi elles, de même qu'une fille de B et le jumeau de C . Sachant que C et son jumeau sont de sexes différents et que C n'est pas enfant de B , quelle est la personne dont le sexe diffère des deux autres ?

- A
- B
- C
- Le problème posé n'admet pas de solution.

1.17. La négation de $\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N : |f(n)| < \epsilon$ est

- $\forall \epsilon > 0, \nexists N$ tel que $\forall n \geq N : |f(n)| < \epsilon$
- $\exists \epsilon > 0$, tel que $\forall N, \exists n \geq N : |f(n)| \geq \epsilon$
- $\forall \epsilon > 0, \exists N$ tel que $\forall n \geq N : |f(n)| \geq \epsilon$
- $\exists N$ tel que $\forall \epsilon > 0, \exists n \geq N : |f(n)| \geq \epsilon$

1.18. Quatre individus, dont l'un a commis un vol, sont arrêtés par la police et font les déclarations suivantes :

Alain : « Bernard est coupable »

Bernard : « Daniel est coupable »

Charles : « Je ne suis pas coupable »

Daniel : « Bernard ment lorsqu'il dit que je suis coupable »

Sachant qu'une seule de ces déclarations est vraie, qui est coupable du vol ?

1.19. Voici cinq propositions. Laquelle n'est logiquement équivalente à aucune des quatre autres ?

- Si tu triches, j'abandonne le jeu.
- Tu triches et je n'abandonne pas le jeu.
- Si tu ne joues pas honnêtement, j'abandonne le jeu.
- Tu ne triches pas ou j'abandonne le jeu.
- Si je continue à jouer, alors tu ne triches pas.

1.20. En admettant qu'une forêt possède un million d'arbres feuillus et qu'un arbre feuillu possède un nombre de feuilles compris entre 0 et 200.000, lesquelles des affirmations suivantes sont certainement vraies ?

- Deux arbres de cette forêt ne peuvent jamais posséder le même nombre de feuilles.
- La forêt comprend un arbre ayant une seule feuille.
- La forêt comprend au moins deux arbres ayant le même nombre de feuilles.
- La forêt comprend des arbres non feuillus.

1.21. Vous voilà capturé par des anthropophages ! Leur chef vous déclare : « Tu as le droit de dire une seule phrase. Si tu as menti, tu seras bouilli. Si tu n'as pas menti, tu seras rôti ». Quelles sont, parmi les phrases suivantes celles qui vous permettront de n'être ni bouilli ni rôti ?

- Je serai bouilli
- Je ne serai pas bouilli
- Je serai rôti
- Je ne serai pas rôti

1.22. Sachant que tous les bacilles sont des microbes et que certains bacilles sont pathogènes, vous pouvez en déduire que

- tous les microbes sont pathogènes
- aucun microbe n'est pathogène
- certains bacilles pathogènes ne sont pas des microbes
- certains microbes sont pathogènes
- aucun microbe pathogène n'est un bacille

1.23. Quelle est la négation de la proposition suivante : « Toutes les Suédoises sont blondes et ont des yeux bleus » ?

- Il existe une Suédoise qui n'est pas blonde et n'a pas les yeux bleus ;
- Il existe une Suédoise qui n'est pas blonde ou n'a pas les yeux bleus ;
- Aucune Suédoise n'est blonde et n'a les yeux bleus ;
- Aucune Suédoise n'est blonde ou n'a les yeux bleus ;
- Certaines Suédoises ne sont pas blondes et n'ont pas les yeux bleus.

1.24. L'affirmation « *s'il pleut, alors je reste à la maison* » est vraie. Parmi les propositions suivantes, laquelle est en contradiction avec cette affirmation ?

- « Il pleut et je reste à la maison »
- « Il ne pleut pas et je reste à la maison »
- « Il pleut et je sors »
- « Il ne pleut pas et je sors »
- Aucune de ces propositions.

1.25. Dans un questionnaire à choix multiple, chaque question est proposée avec 5 réponses A, B, C, D, E dont une seule est correcte. Pour l'une des questions, un candidat a remarqué que C implique B (c'est-à-dire que si la réponse C est vraie, B l'est aussi). Il peut en déduire :

- que la réponse B est incorrecte ;
- que la réponse C est incorrecte ;
- que les réponses B et C sont incorrectes ;
- que la bonne réponse est soit B, soit C ;
- aucune des affirmations ci-dessus.

1.26. « Dans toutes les prisons, il y a un détenu qui n'aime aucun gardien ». Si on suppose que cette affirmation est fausse, cela signifie que

- Dans toutes les prisons, il y a un détenu qui aime tous les gardiens

- Il existe une prison dans laquelle tous les détenus aiment tous les gardiens
- Il existe une prison dans laquelle aucun détenu n'aime tous les gardiens
- Dans toutes les prisons, aucun détenu n'aime tous les gardiens
- Il existe une prison dans laquelle chaque détenu aime au moins un gardien

1.27. En Italie, au XVIème siècle, il n'y avait que deux familles de fabricants de coffrets : Bellini et ses fils d'une part, Cellini et ses fils d'autre part. Chaque fois que Bellini ou un de ses fils avaient terminé un coffret, ils y gravaient une inscription vraie. Cellini et ses fils, eux, gravaient sur leurs coffrets une inscription fausse. Un coffret porte l'inscription : « Ce coffret n'a pas été fait par un fils de Bellini ». Qui a fabriqué ce coffret ?

- Bellini ;
- Cellini ;
- un fils de Bellini ;
- un fils de Cellini ;
- les données ne sont pas suffisantes pour répondre à la question.

1.28.

- « Louise possède au moins 100 livres », dit Charles-Edouard.
- « Non », dit Tristan, « elle en possède moins de 100 ».
- « En tout cas, elle possède au moins un livre », dit Guenièvre.

Combien de livres Louise possède-t-elle, sachant qu'une seule des trois affirmations ci-dessus est vraie ?

1.29. Les affirmations suivantes portent sur un nombre naturel n . Laquelle est fausse ?

- si n^2 est pair, alors n est pair
- si n^2 est impair, alors n est impair
- si n^2 est multiple de 3, alors n est multiple de 3
- si n^2 est un multiple de 3 plus 1, alors n est un multiple de 3 plus 1
- si n^2 est un multiple de 5 plus 1, alors n est un multiple de 5 plus 1 ou un multiple de 5 plus 4

1.30. Quelle est la négation de « Tous les élèves de la classe participent aux Olympiades mathématiques » ?

- Aucun élève de la classe ne participe aux olympiades mathématiques
- Un seul élève de la classe participe aux olympiades mathématiques
- Tous les élèves de la classe sauf un participent aux olympiades mathématiques
- Un élève de la classe au moins ne participe pas aux olympiades mathématiques
- Un élève de la classe au moins participe aux olympiades mathématiques

1.31. Voici cinq propositions concernant des nombres réels x et y

- | | | |
|----------------|----------------|------------------|
| (1) $0 \leq x$ | (3) $0 \leq y$ | (5) $x^3 \leq y$ |
| (2) $x \leq 2$ | (4) $y \leq 8$ | |

Les affirmations suivantes, sont-elles vraies :

Alors, pour tous x, y on a :

- (1, 2) impliquent (3,4)
- (1,2,4) impliquent (3)
- (4,5) impliquent (1)
- (4,5) impliquent (2)
- (4,5) impliquent (3)

Chapitre 2

Nombres

Racines et puissances

2.1. Ci-dessous, on suppose $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Effectuer les opérations suivantes et exprimer le résultat sous la forme (exacte) la plus simple possible sans calculatrice. Par exemple pour $\sqrt[4]{4}$ la réponse est $\sqrt{2}$, tandis que pour $\sqrt[4]{16}$ la réponse est 2. Donner la réponse sous forme de fraction plutôt que sous forme décimale.

a. $\frac{2}{5} = \dots$

d. $\left(\frac{16}{25}\right)^{-\frac{1}{4}}$

h. $(2^3)^2$

b. $\frac{2}{3} = \dots$

e. $\sqrt[3]{-125}$

i. $2^{(2^3)}$

f. $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$

j. $2^{(3^2)}$

c. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

g. $(2^2)^3$

k. $(a^n)^n$

2.2. Ci-dessous, on suppose $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Simplifier

a. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^5}$

b. $\frac{\sqrt[4]{64a^6}}{\sqrt[4]{162a}}$

2.3. Exprimer 16^m comme puissance de 2.

2.4. Effectuer $(2^2)^3$; $(2^3)^2$; $2^{(2^3)}$; $2^{(3^2)}$; $(a^n)^n$.

Binôme de Newton

2.5. Calculer $\binom{2025}{2023}$

2.6. Écrire les 5 premières lignes du triangle de Pascal.

2.7. Pour les quelques premières lignes du triangle de Pascal, calculer la somme des nombres apparaissant sur la ligne. Former une conjecture en fonction du numéro de ligne n . Prouver/justifier en faisant appel aux notions vues en cours.

2.8. Développer $(1 - 1)^n$ et en déduire une propriété des coefficients binomiaux.

Récurrence

2.9. Démontrez par récurrence (pour n un nombre naturel) :

a. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

- c. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
 d. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

2.10. Prouver

$$\sum_{i=1}^n i = \binom{n+1}{2}.$$

(In)Equations

2.11. Trouver les valeurs réelles x telles que

- | | | |
|-----------------------------|----------------------------|--|
| a. $\frac{1}{x} = 3$ | d. $8 - \frac{1}{x^2} = 0$ | g. $\left \frac{x-1}{5x+2} \right = 3$ |
| b. $-1 = -2x + 3$ | e. $x^3 - 5x^2 = -6x$ | |
| c. $\frac{x^2-3x}{x+2} = 0$ | f. $ x^2 + 4x + 3 = 1$ | |

2.12. Trouver les valeurs réelles x telles que

- | | | |
|-----------------------------|----------------------------|--|
| a. $\frac{1}{x} < 3$ | d. $8 - \frac{1}{x^2} < 0$ | g. $\left \frac{x-1}{5x+2} \right > 3$ |
| b. $-1 < -2x + 3 \leq 2$ | e. $x^3 - 5x^2 < -6x$ | |
| c. $\frac{x^2-3x}{x+2} > 0$ | f. $ x-1 < 2-3x $ | |

Combinatoire

2.13. Soient 10 boules rouges et 3 boules vertes. De combien de manières

- ces 13 boules peuvent-elles être disposées en ligne ?
- ces 13 boules peuvent-elles être disposées en ligne, si seulement la couleur des boules a de l'importance ?
- un choix de 3 boules rouges et 2 vertes peut-il être fait ?

Combien de ces 13 boules faut-il prendre au minimum pour en avoir certainement

- 3 rouges ?
- 2 vertes ?
- deux de couleurs différentes ?

2.14. 17 tâches doivent être assignées à 5 processeurs. De combien de manières est-ce possible

- en général ?
- si chaque processeur traite au plus 3 tâches ?
- si chaque processeur traite au moins 1 tâche ?

2.15. Combien de vecteurs de 10 bits ont exactement six 1 ? (Un « vecteur de 10 bits » est un mot de longueur 10 dont les lettres sont 0 ou 1)

2.16. Un télégraphe transmet deux types de signaux : un point et un trait. Quelle plus petite longueur faut-il prendre pour des mots formés de tels signaux de sorte à pouvoir encoder

- les 26 lettres de l'alphabet ?
- les 256 caractères ASCII ?

2.17. Que valent

$$\text{a) } \sum_{i=5}^{10} 2^i \text{ ?} \qquad \text{b) } \sum_{i=n_1}^{n_2} 2^i \text{ ?}$$

2.18. Une adresse IPv4 est une séquence de 4 nombres naturels, chacun de 0 à 255. Évaluez sans calculatrice (via l'approximation $1024 \approx 1000$) le nombre total de ces adresses : est-il de l'ordre du million ? du milliard ? Vérifiez avec une calculatrice.

2.19. Pour n fixé, quel est le plus grand coefficient binomial $\binom{n}{k}$? Ce plus grand coefficient est-il unique ?

2.20. Quel est le nombre de façons de distribuer r boules identiques dans n boîtes numérotées de 1 à n ?

2.21. Le nombre de mots obtenus en réarrangeant les lettres du mot

TALLAHASSEE

est-il plus grand que le nombre similaire en partant plutôt du mot suivant ?

MISSISSIPI

2.22. Généralisez le théorème du binôme à un théorème du trinôme, quadrinôme, etc. :

$$(a + b + c)^n = ?$$

$$(a + b + c + d)^n = ?$$

2.23. Combien de permutations des six lettres $ABCDEF$ contiennent le mot DEF

- a. avec les lettres D, E, F consécutives ?
- b. sans cette restriction ?

Chapitre 3

Fonctions

3.1. Tracer le graphe des fonctions suivantes :

- a. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \lceil x \rceil$; b. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow |x|$; c. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{x}{|x|}$.

3.2. Déterminer le plus grand domaine de chacune des fonctions suivantes :

- a. $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ f. $x \mapsto \sqrt{\sin x}$
b. $x \mapsto \frac{x-1}{x^2-5x+6} + \sqrt[3]{2x+1}$ g. $x \mapsto 2\sqrt{x} + \sqrt{6-x}$
c. $x \mapsto \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$ h. $x \mapsto x\sqrt{8-x^2}$
d. $x \mapsto \sqrt{1+x} - 2\sqrt[4]{5-x}$ i. $x \mapsto \sqrt{x^2-1} - \sqrt{16-x^2}$
e. $x \mapsto \frac{x^2+1}{1+\sqrt{x^2-9}}$ j. $x \mapsto 4\sqrt{|x|}$

3.3. Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui sont paires, impaires, périodiques. Pour les fonctions périodiques, déterminer la période. Chacune des fonctions envoie x sur le y indiqué (ou encore : $y = f(x)$) ; A, B et λ sont des constantes.

- a. $y = x^2$ h. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
b. $y = x^3$ i. $y = \cos 5x + \tan 5x$
c. $y = |\sin x|$ j. $y = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$
d. $y = \sin |x|$ k. $y = \sin^2 x$
e. $y = \sec x$ l. $y = \sin x^2$
f. $y = x^3 \cos x$ m. $y = 3 \cos\left(\frac{1}{3}x\right) + 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$
g. $y = |x| + \sin x$ n. $y = \sin 3x + 2 \sin 6x$

3.4. Pour les fonctions suivantes, déterminer celles qui sont injectives, surjectives, bijectives. Donner la fonction inverse de chacune des fonctions bijectives.

- a. $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 5x$; g. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \rightarrow |x|$;
b. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 2^x$; h. $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{Q} : x \rightarrow \frac{x}{|x|}$;
c. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} : x \rightarrow \lceil x \rceil$; i. $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \rightarrow \sqrt{x}$;
d. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} : x \rightarrow \lfloor x \rfloor$; j. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x^3$.

3.5. Soit la fonction ci-après, définie sur $[-1, 1)$:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- a. Construire le graphe de la fonction g qui prolonge f et telle que le domaine de définition de g soit $\mathbb{R}$ et la période de g soit 2.
- b. Cette fonction g est-elle paire ou impaire ?

3.6. Soient les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies ci-dessous :

$$f : x \rightarrow x^2 + 1$$

$$i : x \rightarrow \sin x$$

$$g : x \rightarrow x^3 - x$$

$$h : x \rightarrow 2x$$

$$j : x \rightarrow e^x$$

- a. Calculer $g \circ f$, $f \circ g$, f^2 , h^4 , $i \circ j$, $j \circ i$.
- b. Vérifier $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.
- c. Que vaut $(f \circ j \circ h \circ i \circ g)(x)$?

Chapitre 4

Fonctions logarithmes

4.1. Calculer sans faire usage de tables ou de machines :

- | | | | |
|-----------------------------|----------------------|-----------------------------|---------------------|
| a. $\log_2(32)$; | d. $\log_5(125)$; | g. $\ln(e^{-7})$; | j. $\log_{16}(8)$. |
| b. $\log_3(27)$; | e. $\log_8(16)$; | h. $\log_{10}(10^4)$; | |
| c. $\log_{10}(0,0000001)$; | f. $\log_{1/2}(4)$; | i. $\log_{\sqrt{32}}(32)$; | |

4.2. Calculer x tel que

- | | |
|----------------------|---|
| a. $\log_x 5 = 0.5$ | d. $\log_x a = a$ ($a > 0$ et $a \neq 1$) |
| b. $\log_x 8 = -1.5$ | e. $\log_x a = -a$ ($a > 0$ et $a \neq 1$) |
| c. $\log_x 2 = -2$ | f. $\log_x a = \frac{1}{a}$ ($a > 0$ et $a \neq 1$) |

4.3. Pour quelles valeurs de a et b réels avons-nous $\log_a b < 0$?

4.4. Démontrer les identités

- a. $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c = 1$;
b. $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} = \frac{1}{\log_{ab} x}$.

4.5. Calculer en fonction de $a = \log_{10} 2$:

- a. $\log_{10} 5$; b. $\log_{10} 125$; c. $\log_{10} 2,5$.

4.6. Le logarithme d'un nombre vaut 3 dans une certaine base. Ce logarithme vaut 4 si l'on double la base. Quel est ce nombre ? Quelle est cette base ?

4.7. Pour quelle valeur de x la quantité $\log_x 5$ est-elle d'une unité plus grande que $\log_x 4$?

4.8. Simplifier l'expression $\log_a (\log_a a^{a^x})$.

4.9. Résoudre les équations suivantes :

- | | |
|--|---|
| a. $\log_3(x+2) + 1 = \log_3(x^2 + 4x)$; | e. $4 \log x = \log(x^2 - 2) + \log 8$; |
| b. $\log x + \log(x^2 + 2x - 1) = \log 2$; | f. $\frac{1}{\log_{3x} 30x} + \frac{1}{\log_{2x} 30x} + \frac{1}{\log_{x-2} 30x} = 1$; |
| c. $\log_5(5^x - 7) = \log_{25} 324 + 2 - x$; | g. $(\log_4 x)^2 - \log_x x + 1 = 0$. |
| d. $2 \log_2 x + \log_x 2 = 3$; | |

4.10. Soit la courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation $y = \log_a x$.

- a) Quelle est la valeur de l'abscisse du point de la courbe où la tangente passe par l'origine ?
b) Quelle valeur doit prendre a pour que cette tangente soit inclinée à 45° sur l'axe des x ?

c. $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$.

4.21. Pour chacune des fonctions suivantes déterminer son domaine de définition, sa fonction réciproque, et le domaine de définition de la fonction réciproque.

a. $y = \ln(\arccos x)$

c. $y = 10^{\frac{1-x}{1+x}}$

b. $y = \arctan\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$

d. $y = e^{\sin 3x}$

e. $y = \arccos(e^{x+1})$

4.22. Tracer le graphe de la fonction cosécante. Cette fonction est-elle périodique, continue ? Quelle est sa dérivée ?

4.23. Considérons la fonction sécante appliquant x sur $\sec x = \frac{1}{\cos x}$.

a. Esquisser son graphe.

b. Déterminer les asymptotes.

c. Proposer une définition de la fonction $x \mapsto \operatorname{arcséc} x$. Quel domaine a-t-elle ? Quelle est son image ?

d. Tracer le graphe de la fonction arc sécante.

e. Calculer la dérivée de la fonction arc sécante.

4.24. En vue d'étudier des temps d'exécution d'algorithmes, on définit parfois la *taille* α d'un nombre naturel m comme étant

$$\alpha = 1 + \lceil \log_2(|m| + 1) \rceil.$$

Que vaut la taille de

7 ?

9 ?

- 11 ?

1 ?

- 1 ?

0 ?

4.25. Le passage par les logarithmes aide également au calcul des dérivées. Par exemple, soit $f(x) = x^x$; de

$$\ln f(x) = x \ln x,$$

nous déduisons en dérivant par rapport à x

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln x) + \frac{x}{x},$$

donc

$$f'(x) = (1 + \ln x)f(x)$$

et

$$f'(x) = (1 + \ln x)x^x.$$

En utilisant la même méthode, calculer la dérivée de chacune des fonctions f données par

a. $f(x) = x^r$, avec $r \in \mathbb{R}$

d. $f(x) = a^x$, avec $a \in \mathbb{R}$

b. $f(x) = \sqrt[5]{(x-3)^3(x+1)^2}$

e. $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

c. $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x)$, où f_1, f_2, f_3 sont des fonctions dérivables

f. $f(x) = (\sin x)^{\ln \tan x}$

4.26. Le graphique semi-logarithmique d'une fonction $x \mapsto f(x)$ s'obtient en portant x en abscisse et $\ln f(x)$ en ordonnée (lorsque $f(x) > 0$).

a) Tracer le graphique semi-logarithmique des fonctions f_i données pour $i = 1, 2, 3$ par

$$f_1(x) = 5e^{3x};$$

$$f_2(x) = e^{3\sqrt[5]{x^3}};$$

$$f_3(x) = 2^x.$$

b) Quelles sont les fonctions dont les graphiques semi-logarithmiques sont des droites ?

c) Tracer dans un même système d'axes les graphiques semi-logarithmiques donnés pour $i = 4, 5, 6$ par

$$f_4(x) = 5 \cdot 3^x;$$

$$f_5(x) = 4^x;$$

$$f_6(x) = 10 \cdot 2^x.$$

d) Si au lieu de porter en ordonnée $\ln f(x)$ on décide plutôt de porter $\log_{10} f(x)$, comment se modifie le graphique semi-logarithmique ?

4.27. Le graphique logarithmique d'une fonction $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto f(x)$ s'obtient en portant $\ln x$ en abscisse et $\ln f(x)$ en ordonnée.

a) Tracer le graphique logarithmique des fonctions f_i données pour $i = 1, 2, 3$ par

$$f_1(x) = e^{3\sqrt[5]{x^3}};$$

$$f_2(x) = 3^x;$$

$$f_3(x) = e^{e^x}.$$

b) Quelles sont les fonctions dont les graphiques logarithmiques sont des droites ?

c) Tracer dans un même système d'axes les graphiques logarithmiques des fonctions f_i données pour $i = 4, 5, 6$ par

$$f_4(x) = x^2;$$

$$f_5(x) = x^{3/2};$$

$$f_6(x) = 10x^{3/2}.$$

4.28. Tracer dans un même système d'axes les graphes des fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique. Déterminer les asymptotes.

4.29. Tracer le graphe de la fonction sinus hyperbolique. Admet-il des asymptotes ? La fonction est-elle paire, impaire, périodique ?

Chapitre 5

Trigonométrie

5.1. Quelle est la mesure en degrés d'un angle de $\frac{\pi}{10}$ radians ? À quelle fraction d'un tour complet cet angle correspond-il ?

5.2. Soit ABC un triangle rectangle en A . On donne $AB = 5$ cm, et $\hat{B} = \frac{\pi}{6}$ rad. Représenter la situation, et déterminer les longueurs AC et BC .

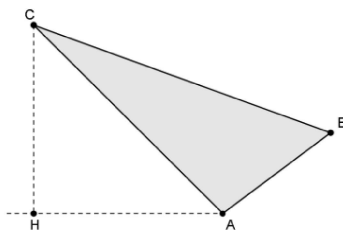
5.3. Si ABC est rectangle en A , que AB vaut 5 unités, BC vaut 6 unités, que vaut AC ? Quelle est la mesure de l'angle $\hat{C}$?

5.4. On donne un trapèze $ABCD$, où AB est de longueur 3, AD est de longueur 5 et CD de longueur 6. Notons O l'intersection entre les diagonales BD et AC . Sachant que les côtés AB et AD d'une part, et AD et DC d'autres part sont perpendiculaires, quelle est la mesure de l'angle $\widehat{BOA}$?

5.5. Soit ABC un triangle ; on donne $BC = 25$, $AC = 36$ et $\hat{B} = 72^\circ$.

- Déterminer le troisième côté et les deux autres angles en degrés.
- Déterminer la mesure de $\hat{B}$ en radians (sans calculatrice !)

5.6. Sur la figure, on donne les angles $\widehat{CAH} = 42^\circ$, $\hat{A} = 105^\circ$, $\hat{B} = 36^\circ$ et $AB = 300$ m. On demande de déterminer la longueur CH sachant que l'angle dessiné en H est droit.



5.7. Deux édifices à toit plat sont distants de 60 m. Du toit du plus petit édifice, qui a 40 m de hauteur, l'angle d'élévation de l'arête du toit du plus grand édifice est de 40° . Calculer la hauteur du plus grand édifice.

5.8. À l'aide du cercle trigonométrique, déterminer les nombres suivants (valeur exacte) en utilisant les symétries adéquates.

a. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

d. $\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)$

g. $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

b. $\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)$

e. $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)$

h. $\cos\left(\frac{-7\pi}{6}\right)$

c. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

f. $\sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right)$

i. $\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)$

5.9. Déterminer les valeurs exactes des expressions suivantes : $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\arctan(1)$.

5.10. Simplifier l'expression $\cos(\arcsin(x))$.

5.11. Trouver les valeurs exactes possibles de $\cos \theta$ et $\tan \theta$ sachant que $\sin \theta = \frac{7}{16}$, puis reporter les arcs correspondants sur un cercle.

5.12. Démontrer les relations suivantes :

$$\sin^4(a) - \cos^4(a) = \sin^2(a) - \cos^2(a)$$

$$= 2\sin^2(a) - 1$$

$$\tan^2(a) - \tan^2(b) = \frac{1}{\cos^2(a)} - \frac{1}{\cos^2(b)}$$

$$\frac{\sin^2(\theta) - \cos^2(\phi)}{\sin^2(\theta) \sin^2(\phi)} = 1 - \cot^2(\theta) \cot^2(\phi)$$

5.13. Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

a. Si $\sin x = -\frac{1}{5}$, que vaut la tangente de x ?

b. Si $\cos x = \frac{1}{3}$, quelles sont les valeurs possibles de la tangente de x ?

5.14. Représenter les graphes des fonctions l et f définies par $l(t) = \sin(2t + \pi)$ et $f(t) = \sin(2t) + \pi$.

Chapitre 6

Géométrie

6.1. On donne les points $a = (1, 2)$, $b = (4, 4)$ et $c = (4, 3)$ du plan. Déterminer

- les composantes des vecteurs $\vec{ab}$ et $\vec{ba}$;
- les coordonnées du milieu du segment ab ;
- les coordonnées du centre de gravité du triangle abc .

6.2. Soit g le centre de gravité du triangle abc ; calculer la somme vectorielle

$$\vec{ga} + \vec{gb} + \vec{gc}.$$

6.3. On donne les points $a = (1, 7)$ et $b = (6, -3)$.

- Déterminer les coordonnées du point c situé sur la droite ab et tel que $\vec{ac} = \frac{2}{3}\vec{cb}$.
- Même question avec $a = (1, -8)$, $b = (8, -1)$ et $\vec{ac} = \frac{3}{4}\vec{cb}$.

6.4. La longueur d'un vecteur $\vec{ab}$ du plan euclidien est 13, son origine est le point $a = (-2, 3)$, la projection de son extrémité sur l'axe oy est le point $(0, 8)$. Déterminer les coordonnées de b et les composantes de ce vecteur.

6.5. Dans le plan, donner l'équation des droites suivantes :

- l'axe Ox ;
- l'axe Oy ;
- la droite qui passe par les points $(0, 0)$ et $(1, 1)$;
- la droite qui passe par les points $(1, 0)$ et $(0, 2)$;
- la droite qui passe par les points $(1, 4)$ et $(-1, 2)$;
- la droite parallèle à l'axe ox qui passe par $(2, -4)$;
- la droite parallèle à la droite d'équation $x + 3y = -4$ qui passe par le point $(1, 2)$.

6.6. Quelle est l'équation de la droite du plan qui passe par $(2, -3)$ et qui est parallèle à la droite passant par $(4, 1)$ et $(-2, 2)$?

6.7. Trouver l'équation de la droite passant par le point $(2, 1)$ et par le point d'intersection des droites d'équations respectives

$$3x - 2y + 10 = 0 \quad \text{et} \quad 4x + 3y - 7 = 0.$$

6.8. Quelle est l'équation de la perpendiculaire à la droite d'équation $2x - 3y - 4 = 0$, qui passe par le point $(3, -2)$?

6.9. Soit le point $p = (3, 5)$ du plan euclidien. Quelles sont les coordonnées des points symétriques de p par rapport

- a. à l'origine ;
- b. à l'axe ox ;
- c. à l'axe oy ;
- d. au point $(7, -2)$;
- e. à la première bissectrice ;
- f. à la droite d'équation $x + 2y = 3$.

6.10. Déterminer la valeur du paramètre réel k pour que dans le plan coordonné

- a. la droite d'équation $3kx + 5y + k = 0$ passe par le point $(-1, 4)$;
- b. la droite d'équation $4x - ky - 7 = 0$ ait une pente 3 ;
- c. la droite d'équation $kx - y = 3k - 6$ coupe l'axe des x au point d'abscisse 5.

6.11. Considérons dans le plan coordonné le triangle formé par les droites d'équations respectives

$$x - y + 2 = 0,$$

$$2x + 3y + 9 = 0,$$

et

$$4x + y - 7 = 0.$$

- a. Déterminer les coordonnées des sommets de ce triangle.
- b. Déterminer les coordonnées des milieux de ses côtés.
- c. Écrire les équations de ses médianes.

6.12. Le point d'intersection g des médianes d'un triangle se trouve sur l'axe des abscisses. Deux des sommets coïncident avec les points $a = (2, -3)$ et $b = (-5, 1)$, le troisième sommet étant sur l'axe des ordonnées. Trouver les coordonnées des points c et g .

6.13. Démontrer que la droite d'équation $2x + y + 3 = 0$ coupe le segment limité par les points $a = (-5, 1)$ et $b = (3, 7)$.

6.14. Dans le plan coordonné, quelle est l'équation de la droite parallèle à la droite d'équation $2x + 3y - 5 = 0$ et qui passe par le point d'intersection des droites d'équations $2x - 5y + 9 = 0$ et $4x + 7y - 1 = 0$?

6.15. Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0.$$

6.16. Écrire l'équation du cercle qui contient les points $(1, 1)$, $(2, 2)$ et $(3, 1)$.

6.17. Trouver les équations des droites tangentes au cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$ et parallèles à la droite d'équation $x + y = 0$.

6.18. Dans $\mathbb{R}^3$, calculer

- a. $(1, 2, 3) \times (-1, 4, 2)$
- b. $((1, 2, 3) \times (-1, 0, 2)) \times (0, -6, 1)$
- c. $(1, 2, 3) \times ((-1, 0, 2) \times (0, -6, 1))$

6.19. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on donne les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ de composantes respectives $(1, 2, 3)$, $(0, 3, -4)$ et $(2, 2, -2)$. On demande

- a. la longueur de $\vec{v}_2$;
- b. l'angle entre $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_3$;
- c. le produit vectoriel $\vec{v}_2 \times \vec{v}_3$.

- 6.20.** Dans l'espace euclidien de dimension 3, calculer l'angle entre deux diagonales d'un cube.
- 6.21.** Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, trouver l'aire du triangle de sommets $p = (1, 3, 2)$, $q = (2, -1, 1)$, $r = (-1, 2, 3)$.
- 6.22.** Soit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ des vecteurs de l'espace euclidien $\mathbb{E}^3$ tels que $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Montrer que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$.
- 6.23.** Montrer que l'on a $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ pour tout $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{E}^3$.
- 6.24.** Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ le triangle de sommets $a = (-1, 4, -1)$, $b = (5, 8, 5)$, $c = (11, -4, 7)$ est-il rectangle ? Calculer l'aire de ce triangle.
- 6.25.** Dans $\mathbb{R}^3$, quelle est l'équation du plan
- parallèle au plan oxy et coupant l'axe oz au point $(0, 0, -3)$;
 - parallèle au plan oyz et coupant l'axe ox au point $(-4, 0, 0)$;
 - contenant l'axe oz et passant par le point $(1, 1, 1)$;
 - passant par les points $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$;
 - passant par les points $(2, 0, 0)$, $(0, 6, 0)$ et $(0, 0, 5)$;
 - passant par les points $(-3, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ et $(0, 0, -1)$.
- 6.26.** Dans $\mathbb{R}^3$, trouver l'équation du plan
- contenant l'origine et parallèle au plan d'équation $3x + 7y - 6z + 3 = 0$;
 - contenant le point $(-1, 2, 4)$ et parallèle au plan d'équation $3x + 7y - 6z + 3 = 0$.
- 6.27.** Quelle est l'équation du plan de $\mathbb{R}^3$
- passant par $a = (3, 4, -5)$ et parallèle aux vecteurs de composantes $(3, 1, -1)$ et $(1, -2, 1)$?
 - passant par $a = (2, -1, 3)$ et $b = (3, 1, 2)$ et parallèle au vecteur de composantes $(3, -1, 4)$?
- 6.28.** Dans $\mathbb{R}^3$, donner des équations paramétriques et cartésiennes
- de l'axe ox ;
 - de la droite parallèle à l'axe oy qui passe par le point $a = (2, -1, 3)$;
 - de la droite qui passe par les points $a = (0, 1, 1)$ et $b = (2, 3, 0)$;
 - de la droite parallèle à la droite d'équations
- $$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$$
- qui passe par le point $a = (1, 2, 3)$;
- de la droite parallèle au plan d'équation $x + y - 2z = 3$, contenue dans le plan d'équation $2x - y + z = 1$ et qui passe par le point $e = (1, 1, 0)$.
- 6.29.** Quelle est l'équation du plan de $\mathbb{R}^3$ qui passe par le point $a = (2, -2, 1)$ et qui contient la droite D d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -5t + 2 \\ z = 2t - 3 \end{cases}$$

- 6.30.** Trouver des équations cartésiennes de la droite de $\mathbb{R}^3$ passant par le point $(-3, 5, 10)$ et parallèle à la droite d'équations

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

6.31. Pour quelle(s) valeur(s) de a les droites de $\mathbb{R}^3$

$$D_1 \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{-y}{3} = \frac{z-1}{4}$$

et

$$D_2 \equiv \frac{x-3}{a} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$$

sont-elles sécantes ?

6.32. Trouver l'équation du plan de $\mathbb{R}^3$ passant par la droite d'équations

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

et parallèle à la droite d'équations

$$\begin{cases} 5x + 2y - z = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

6.33. Dans $\mathbb{R}^3$, la droite d'équations

$$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2 + 3t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

est-elle parallèle au plan d'équation $x + 2y + 2z - 6 = 0$?

6.34. Pour quelle valeur de λ la droite de $\mathbb{R}^3$ d'équations

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{\lambda}$$

est-elle parallèle au plan d'équation $6x - y + 3z - 5 = 0$?

6.35. Écrire l'équation du plan de $\mathbb{R}^3$

- passant par $(3, -2, 4)$ et perpendiculaire à la droite d'équations $x - 2 = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$;
- passant par $(-1, 2, -3)$ et perpendiculaire à la droite joignant les points $(-3, 2, 4)$ et $(5, 4, 1)$;
- passant par $(2, -3, 4)$ et perpendiculaire à la droite joignant ce point au point $(4, 4, -1)$;
- passant par les points $(3, 2, 1)$, $(1, 3, 2)$ et $(1, -2, 3)$.

6.36. Dans $\mathbb{R}^3$, trouver des équations cartésiennes de la perpendiculaire au plan $2x - y + 2z + 3 = 0$ qui passe par le point $a = (-2, -4, 3)$. Quelle est la distance de a à ce plan ?

6.37. Quelle est l'équation du plan de $\mathbb{R}^3$ qui passe par les points $a = (1, -1, -2)$ et $b = (3, 1, 1)$ et qui est perpendiculaire au plan d'équation $x - 2y + 3z - 5 = 0$?

6.38. Trouver l'équation du plan de $\mathbb{R}^3$ perpendiculaire à la droite d'équations

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{3},$$

qui passe par le point $(4, -2, 1)$.

6.39. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, soit p le point de coordonnées $(3, 5, 1)$. Déterminer les coordonnées des points symétriques de p par rapport à

- l'axe ox ;
- l'axe oz ;
- l'origine ;

- d. le point $(-1, 2, 3)$;
- e. la première bissectrice du plan Oxy ;
- f. le plan Oyz ;
- g. le plan d'équation $x + y - 2z = 2$.

6.40. Trouver la (ou les) valeur(s) de k pour que le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + ky - 2z - 9 = 0$

- a. passe par le point $(5, -4, -6)$;
- b. soit parallèle au plan $6x - 2y - 12z = 7$;
- c. soit perpendiculaire au plan $2x - 4y + z = 3$;
- d. fasse un angle de mesure $\pi/3$ avec le plan $2x - 2y + z = 0$;
- e. passe par le point d'intersection de la droite

$$D \begin{cases} x = y \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$$

avec le plan d'équation $x + y = 2$.

6.41. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on donne les droites D_1 et D_2 d'équations

$$D_1 \equiv x - 3 = -y - 2 = \frac{z}{2}, \quad D_2 \equiv x + 2 = y - 3 = \frac{z + 5}{2}$$

et les plan α et β d'équations

$$\alpha \equiv 2x - 2y + z - 3 = 0, \quad \beta \equiv 3x - y + 2z - 1 = 0$$

On demande de calculer l'angle entre

a) D_1 et D_2 ;	b) D_1 et α ;	c) D_1 et β ;
d) D_2 et α ;	e) D_2 et β ;	f) α et β .

6.42. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ on donne le point $a = (1, 3, -4)$ et le plan d'équation $3x + y - 2z = 0$.

- a. Trouver des équations de la perpendiculaire abaissée de a sur α .
- b. Quelles sont les coordonnées du point a' symétrique de a par rapport à α ?
- c. Calculer la distance de a à α .

6.43. Représenter les droites de $\mathbb{R}^3$ d'équations

$$\begin{cases} z - 1 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y - 5 = 0 \\ z + 4 = 0 \end{cases}$$

sur un dessin.

6.44. Quelle sont dans $\mathbb{R}^3$ les équations des plans bissecteurs des plans α et β

$$\alpha \equiv 6x - 6y + 7z = -21, \quad \beta \equiv 2x + 3y - 6z = 12 ?$$

6.45. Dans $\mathbb{R}^3$, trouver l'angle entre les plans d'équations respectives $3x + 2y - 5z = 4$ et $2x - 3y + 5z = 8$.

6.46. Donner dans $\mathbb{R}^3$ des équations de la projection orthogonale de la droite d'équations

$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -4 + 3\lambda \end{cases}$$

sur le plan d'équation $2x - 3y + z = 12$.

6.47. Écrire l'équation de la sphère de $\mathbb{R}^3$ centrée en $(3, 6, -4)$ et tangente au plan $2x - 2y - z - 10 = 0$.

Chapitre 7

Fonctions trigonométriques

7.1. Résoudre les équations suivantes en x :

- | | |
|------------------------------------|--|
| a. $2 \sin x - 1 = 0$; | f. $\sin 2x - \cos 2x = 1$; |
| b. $\sin x - \sin 2x = 0$; | g. $\sin x = \sqrt{3} \cos x$; |
| c. $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$; | h. $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$; |
| d. $\sin^2 2x - \sin^2 x = 0$; | i. $\arccos 2x = \arcsin x$; |
| e. $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; | j. $\arccos(2x^2 - 1) = 2 \arccos \frac{1}{2}$. |

7.2. Déterminer la valeur de chacune des expressions suivantes :

- | | |
|---|--|
| a. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$; | f. $\cos(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2})$; |
| b. $\arccos \frac{1}{2}$; | g. $\operatorname{cosec}(\arcsin \frac{1}{2})$; |
| c. $\arctan 1$; | h. $\cotg(\arctan 1)$; |
| d. $\operatorname{arccotg}(-1)$; | i. $\sec(\operatorname{arccotg} \sqrt{3})$. |
| e. $\sin(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2})$; | |

7.3. Déterminer la valeur (en fonction de x) de chacune des expressions suivantes :

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| a. $\sin(2 \arccos x)$ | d. $\sin(2 \arccos 4x)$ |
| b. $\cot(\arccos x)$ | e. $\sin(\arctan x)$ |
| c. $\cos(2 \arcsin x)$ | f. $\tan(\arcsin 5x)$ |

7.4. Déterminer les domaines de définition des fonctions $x \mapsto y = y(x)$ suivantes :

- | | |
|--|--|
| a. $y = \operatorname{arccotg} 3x$ | e. $y = \sin \left(\arccos \frac{x}{3} \right)$ |
| b. $y = \arcsin 5x$ | f. $y = \arccos \left(\frac{2x}{x+1} \right)$ |
| c. $y = \arctan(\sin 3x)$ | g. $y = \arccos(\tan 2x)$ |
| d. $y = \arccos \left(\frac{3x}{x-2} \right)$ | h. $y = \arcsin(\cot 3x)$ |

7.5. Calculer les dérivées premières des fonctions $y = y(x)$ suivantes (où $a, b \in \mathbb{R}$) :

- | | | |
|--|---|---|
| a. $y = \sin(x^2 + 1)$ | g. $y = \sin nx \cdot (\sin x)^n$ | m. $y = \arcsin(5x)$ |
| b. $y = \cos \sqrt{1 - 2x}$ | h. $y = \sqrt{a \sin^2 x + b \cos^2 x}$ | n. $y = \arccos\left(\frac{3x}{x-2}\right)$ |
| c. $y = \tan \sqrt{x}$ | i. $y = \csc^4 x$ | o. $y = \arctan(\sin 3x)$ |
| d. $y = \csc x \cot x$ | j. $y = \tan x - \cot x$ | p. $y = \arccos\left(\frac{b + a \cos x}{a + b \cos x}\right), \quad a > b $ |
| e. $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ | k. $y = \cos(\sin x)$ | q. $y = \sin\left(\arccos \frac{x}{3}\right)$ |
| f. $y = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$ | l. $y = \frac{\sin(a-x)}{\sin(a+x)}$ | |

7.6. Calculer les valeurs des dérivées première, deuxième et troisième des fonctions $y = y(x)$ suivantes aux points indiqués :

- a) $y = \sin x \cos x$, pour $x = \frac{\pi}{3}$;
 b) $y = 4 \sin x - 3 \cos x$, pour $x = 0$;
 c) $y = \sin 3x \cos x$, pour $x = \frac{\pi}{4}$.

7.7. Prouver que la dérivée d'ordre $n \geq 3$ de la fonction $x \mapsto y = \arctan x$ satisfait la formule de récurrence

$$y^n = \frac{-2(n-1)xy^{n-1} - (n-1)(n-2)y^{n-2}}{1+x^2}$$

Calculer la valeur de la cinquième dérivée de $\arctan x$ au point $x = 1$.

7.8. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto y = \sin x$. En déduire les graphiques des courbes

$$y = \sin 2x, \quad y = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Chapitre 8

Limites, asymptotes et continuité

8.1. Considérons la fonction $f(x) = (x^3 - 1)/(x - 1)$ sur le domaine $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Deviner (par exemple avec une calculatrice) vers quoi tend, intuitivement, $f(x)$ lorsque x s'approche de 1.

Afin de tenter de justifier, montrer que $f(x) = x^2 + x + 1$ pour x différent de 1.

8.2. Considérons la fonction $f(x) = \sin(x)/x$ (sur le domaine $\mathbb{R}_0$).

Deviner (par exemple avec une calculatrice) vers quoi tend, intuitivement, $f(x)$ lorsque x s'approche de 0.

Afin de tenter de justifier cela : lorsque x est proche de 0 mais positif, justifier les inégalités $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ par un dessin dans le cercle trigonométrique, et en déduire $\cos(x) \leq f(x) \leq 1$ pour tout x proche de 0 (positif et négatif).

8.3. Considérons la fonction $g(x) = (1 - \cos(x))/x$ (sur le domaine $\mathbb{R}_0$).

Deviner (par exemple avec une calculatrice) vers quoi tend, intuitivement, $g(x)$ lorsque x s'approche de 0. Afin de tenter de justifier cela, montrer que $g(x) = \tan(x/2)f(x)$ et utiliser l'inégalité montrée à l'exercice 8.2.

8.4. Calculer les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 1)$

d. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

g. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

b. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 3x - 4}{x^2 + x - 1}$

e. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h}$

h. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{x - 4}$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

f. $\lim_{u \rightarrow u_0} \frac{u^2 - u_0^2}{u - u_0}$

8.5. Calculer les limites à gauche et à droite en 0 de

a. $2x + \frac{|x|}{x}$;

b. $e^{1/x}$;

c. $\frac{|x|e^{|x|}}{x}$.

8.6. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}, \quad \text{pour } n \text{ entier } \neq 0 \text{ et } a \text{ réel } > 0.$$

8.7. Calculer les limites à gauche et à droite en $\frac{\pi}{2}$ de

$$\frac{1}{2 + 2^{tg x}}.$$

8.8. Calculer les limites pour $x \rightarrow +\infty$ et pour $x \rightarrow -\infty$ des fonctions $y = y(x)$ suivantes :

- a. $y = 5x^6 + 3x^3 - 7x^2 + 15$
 b. $y = 2x^5 + 3x^4 - 6x^2 + x$
 c. $y = \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$
 d. $y = \frac{x - 4}{x^2 - 6x + 8}$
 e. $y = \frac{x^2 + 3x - 10}{2(x^2 + x - 20)}$
 f. $y = \frac{x^3 - 3x + 1}{2x^3 - 6x + x}$
- g. $y = \frac{\sqrt{x^2 + x}}{2x + 1}$
 h. $y = \frac{3\sqrt{8x^3 - 1}}{x + 4}$
 i. $y = \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$
 j. $y = \sqrt{2x^2 - 3x - 5} - \sqrt{2x^2 + 3x - 5}$
 k. $y = x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$
 l. $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$

8.9. Sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, que valent les limites pour $x \rightarrow 0$ des quantités

- a. $\frac{\tan x}{x}$
 b. $\frac{\sin 7x}{3x}$
 c. $\frac{x \sin x}{1 - \cos x}$
 d. $\frac{x + \sin 4x}{2x - \sin 7x}$
 e. $\frac{\sqrt{3 - \sin 2x} - \sqrt{3 + \sin 2x}}{x}$
 f. $\sqrt{\frac{\sin 2x}{x}}$

8.10. Trouver les asymptotes aux graphes des fonctions $y = y(x)$ suivantes :

- a. $y = x + \frac{1}{x}$
 b. $y = 2x + 7 + \frac{1}{x - 5}$
 c. $y = \frac{1 - 2x}{3x + 4}$
 d. $y = \frac{2x}{x^2 - 5x + 4}$
 e. $y = \frac{3x^2 + 4}{x}$
 f. $y = x - \sqrt{x^2 + 4x}$
 g. $y = \sqrt{9x^2 - x + 4}$
 h. $y = x - 2 + \frac{x^2}{x^2 + 9}$

8.11. Pour chacune des fonctions $y = y(x)$ suivantes :

- a. $y = e^x$
 b. $y = \sqrt{x}$
 c. $y = x$
 d. $y = \sqrt{\frac{2x + 1}{3(x - 1)}}$

déterminer le plus grand domaine et la fonction réciproque si elle existe. Représenter la fonction, sa fonction réciproque et la première bissectrice sur le même graphique.

8.12. Soit la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{pour } x < 0, \\ x^2 & \text{pour } 0 \leq x \leq 2, \\ x + 4 & \text{pour } 2 < x. \end{cases}$$

- a. Calculer $f(-2)$, $f(0)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(3)$.
 b. Tracer le graphe de f .
 c. Déterminer le plus grand domaine de définition et l'image de f .
 d. Calculer les limites à gauche et à droite de f en 0, en 1 et en 2.
 e. En quels points f est-elle continue ?

8.13. Soit la fonction f donnée par

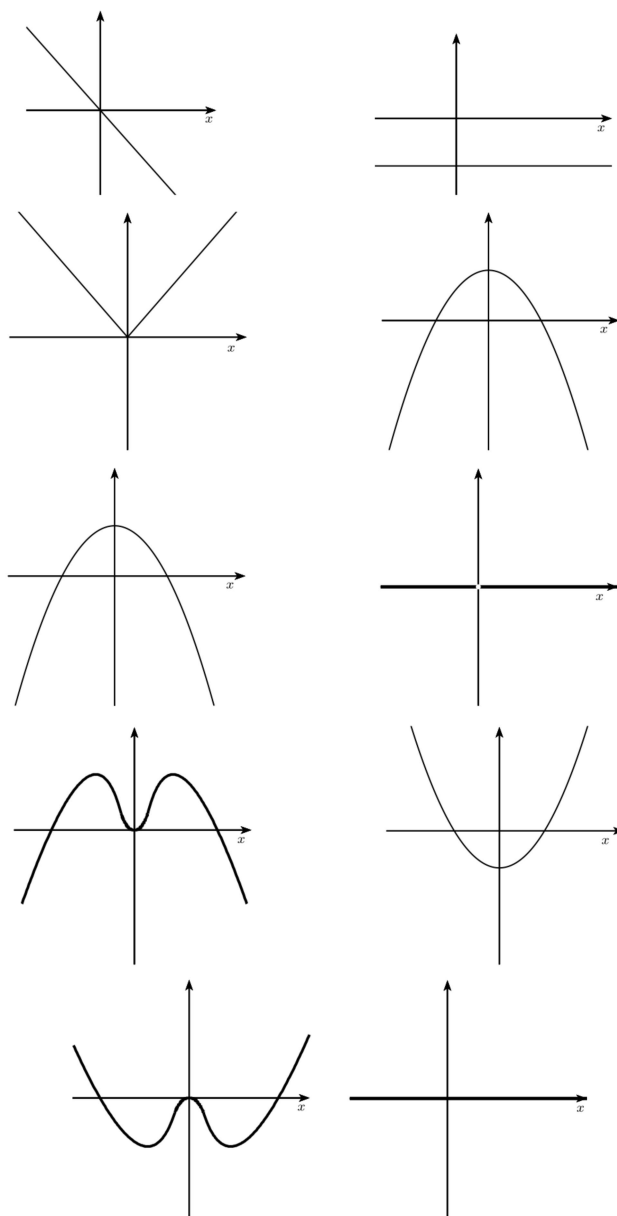
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{pour } x < 1, \\ 3 & \text{pour } x = 1, \\ \frac{1}{2}x + 1 & \text{pour } 1 < x \leq 2, \\ 2 - (x-2)^2 & \text{pour } 2 < x. \end{cases}$$

- a. Calculer $f(-2)$, $f(0)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(3)$.
- b. Tracer le graphe de f .
- c. Déterminer le plus grand domaine de définition et l'image de f .
- d. Calculer les limites à gauche et à droite de f en 0, en 1 et en 2.
- e. En quels points f est-elle continue ?

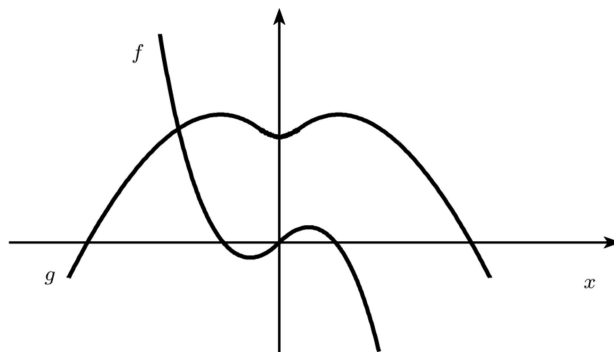
Chapitre 9

Fonctions dérivables

9.1. Voici dans la colonne de gauche les graphes de cinq fonctions. La colonne de droite donne, dans le désordre, les graphes des dérivées secondes. Rétablissez l'ordre.



9.2. Voici, dans le même système d'axes, les graphes de deux fonctions f et g . Laquelle de ces deux fonctions est la dérivée de l'autre ?



9.3. Donner, pour chacune des fonctions $x \mapsto y$ suivantes, le domaine de définition et la nature des points où la dérivée première s'annule ou devient infinie :

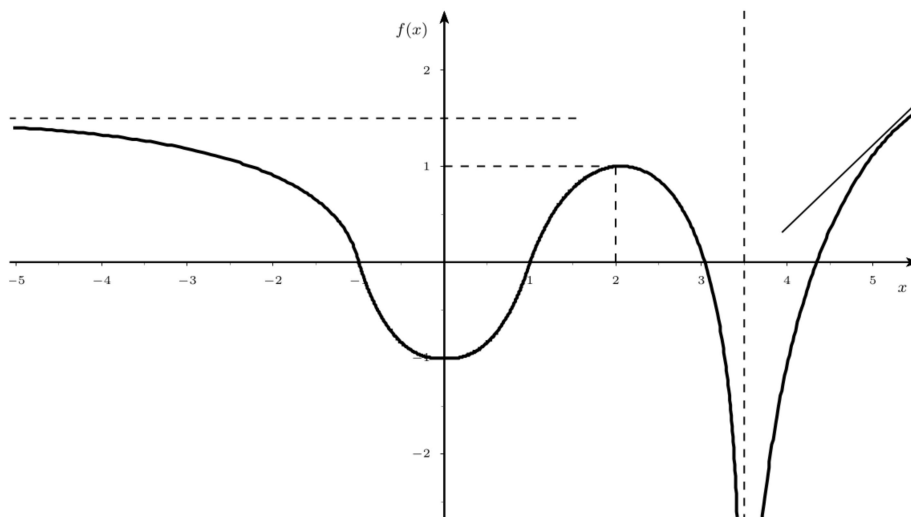
a) $y = \sqrt{x^2(x+1)}$; b) $y = (x^3 - 3x + 2)^{1/3}$; c) $y = 2 + \sqrt[3]{x^2}$.

9.4. Dans un même système de coordonnées, tracer les graphes de la fonction $y = y(x)$ donnée et de sa dérivée, pour :

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$; b) $y = \sin^2 x$.

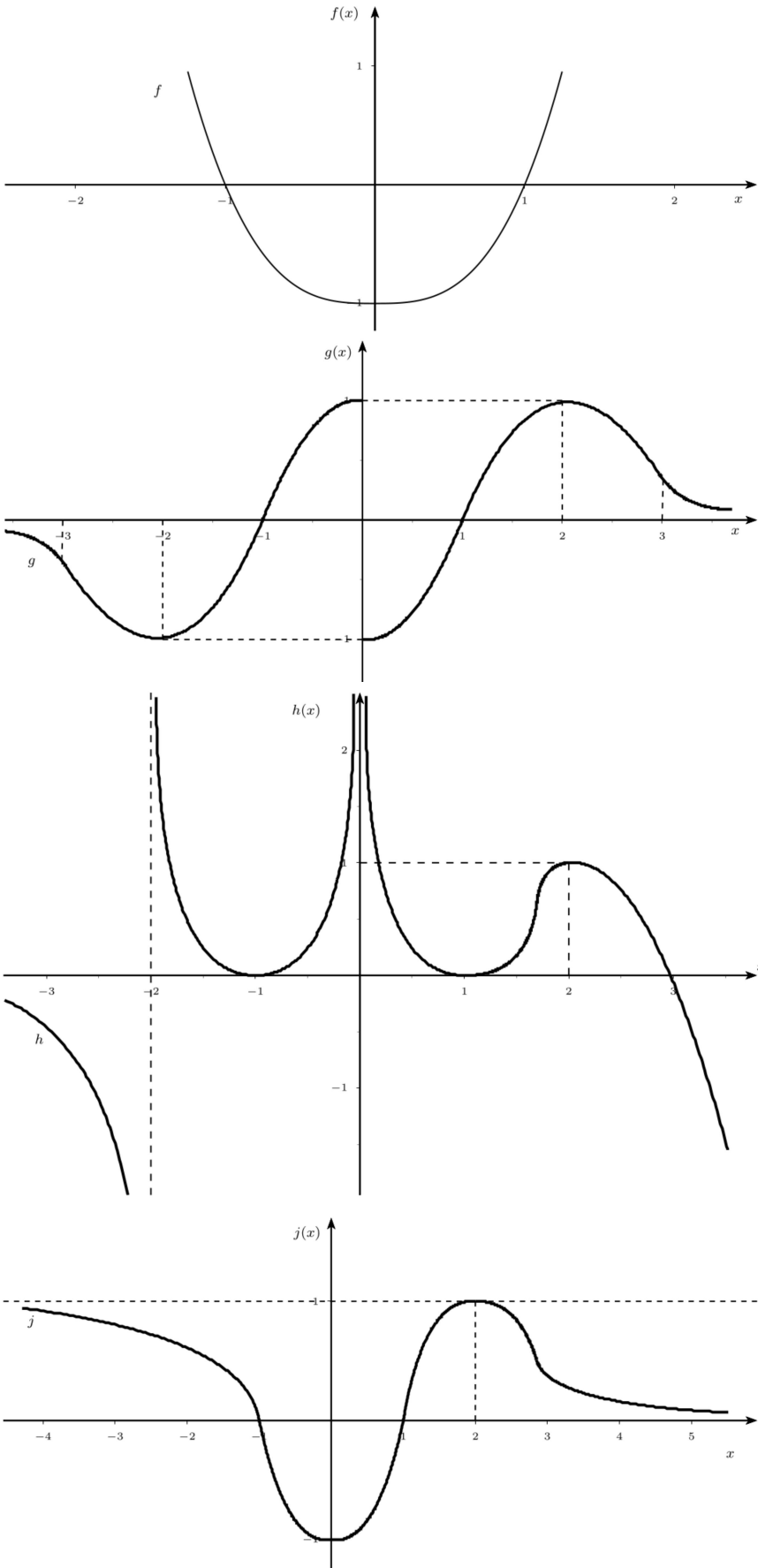
9.5. On donne le graphe d'une fonction $x \mapsto f(x)$. On demande de dessiner (allure grossière)

- | | |
|--|--|
| a. le graphe de la fonction $x \mapsto f(-x)$; | e. le graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$; |
| b. le graphe de la fonction $x \mapsto f(x) $; | f. le graphe de la fonction $x \mapsto f'(x)$. |
| c. le graphe de la fonction $x \mapsto f(x)$; | |
| d. le graphe de la fonction $x \mapsto -f(x)$; | |



9.6. On donne le graphe d'une fonction f (ou g , etc.). On demande de dessiner (allure grossière)

- le graphe de la fonction dérivée f' de f ;
- le graphe de la fonction $\frac{1}{f}$;
- le graphe de la fonction dérivée $\left(\frac{1}{f}\right)'$ de la fonction $\frac{1}{f}$.



9.7. Calculer, en utilisant la définition, les dérivées premières des fonctions appliquant x sur

$$\text{a) } y = x^2; \quad \text{b) } y = \sqrt{x}; \quad \text{c) } y = \frac{1}{2x+1}.$$

9.8. Calculer les dérivées premières des fonctions $y = y(x)$ suivantes (où a, b et c sont des constantes) :

$$\text{a. } y = x^6 - 3x^4 + 19x^3 - 8x + 4$$

$$\text{b. } y = \frac{x^8}{8(1-x^2)^4}$$

$$\text{c. } y = (2x+1)(3x+2)\sqrt[3]{3x+2}$$

$$\text{d. } y = \frac{x(3x+2x^2)}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

$$\text{e. } y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\text{f. } y = \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}}$$

$$\text{g. } y = \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}$$

$$\text{h. } y = (2-x)(1-5x)$$

$$\text{i. } y = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$$

$$\text{j. } y = \frac{1}{8}(1+x^3)^{8/3} - \frac{1}{5}(1+x^3)^{5/3}$$

$$\text{k. } y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

$$\text{l. } y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$\text{m. } y = \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{n. } y = \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{\sqrt{1-x+x^2}}$$

9.9. Calculer les valeurs des dérivées première, deuxième et troisième des fonctions $y = y(x)$ suivantes aux points indiqués.

$$\text{a. } y = x^4 + 6x^4 - x^3, \quad x = 2;$$

$$\text{b. } y = x^{3/2}, \quad x = 0;$$

$$\text{c. } y = x + \frac{1}{x}, \quad x = \frac{1}{2};$$

$$\text{d. } y = \frac{1+x^2-x^4}{\sqrt{1+x^2+x^2}}, \quad x = 1.$$

9.10. Calculer la dérivée première par rapport à x de

$$\text{a) } y = t^2 - 4t, \quad \text{si } t = \sqrt{2x^2+1};$$

$$\text{b) } y = t - 3t^2, \quad \text{si } t = \sqrt{x^2 - 6x + 3};$$

$$\text{c) } y = \sqrt{3t^2 - 5t + 4}, \quad \text{si } t = x^2.$$

9.11. Soit la courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$. Quelles sont les pentes de ses tangentes aux points d'abscisse 1 et 2 ?

9.12. Former les équations des tangentes et des normales à la courbe d'équation $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ dans $\mathbb{R}^2$, aux points d'intersection avec l'axe des abscisses.

9.13. Déterminer les points où les tangentes à la courbe d'équation $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ dans $\mathbb{R}^2$ sont parallèles à l'axe des abscisses.

9.14. Déterminer le(s) point(s) où la tangente à la courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation

$$y = \frac{x}{1-x^2}$$

fait un angle de 45° avec ox .

9.15. Soit la courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation $y = x^2 + px + 5$. Déterminer p pour que la tangente au point a d'abscisse -1 soit parallèle à la première bissectrice. Écrire les équations de la tangente et de la normale en a .

9.16. On considère la courbe d'équation $y = x^2 + px + q$ dans $\mathbb{R}^2$. Déterminer p et q pour que cette courbe soit tangente à la droite d'équation $y = x - 1$ au point $(3, 2)$.

9.17. Déterminer le(s) point(s) où la normale à la courbe $y = x^3 + x$ est parallèle à $x + 4y + 6 = 0$. Pour chaque point, donner l'équation de la normale.

9.18. Déterminer les coordonnées du point de contact et l'équation de la tangente menée par l'origine à la courbe d'équation $y = e^x$ dans $\mathbb{R}^2$ (la dérivée de e^x vaut e^x).

9.19. Déterminer b et c pour que les courbes de $\mathbb{R}^2$ d'équations $y = \frac{1-x}{1+x}$ et $y = x^2 + bx + c$ se coupent perpendiculairement au point $(0, 1)$.

9.20. Si f est une fonction paire (impaire), montrer que sa dérivée f' est impaire (paire). La réciproque est-elle vraie ?

9.21. Pour les fonctions suivantes, $f(a) = f(b) = 0$ et pourtant f' ne s'annule pas sur l'intervalle $]a, b[$. Pourquoi le théorème de Rolle ne s'applique-t-il pas ?

a) $y = \operatorname{tg} x$, sur $(0, \pi)$;

b) $y = 3^{|x|} - 9$, sur $(-2, 2)$;

c) $y = 1 - x^{2/3}$, sur $(-1, 1)$.

9.22. Montrer que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x \leq 1, \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

satisfait aux conditions du théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[0, 2]$ et déterminer toute les valeurs de c prévues par ce théorème. Faire le graphique.

9.23. Appliquer la formule des accroissement finis sur $[x, x+h]$ à chacune des fonctions $x \mapsto y$ suivantes (où $a, b, c \in \mathbb{R}$) :

a) $y = ax^2 + bx + c$;

b) $y = a \sin(bx + c)$.

Dans le premier cas, déterminer la valeur de θ .

9.24. Une fonction réelle d'une variable réelle est définie par

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

- Quel est le plus grand domaine de définition de la fonction f ?
- Étudier la croissance de la fonction f .
- Déterminer toutes les asymptotes au graphe de la fonction f .
- Tracer le graphe de la fonction f .
- Soit g la fonction inverse ou réciproque de la fonction f (définie de sorte que son domaine soit aussi grand que possible). Calculer une expression de la dérivée $g'(t)$ sous forme de quotient de deux polynômes en t .

9.25. Esquisser, dans un système d'axes, les graphes des fonctions $f, f', f^{-1}, (f^{-1})'$ si

a) $f(x) = x^{1/3}$;

b) $f(x) = x^{3/8}$, pour $x \geq 0$.

9.26. Vérifier que

$$(x^2 e^x)^{n/} = [(n-1)n + 2nx + x^2]e^x.$$

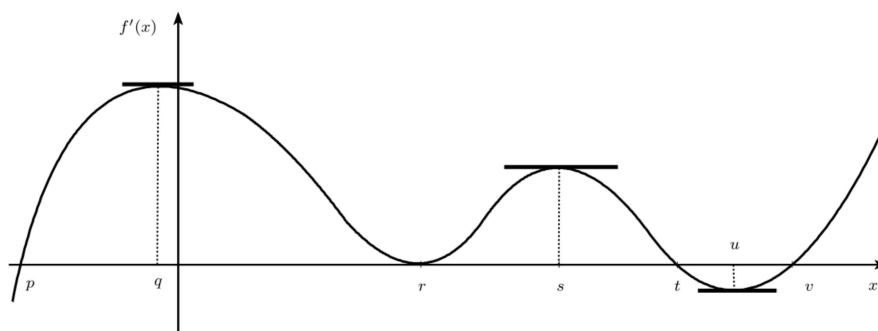
Calculer la 200ème dérivée de $x^2 e^x$ en $x = 1$.

Chapitre 10

Utilisation des dérivées

Dans tout ce Chapitre, l'expression « Développement de MacLaurin » désignera le développement de Taylor en 0.

10.1. Si le graphe ci-dessous est celui de la fonction dérivée f' , pour quelle(s) valeur(s) de x la fonction $x \mapsto f(x)$ admet-elle



- a) un minimum local ?
- b) un maximum local ?
- c) un point d'inflexion à tangente horizontale ?
- d) un point d'inflexion ?

Sur quel sous-ensemble de l'intervalle $[a, h]$ la fonction f est-elle

- e) croissante ?
- f) décroissante ?

10.2. Si les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possèdent en tout point une dérivée seconde, lesquelles des assertions suivantes sont vraies ?

- a) Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x réel, $f'(x) \leq g'(x)$ pour tout x réel.
- b) Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x réel, $f''(x) \leq g''(x)$ pour tout x réel.
- c) Si $f'(x) \leq g'(x)$ pour tout x réel, $f(x) \leq g(x)$ pour tout x réel.
- d) Si $f(0) \leq g(0)$ et $f'(x) \leq g'(x)$ pour tout x réel positif, $f(x) \leq g(x)$ pour tout x réel positif.

10.3. Déterminer les extrémums des fonctions $y = y(x)$ suivantes :

- a) $y = 2 \sin x + \cos 2x$;
- b) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$;
- c) $y = x^2 + \frac{250}{x}$.

10.4. Si la somme de deux nombres réels est 12, quelle est la plus grande valeur atteinte par leur produit ?

10.5. Prouver qu'un rectangle de périmètre donné a toujours une aire inférieure ou égale à celle du carré de même périmètre.

10.6. Un fermier désire clôturer un champ rectangulaire par du fil métallique sur trois côtés et par une haie sur le quatrième. S'il possède 2400 m de fil, quelle est la plus grande surface qu'il peut clôturer ?

10.7. Un carton publicitaire doit contenir 54 cm² de texte imprimé. Si on laisse une marge de 1 cm en haut et bas de page, et de 1,5 cm de chaque côté, trouver les dimensions les plus économiques du carton. (NB : Le prix du carton est directement proportionnel à sa superficie !).

10.8. La somme de deux nombres est 12. Trouver ces nombres si

- a) la somme de leurs carrés est minimal ;
- b) le produit de l'un avec le carré de l'autre est maximal ;
- c) le produit de l'un avec le cube de l'autre est maximal.

10.9. Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, on considère le point $c = (3, 5)$. Par ce point on trace une droite D qui coupe l'axe ox en un point a d'abscisse positive et l'axe oy en un point b d'ordonnée positive. Comment doit être la droite D pour que le triangle oab ait une aire minimum ?

10.10. Pour quelles valeurs de k la fonction $x \mapsto y$ avec

$$y = \cos 2x + k \cos x$$

admet-elle un extrémum d'abscisse $x = \frac{\pi}{3}$?

10.11. Déterminer la fonction sinusoïdale $y = C \sin(x + \varphi)$ qui atteigne le maximum 2 pour $x = 1$ et applique 0 sur 0.

10.12. Déterminer n pour que la fonction

$$y = (x - 6)^n e^x$$

admette un extrémum en $x = 4$. Quelle est la nature de cet extrémum ?

10.13. Déterminer les valeurs de p et q telles que la fonction appliquant x sur

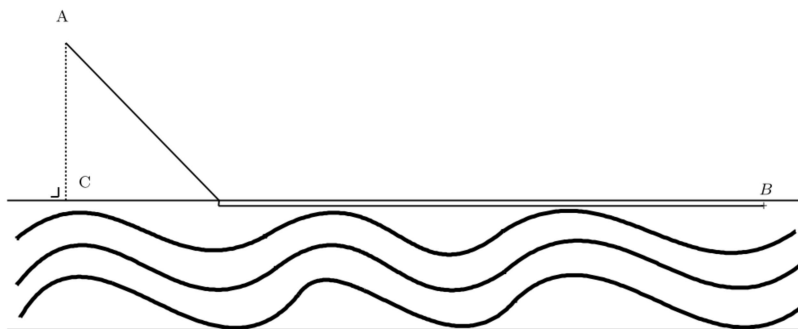
$$y = \frac{x^2 + px + q^2}{x}$$

ait deux extrémums de valeurs respectivement 0 et 4. Quelles valeurs de x donnent ces extrémums ? Quelles sont les natures de ces extrémums ?

10.14. Déterminer les points d'inflexion des courbes de $\mathbb{R}^2$ d'équation

- a) $y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$;
- b) $y = e^{-x^2}$;
- c) $y = \frac{\sin x}{\sin(x + \frac{\pi}{4})}$.

10.15. Une personne doit se rendre de A en B sur la figure, d'abord en marchant à la vitesse v_1 , puis en nageant dans le canal à la vitesse v_2



Déterminez en fonction de v_1, v_2 et de la longueur $|CB|$ en quel point la personne doit se mettre à l'eau pour minimiser son temps de déplacement de A à B . Le bord du canal est supposé rectiligne.

10.16. Soit la fonction qui applique x sur

$$y = 2a \sin bx - a \sin bx.$$

Déterminez les constantes a et b pour que cette fonction applique 0 sur 0 et atteigne le maximum $y = 2$ en $x = 1$.

10.17. Donner pour chacune des fonctions suivantes, le domaine de définition et la nature des points où la dérivée première s'annule ou devient infinie :

- a) $y = \sqrt{x^2(x+1)}$;
- b) $y = (x^3 - 3x + 2)^{1/3}$;
- c) $y = 2\sqrt[3]{x^2}$.

10.18. Soit la fonction f spécifiée par

$$f(x) = \frac{x^2 + (m-2)x - 10}{x^2 - 2x - 3}$$

où m est un paramètre réel;

- a) donner son domaine de définition;
- b) pour quelles valeurs de m la fonction f est-elle partout croissante ?
- c) pour quelles valeurs de m la fonction f possède-t-elle un maximum et un minimum ?
- d) les graphes de ces fonctions f passent-ils tous par un même point ? Si oui, lequel ?

10.19. Esquisser, dans un même système de coordonnées, le graphe de la fonction $y = y(x)$ donnée et de sa dérivée :

- a) $y = e^{x/2}$;
- b) $y = \ln|x^2 - 1|$.

10.20. Représenter dans un même système d'axes et sur le domaine $[-2, 2]$ les fonctions f spécifiées par

- a) $f(x) = 2^x$, $f(x) = 2^{x-1}$;
- b) $f(x) = 2^{|2x|}$, $f(x) = 2^x - 1$.

10.21. Faire le graphe des fonctions $y = y(x)$ suivantes :

- | | | |
|-------------------------------------|---|---|
| 1) $y = \frac{(x+1)^3}{x^2}$; | 10) $y = \frac{x^2}{x-1}$; | 20) $y = x^2 e^{-x}$; |
| 2) $y = \frac{x^3 - x + 1}{x^2}$; | 11) $y = \frac{x}{1+x^2}$; | 21) $y = \frac{\ln x}{x}$; |
| 3) $y = 3x^{2/3} - 2x$; | 12) $y = \sqrt{-x^2 - 1}$; | 22) $y = x \ln x$; |
| 4) $y = \sqrt{x^2(x+1)}$; | 13) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$; | 23) $y = x \ln^2 x$; |
| 5) $y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; | 14) $y = \left \frac{(x+2)(x-1)}{x-2} \right $; | 24) $y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$; |
| 6) $y = \frac{x^3 - x + 1}{x^2}$; | 15) $y = x^2(x-3)^{1/3}$; | 25) $y = \frac{1}{x} + 2 \ln x$; |
| 7) $y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$; | 16) $y = \frac{(x+1)^2}{x^3}$; | 26) $y = \sqrt{x} \ln x$; |
| 8) $y = \frac{x}{1+x^2}$; | 17) $y = x^2 \arctan \frac{1}{1-x}$; | 27) $y = 2 \ln x - 1 + \frac{1}{x}$; |
| 9) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$; | 18) $y = x e^{1/x}$; | 28) $y = 2^{1/x}$; |
| | 19) $y = x e^{-x^2}$; | 29) $y = \frac{e^x}{x}$; |
| | | 30) $y = \sqrt{x} e^x$. |

10.22. Soit $f(x) = \sin(x)$. Esquisser les graphes de f et de ses polynômes de Taylor à l'ordre 0, 1, 2 et 3 en 0.

10.23. Écrire le polynôme de Taylor de degré n centré en 0 pour les fonctions

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

10.24. Développer en série de Taylor au voisinage du point indiqué chacune des fonctions suivantes :

a) $y = x \ln x$, pour $x_0 = 1$, jusqu'au terme en x^6 ;

b) $y = 3^x$, pour $x = 2$, jusqu'au terme en x^3 ;

c) $y = e^{3x}$, pour $x = \frac{1}{3}$, jusqu'au terme en x^3 ;

d) $y = \cos x$, pour $x = \frac{\pi}{4}$, jusqu'au terme en x^3 . En se limitant au terme en x^2 , en déduire la valeur approximative de $\cos 46^\circ$ ($\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} \approx 0,70711$);

e) $y = \frac{\ln x}{x^2}$, pour $x = 1$, jusqu'au terme en x^3 ;

f) $y = \ln x$, pour $x_0 = 1$, jusqu'au terme en x^5 ;

g) $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$, pour $x = 2$;

h) $y = e^{\frac{x}{2}}$, pour $x = 2$, écrire le terme général;

i) $y = e^{\sin x}$, pour $x = \frac{\pi}{2}$, jusqu'au terme en x^2

10.25. Écrire le développement de Taylor à l'ordre 3, avec le reste, de la fonction $y = \sqrt[3]{x}$ dans le voisinage de $x = 27$. Utiliser ce développement pour calculer $\sqrt[3]{29}$.

10.26. Calculer en utilisant le développement de Taylor de $y = \sin x$ au voisinage de $x = \pi/6$ une valeur approchée de $\sin 32^\circ$ (se limiter au terme du second degré).

10.27. Calculer en utilisant le développement de MacLaurin de $y = 3^{-x}$ une valeur approchée de $\frac{1}{e}$.

10.28. Calculer une valeur approchée de $\sqrt{4,02}$ en utilisant le développement de MacLaurin de $y = \sqrt{4+x}$. Se limiter au terme en x^2 .

10.29. Evaluer $e^{0,1}$ en utilisant le développement de MacLaurin de $y = e^x$. Représenter la courbe e^x et ses développements d'ordre 1, 2 et 3 sur le même graphique.

10.30. Déduire des développements de MacLaurin de e^x , $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$ ceux des fonctions suivantes :

a) $y = e^{-x^2/2}$;

b) $y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$;

c) $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

10.31. Donner le développement de MacLaurin de

a. $y = 2^x$, jusqu'au terme en x^3 ;

b. $y = \operatorname{sh} x$, jusqu'au terme en x^n ;

c. $y = \frac{1}{1-x}$, jusqu'au terme en x^n ;

d. $y = e^{-x} \cos x$, avec les 4 premiers termes non nuls;

e. $y = e^x \sin x$, avec les 4 premiers termes non nuls;

f. $y = xe^{-x}$, jusqu'au terme en x^n ;

Chapitre 11

Primitives

11.1. Soit f une fonction admettant comme primitive la fonction appliquant x sur $2 \sin^2 x$. Déterminer parmi les expressions suivantes celles qui représentent aussi une primitive de f :

- a. $-\cos 2x$; b. $-\cos^2 x$; c. $\cos x^2$; d. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

11.2. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Donner, par intégration immédiate, une primitive de la fonction envoyant la valeur réelle x sur

- | | | | |
|------------------------------|----------------------------------|---|----------------------------------|
| a. $\cos x$; | g. e^{-x+5} ; | m. $\frac{1}{\sin^2(x)}$; | s. 1993; |
| b. $\sin(3x - 2)$; | h. $e^{\sin x} \cos x$; | n. $(\operatorname{ch} x)(\operatorname{sh} x)$; | t. $e^x \cos(e^x)$; |
| c. x^5 ; | i. 2^x ; | o. $\frac{x}{5x^2 - 1}$; | u. $\frac{1}{a^2 - x^2}$; |
| d. $\frac{1}{6x + 11}$; | j. $\operatorname{sh}(-x + 6)$; | p. $\frac{\sin x}{\cos^3 x}$; | v. $\frac{\arctan x}{1 + x^2}$. |
| e. $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$; | k. $\frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$; | q. $\cot(x)$; | |
| f. $\frac{1}{\cos^2 9x}$; | l. $\frac{1}{a^2 + x^2}$; | r. 0; | |

11.3. Calculer, en décomposant l'intégrande :

- a. $\int (x + \sqrt{x}) dx$; c. $\int \cos^2(x - 2) dx$;
b. $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}\right) dx$; d. $\int \tan^2 x dx$.

11.4. Calculer, par changement de variable :

- | | | |
|---|--|--|
| a. $\int e^{5x-3} dx$; | f. $\int \frac{\cos x}{5 + \sin^2 x} dx$; | k. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}$; |
| b. $\int x^2(1 - x^3)^2 dx$; | g. $\int \frac{dx}{x \ln x}$; | l. $\int \frac{x^4 + 1}{\cos^2(x^5 + 5x)} dx$; |
| c. $\int x \operatorname{tg}(x^2) dx$; | h. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$; | m. $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$; |
| d. $\int \sin^2 x \cos x dx$; | i. $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$; | n. $\int \frac{1 - \arctan x}{1 + x^2} dx$; |
| e. $\int \frac{x}{a^2 - x^2} dx$; | j. $\int 2^{x^2} x dx$; | o. $\int (\cot g x)(\ln \sin x) dx$. |

11.5. Calculer

$$\int \frac{2e^{1/x}}{x^2} dx,$$

puis déterminer toutes les fonctions $x \mapsto f(x)$ telles que

$$f'(x) = \frac{2e^{1/x}}{x^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

11.6. Intégrer par parties la fonction appliquant x sur

- | | | |
|-----------------------------|--------------------------------------|----------------------------|
| a. $x e^x$ | g. $x^n \ln x$ où $n \in \mathbb{N}$ | m. $\ln x$ |
| b. $x^2 \ln x$ | h. $x \operatorname{tg}^2 x$ | n. $\arctan x$ |
| c. $\arcsin x$ | i. $\sqrt{x^2 - 1}$ | o. $\frac{\arcsin x}{x^2}$ |
| d. $x \arctan x$ | j. $x\sqrt{1+x}$ | p. $\frac{x}{\cos^2 x}$ |
| e. $e^x \sin x$ | k. $e^{\arcsin x}$ | |
| f. $\frac{1}{x} \ln(\ln x)$ | l. $x^2 \ln(x^6 - 1)$ | |

11.7. Calculer les intégrales indéfinies (de la forme $\int \frac{dx}{Q}$ avec Q trinôme du second degré en x) :

- | | | |
|--------------------------------------|--|--|
| a. $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 4}$ | f. $\int \frac{dx}{x^2 + 6x - 7}$ | k. $\int \frac{dx}{4x - x^2}$ |
| b. $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 1}$ | g. $\int \frac{3x+1}{1-4x^2} dx$ | l. $\int \frac{(2-x)dx}{4x^2 + 4x - 3}$ |
| c. $\int \frac{dx}{4 + 16x^2}$ | h. $\int \frac{3x-1}{x^2 + 2x + 5} dx$ | m. $\int \frac{(2x-3)dx}{4x^2 - 11}$ |
| d. $\int \frac{dx}{2 - x^2}$ | i. $\int \frac{x+4}{x^2 + 6x + 5} dx$ | n. $\int \frac{1}{b - t^2} dt$ où $b \in \mathbb{R}$ |
| e. $\int \frac{dx}{4x^2 - 12x + 10}$ | j. $\int \frac{7x+1}{6x^2 + x - 1} dx$ | |

11.8. Calculer les intégrales indéfinies (de la forme $\int \frac{L}{Q} dx$ ou $\int \frac{L}{\sqrt{Q}} dx$, avec L et Q polynômes en x de degrés 1 et 2 respectivement) :

- | | | |
|---|--|---|
| a. $\int \frac{x-1}{x^2 + x + 1} dx$ | c. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}} dx$ | d. $\int \frac{x-1}{x^2 + 2x + 1} dx$ |
| b. $\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}} dx$ | | e. $\int \frac{6x+5}{\sqrt{9x^2+1}} dx$ |

11.9. Décomposer en fractions simples les fonctions rationnelles de x données par :

- | | |
|--------------------------|-------------------------------|
| a. $\frac{2x-1}{x^2-1};$ | b. $\frac{2x-1}{(x-2)(x+3)}.$ |
|--------------------------|-------------------------------|

11.10. Calculer les intégrales indéfinies de fonctions rationnelles :

- | | | |
|-------------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------------|
| a. $\int \frac{dx}{x^2+4};$ | c. $\int \frac{dx}{3x^2-x+1};$ | e. $\int \frac{(2x+3)dx}{x^2-5x+6};$ |
| b. $\int \frac{2x^2-x+2}{2x+3} dx;$ | d. $\int \frac{x^3 dx}{(x-1)^2};$ | f. $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-2x+5};$ |

11.11. Calculer les intégrales indéfinies de fonctions rationnelles :

a. $\int \frac{2x^2 - x + 2}{2x + 3} dx;$

c. $\int \frac{x^3 dx}{(x-1)^2};$

b. $\int \frac{dx}{x^2 - 4};$

d. $\int \frac{(2x+3)dx}{x^2 - 5x + 6}.$

11.12. Calculer les intégrales indéfinies (de fonctions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$) :

a. $\int \cos^3 x dx;$

h. $\int \frac{\cos^2 x}{\cos 2x} dx;$

o. $\int \sqrt{1 - \cos x} dx;$

b. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx;$

i. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + \tan^2 x} dx;$

p. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx;$

c. $\int \frac{dx}{1 + \sin x};$

j. $\int \cos^3 x \sin^3 x dx;$

q. $\int \frac{dx}{1 + \cos x};$

d. $\int \tan^2 x dx;$

k. $\int \cos^2 x dx;$

r. $\int \frac{\cos^3 x dx}{1 - \sin x};$

e. $\int \sin 5x \cos 3x dx;$

l. $\int (\cos x + \sin x)^5 dx;$

s. $\int \tan x \frac{1}{\sqrt{\cos x}} dx;$

f. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x};$

m. $\int \frac{dx}{\cos x};$

t. $\int \frac{dx}{1 + \sin x \cos x}.$

g. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x};$

n. $\int \frac{dx}{\sin x};$

11.13. Calculer

a. $\int \sin(\ln x) dx;$

f. $\int x^2 e^{3x} dx;$

k. $\int x^5 \sqrt[4]{1 + 2x^3} dx;$

b. $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx;$

g. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3 - x^2}};$

l. $\int 4x^3 (\ln x)^2 dx;$

c. $\int \frac{\cos x dx}{1 + \cos x};$

h. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}};$

m. $\int \frac{dx}{x^4 - 1};$

d. $\int x\sqrt{2 + 3x} dx;$

i. $\int x \arcsin x dx;$

n. $\int \arctan x dx.$

e. $\int (3x^2 + 1)^4 x dx;$

j. $\int \frac{\ln 2x dx}{\ln 4x x};$

Chapitre 12

Intégrale de Riemann

12.1. Calculer

a. $\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{4x}{1+x^2} dx;$

b. $\int_0^{\pi/4} t(\arctan t)^2 dt;$

c. $\int_1^{7/4} \frac{dx}{9+16(x-1)^2};$

d. $\int_0^e \ln(1+2x) dx;$

e. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 8}} dx;$

f. $\int_0^{\pi/4} x \operatorname{tg}^2 x dx;$

g. $\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt;$

h. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2+6x-7};$

i. $\int_1^2 \frac{2-x}{4x^2+4x-3} dx;$

j. $\int_2^1 x^3 \ln x dx;$

k. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x dx;$

l. $\int_{-1}^1 x^2 \arctan x dx.$

12.2. Que vaut

a. $\int_0^{\pi/4} x(\arctan x)^2 dx ?$

c. $\int_0^e \ln(1+2x) dx ?$

e. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^2 x + 8}} ?$

b. $\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{4x}{1+x^2} dx ?$

d. $\int_1^{7/4} \frac{dx}{9+16(x-1)^2} ?$

f. $\int_0^1 \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}} dx ?$

12.3. Un gaz se dilate de sorte que sa pression P et son volume V sont liés par la relation

$$P = a - bV,$$

où a et b sont des constantes. Sachant que le travail W fourni en passant du volume V_0 au volume V_1 est donné par

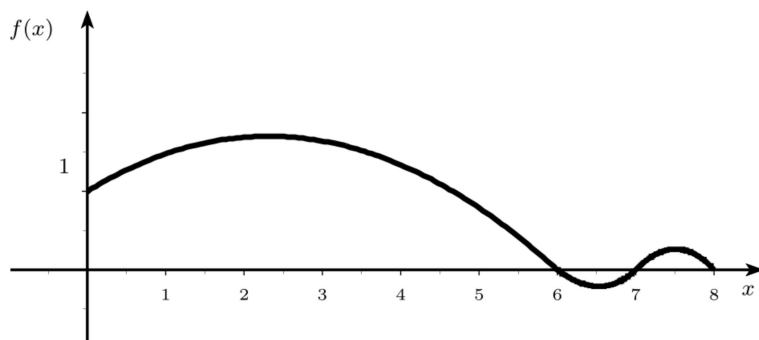
$$W = \int_{V_0}^{V_1} P dV,$$

trouver en fonction de a et b le travail fourni si la mesure de V passe de 3 à 8.

12.4. À partir du graphe de la fonction f , supposée deux fois dérivable, répondez aux questions suivantes sur la fonction $F : [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

éventuellement en donnant une valeur exacte ou approchée, et en discutant votre réponse :



- que vaut $F(0)$?
- donnez deux bornes entre lesquelles est compris $F(6)$;
- quel est le maximum de la fonction F ? en quel(s) point(s) de $[0, 8]$ ce maximum est-il atteint ?
- idem pour le minimum de F ;
- idem pour le minimum de F' ;
- idem pour le minimum de F'' .

12.5. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable avec $a < b$. Donner une expression sans signe d'intégration égale à

a) $\int_a^b f'(x) dx$;

- b) la dérivée au point t_0 de $]a, b[$ de la fonction F appliquant le point t de $[a, b]$ sur

$$F(t) = \int_a^t f'(x) dx ;$$

- la dérivée à gauche au point b de cette même fonction F ;
- la dérivée à droite de F au point a ;
- la dérivée au point t_0 de $]a, b[$ de la fonction G appliquant le point t de $[a, b]$ sur

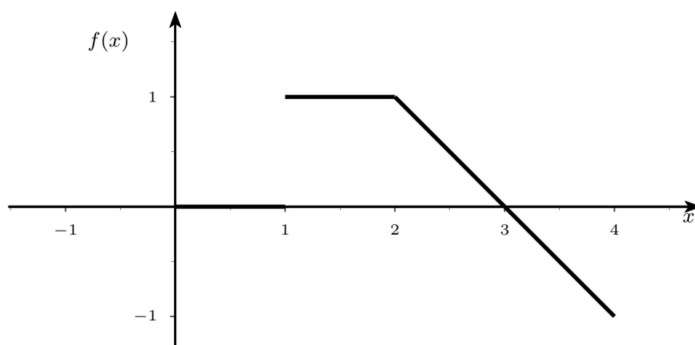
$$G(t) = \int_a^t f'(x) dx ;$$

- la dérivée à gauche au point b de cette même fonction G ;
- la dérivée à droite de G au point a .

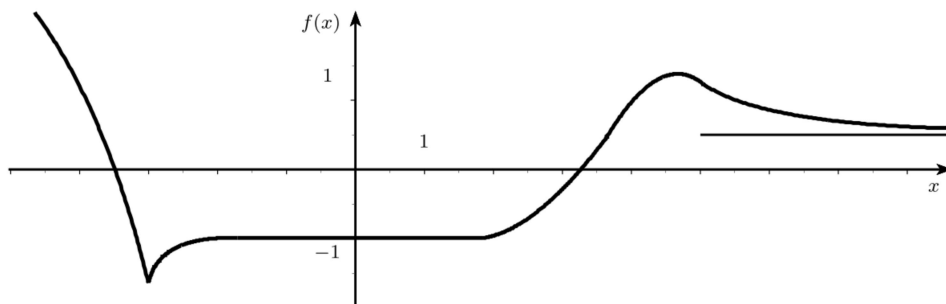
12.6. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Que vaut

$$\frac{d}{dx} \int_5^x (f(t))^2 dt ?$$

12.7. Voici le graphe d'une fonction $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$. Tracez (à la même échelle) le graphe de la primitive F de f telle que $F(0) = 2$.



12.8. Esquissez le graphe de la fonction F primitive de la fonction f avec $F(0) = -2$ si le graphe de f est



12.9. Esquissez le graphe de la fonction

$$F : x \mapsto \int_{-2}^x f(t) dt,$$

si le graphe de f est comme dans l'exercice précédent.

12.10. Classer par ordre croissant les nombres suivants :

$$0, \quad 1, \quad \int_2^3 e^{-x^2} dx, \quad \int_0^1 e^{-x^2} dx, \quad \int_{-3}^{-2} e^{-x^2} dx.$$

12.11. Si $f(t) = \int_1^t \sqrt{u^2 + 16} du$, que vaut $\int_0^1 f''(v) dv$?

12.12. Soit $g(x) = e^{-3x} \sin 2x$.

a) Déterminer A et B pour que la fonction $f(x) = e^{-3x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$ soit une primitive de g ;

b) Calculer $\int_0^\pi g(x) dx$.

12.13. Pourquoi les intégrales suivantes sont-elles dites « généralisées » ? Calculez la valeur chaque fois qu'elle existe, sinon donnez des informations sur la divergence.

a) $\int_3^4 \frac{1}{x-3} dx$;

d) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx$;

b) $\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx$;

e) $\int_1^\infty \frac{dt}{1+t^2}$;

c) $\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$;

f) $\int_0^1 \frac{dt}{t^2-1}$.

12.14. Calculer les deux intégrales (attention !)

$$\int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{t^3}{1-t^2} dt.$$

12.15. Soit la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt.$$

Quelles affirmations parmi les suivantes sont vraies ?

- a. F est croissante ;
- b. F est décroissante ;
- c. F n'est ni croissante, ni décroissante ;
- d. F ne s'annule jamais ;
- e. F est strictement positive ;
- f. F est impaire ;
- g. F est paire ;
- h. F admet un maximum local en 0 ;
- i. F admet un minimum local en 0 ;
- j. le graphe de F admet un point d'inflexion en 0.

Chapitre 13

Matrices

13.1. Soit les matrices réelles

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice D telle que $A + B - D = 0$.

13.2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ sont deux matrices réelles, montrer que $(A + B)^2 = A^2 + B^2$. Ce résultat est-il vrai pour tout choix de deux matrices réelles ?

13.3. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ une matrice réelle; trouver toutes les matrices X telles que $AX = A$.

13.4. Démontrer que si les matrices réelles A et B sont telles que $AB = A$ et $BA = B$, alors $A^2 = A$ et $B^2 = B$. Le résultat reste-t-il vrai si $\mathbb{R}$ est remplacé par un champ quelconque F ?

13.5. Montrer, pour $n \in \mathbb{N}_0$ et a pris dans un champ F ,

$$\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^n \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

13.6. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les matrices réelles A et B pour que

$$\text{a) } (A - B)^2 = A^2 + B^2; \quad \text{b) } (A + B)(A - B) = A^2 - B^2.$$

Vos résultats s'étendent-ils à des matrices A et B sur un champ quelconque ?

13.7. Deux matrices A et B commutent si $AB = BA$. Montrer que si A et B sont deux matrices inversibles qui commutent, il en est de même pour A et B^{-1} , pour A^{-1} et B et pour A^{-1} et B^{-1} .

13.8. Soit A une matrice complexe $n \times n$ qui vérifie l'équation $A^2 + 2A + 3I = 0$. Démontrer que A est inversible et calculer A^{-1} en fonction de A .

13.9. Calculer les déterminants des matrices réelles suivantes, et leur matrice inverse quand elle existe :

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}; \quad \text{e) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

13.10. Montrer, sans développer de déterminant, les égalités :

$$\text{a) } \det \begin{pmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ac & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} bc & ab & ca \\ ab & ca & bc \\ ca & bc & ab \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } \det \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ c_1 + a_1 & c_2 + a_2 & c_3 + a_3 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \det \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix} = 0;$$

$$\text{d) } \det \begin{pmatrix} a^2 & bc & ab \\ ba & c^2 & b^2 \\ ca & ab & bc \end{pmatrix} = 0.$$

13.11. Calculer, le plus simplement possible, pour des matrices complexes :

$$\text{a) } \det \begin{pmatrix} a & a & a & \dots & a \\ a & a-b & a & \dots & a \\ a & a & 2a-b & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & na-b \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } \det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \det \underbrace{\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & & & 1 & a \end{pmatrix}}_{n \text{ colonnes}}.$$

Chapitre 14

Systèmes d'équations linéaires

14.1. Résoudre les systèmes réels suivants par la méthode de Gauss (toutes les inconnues apparaissent dans au moins une équation).

a.
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} x + y + z - 3t = 2 \\ x - 2y + 2z + 15t = -3 \\ x + y - z - 9t = 0 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x + 2y - 3z + t = 1 \\ x - y - 2t = 1 \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} x + 4y + z = 12 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + y = 4 \\ x + z = 4 \end{cases}$$

f.
$$\begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13 \end{cases}$$

g.
$$\begin{cases} 2x + y - 3z - t = 1 \\ x - 4y + 3z + 4t = -4 \end{cases}$$

h.
$$\begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ 5x + 2y - 11z = 18 \end{cases}$$

i.
$$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = -1 \\ x + z = 0 \\ 3x + 4y = 3 \end{cases}$$

j.
$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$$

14.2. Écrire l'équation d'un plan de $\mathbb{R}^3$ passant par 3 points sous forme de déterminant.

14.3. Soit a un nombre réel et soit :

π_1 le plan passant par l'origine et perpendiculaire à $\vec{v}_1 = (1, 2, 0)$,

π_2 le plan passant par $(1, 1, -1)$ et parallèle à $\vec{v}_2 = (1, 0, a)$ et $\vec{v}_2' = (0, 1, 3)$,

π_3 le plan passant par $(\frac{4}{3}, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ et $(0, 2 + a, 1)$.

Discuter en fonction de a la nature de l'intersection des 3 plans π_1, π_2, π_3 .

14.4. Un problème italien de TARTAGLIA (16e siècle)

« Trois joyeux compagnons qui avoient deniers en bourse, s'entrefirent quelques questions, et dist le premier aux deux autres, si vous me donnez la moytié de voz ducas, j'auray ensemble avec ceux que je peux avoir de présent 20 ducas : le second dist aux deux autres, si vous me donner le tiers de voz ducatz, j'auray ensemble, avec ceux que je peux avoir 20 ducas ; mais dist le troisième aux deux autres, donnez moy le quart de ceux que vous avez, et avec ceux que j'ay, j'auray 20 ducas aussi bien que vous : combien avait de ducas un chacun d'iceux ? ».

14.5. Un problème de BACHET (17e siècle)

« Trois hommes ont chacun certaine somme d'écus. Le premier donne des siens aux deux autres autant qu'ils en ont chacun ; en après le second en donne aux deux autres autant qu'ils ont chacun ; finalement le troisième en donne aux deux autres autant qu'ils en ont chacun : cela fait, chacun se trouve 8 écus. On demande combien chacun en avait du commencement » (extrait des « Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres », publié en 1612).

14.6. Un problème stupide (20e siècle)

Un père a 25 ans de plus que son fils. Dans 7 ans, il aura 5 fois l'âge de son fils. Que fait le père ?

14.7. Déterminer les inverses des matrices réelles suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 15

Fonctions vectorielles d'une variable réelle

15.1. Un point $p(x, y)$ se meut dans le plan $\mathbb{R}^2$ suivant la loi

$$\begin{cases} x = 3t^2 - 5t + 6, \\ y = t^3 + 5t - 1, \end{cases}$$

où t désigne le temps. Calculer les composantes des vecteurs vitesse et accélération en $t = 0$; en $t = 1$; en $t = 5$. Déterminer ensuite le nombre vitesse en ces mêmes instants.

15.2. Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la base orthonormée canonique $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, le vecteur

$$\vec{op} = \cos \omega t \vec{e}_1 + \sin \omega t \vec{e}_2$$

donne la position du point p en fonction du temps t (avec ω constante réelle non nulle). Montrer que

- à chaque instant, le vecteur vitesse est perpendiculaire au vecteur position ;
- le vecteur accélération est dirigé vers l'origine de $\mathbb{R}^2$, et est de norme constante.

Quel est le mouvement du point ?

15.3. Le mouvement d'un point $p = (x, y)$ dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ est donné en fonction du temps t par

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cos 3t, \\ y = -1 + 6 \sin 3t. \end{cases}$$

- Ce mouvement est-il périodique ? Si oui, quelle est sa période ?
- En éliminant le paramètre t , trouver une équation satisfaite par les coordonnées de toutes les positions prises par le point au cours du temps. Ces positions forment la trajectoire du point ; décrivez géométriquement cette trajectoire.
- Quel est le vecteur vitesse pour $t = 0$? pour $t = \frac{\pi}{20}$? pour $t = \frac{\pi}{10}$? pour $t = \frac{2\pi}{5}$?
- Faites, dans le systèmes d'axes, le schéma de la trajectoire. Dessinez quelques vecteurs vitesse.
- Le point progresse-t-il constamment à la même allure sur sa trajectoire ?
- Quel est le vecteur accélération à l'instant t ?
- Ce vecteur accélération est-il de norme constante ? est-il toujours orthogonal à la trajectoire du point considéré ?

15.4. Soit C la courbe paramétrée du plan $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{cases} x = e^{2t} \cos(t^2) \\ y = e^{2t} \sin(t^2) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Le point $(1, 0)$ est-il un point de C ? si oui, est-il un point multiple de C ?
- Donner l'équation de la tangente à la courbe au point $(1, 0)$.
- Donner l'équation de la normale à la courbe au point $(1, 0)$.

15.5. Considérons la courbe C de $\mathbb{R}^2$ donnée par la paramétrisation

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (5 + \operatorname{ch} t, -2 - \operatorname{sh} t).$$

- En quel(s) point(s) de C la tangente à C est-elle parallèle à la droite d'équation $x = 0$? à celle d'équation $y = 0$?
- Montrer que le point $(6, -2)$ appartient à C .
- La courbe C coupe-t-elle l'axe ox ?
- Donner l'équation de la tangente à C au point image de t_0 .
- Décrivez géométriquement la courbe C ; faites-en un schéma dans le système d'axes.

15.6. Un cycliste roule « éternellement » « dans » le plan $\mathbb{R}^2$. Sa position à l'instant t est donnée par

$$\begin{cases} x = t^3 + t, \\ y = t^2. \end{cases}$$

- Combien de fois passe-t-il à l'origine ?
- Combien de fois, sans être à l'origine, se dirige-t-il vers l'origine ?

15.7. Un point mobile dans $\mathbb{R}^3$ est à l'instant t au point (x, y, z) défini par

$$\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = 2 \cos 3t, \\ z = 2 \sin 3t. \end{cases}$$

- Déterminer son vecteur vitesse à l'instant t .
- Déterminer sa vitesse numérique à l'instant t .
- Déterminer son vecteur accélération à l'instant t .

15.8. Montrer que toutes les tangentes à l'hélice de $\mathbb{R}^3$ d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = bt. \end{cases}$$

coupent le plan oxy sous le même angle.

15.9. Trouver le vecteur tangent, les équations de la tangente et l'équation du plan normal au point $(3, 9, 27)$ de la courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$\vec{op} = t\vec{e}_1 + t^2\vec{e}_2 + t^3\vec{e}_3$$

(où $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ est la base canonique).

15.10. Considérons le point mobile de $\mathbb{R}^3$ donné en fonction du temps t par

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(t^2 + 1), \\ z = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

À quel(s) instant(s) la vitesse de ce point mesure-t-elle 1 ?

15.11. Considérons la courbe paramétrée C de $\mathbb{R}^3$ d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \\ z = t^4. \end{cases}$$

- a. Cette courbe paramétrée C possède-t-elle des points doubles ?
- b. Cette courbe C est-elle plane ?
- c. Montrer que C est située sur la surface d'équation $z = x^2$.
- d. Donner des équations de la tangente à C au point $(1, 1, 1)$.
- e. Donner l'équation du plan normal à C au point $(1, 1, 1)$.

15.12. Par intégration, calculer la longueur des arcs de courbes paramétrés lisses suivants :

- a. $[6, 7] \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (3t - 1, 2t, -7t + 3)$;
- b. $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (2 - \cos 6t, 3 + \sin 6t)$.

15.13. Calculer la longueur de l'arc de courbe donné par

- a. $[0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (e^t \cos t, e^t \sin t)$;
- b. $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (\frac{3}{2} \cos^3 t, 3 \sin^3 t)$;
- c. $[0, 5] \rightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (t, 3t^2, 6t^3)$.

15.14. Calculer la longueur du chemin conduisant du point $(1, -1)$ au point $(1, 1)$ le long de la courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation $y^2 = x^3$.

Chapitre 16

Fonction réelles de plusieurs variables

16.1. Faites un schéma du plus grand domaine de la fonction et de quelques-unes des lignes de niveau (n et R sont des constantes) :

$$\begin{aligned} f : (x, y) &\mapsto 2x - 3y + 1; & k : (x, y) &\mapsto \sqrt{16 - x^2 - y^2}; \\ g : (x, y) &\mapsto \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}; & l : (x, y) &\mapsto \ln(x \cdot y); \\ h : (x, y) &\mapsto xy; & m : (P, V) &\mapsto T = \frac{1}{nR_T} PV; \\ j : (x, y) &\mapsto 5; & n : (P, T) &\mapsto V = nR \frac{T}{P}. \end{aligned}$$

16.2. En représentant le système d'axes xyz , faites un schéma du graphe, de quelques lignes de niveau dans $\mathbb{R}^2$ et des lignes correspondantes sur le graphe pour la fonction

$$\begin{aligned} \text{a. } \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) &\mapsto 2x - 3y + 1; & \text{c. } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : (x, y) &\mapsto z = xy; \\ \text{b. } \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) &\mapsto z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}; & \text{d. } \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) &\mapsto \sin \sqrt{x^2 + y^2}; \end{aligned}$$

16.3. La fonction suivante, considérée sur son plus grand domaine dans $\mathbb{R}^2$, est-elle continue ?

$$\text{a) } f : (x, y) \mapsto x^2 y^3 - \sin(x + y); \quad \text{b) } h : (x, y) \mapsto \frac{x^2 + y^2}{x}.$$

16.4. Donner le plus grand domaine de la fonction et calculer les dérivées partielles premières :

$$\begin{aligned} f : (x, y) &\mapsto e^x \sin y; & j : (x, y, z) &\mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \\ g : (x, y) &\mapsto (x^2 + y^2)e^{-xy}; & k : (x, y, z, t) &\mapsto x^2 - y^2 + z^2 - t^2. \\ h : (x, y) &\mapsto e^{\cos(x/y)}; \end{aligned}$$

16.5. Si $f(x, y) = \cos^2(x + 3y)^2$, que valent

$$\text{a) } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) ? \quad \text{b) } \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) ? \quad \text{c) } \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{16}\right) ?$$

16.6. Si $PV = nRT$ avec n, R constantes, que valent

$$\text{a) } \frac{\partial T}{\partial P} ? \quad \text{b) } \frac{\partial T}{\partial V} ? \quad \text{c) } \frac{\partial P}{\partial T} ? \quad \text{d) } \frac{\partial V}{\partial P} ? \quad \text{e) } \frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} ?$$

16.7. Considérons la fonction

$$\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}.$$

En quel(s) point(s) de $\mathbb{R}^2$ s'annule la dérivée partielle $\frac{\partial \rho}{\partial x}$? Même question pour $\frac{\partial \rho}{\partial y}$. Donnez une interprétation géométrique de vos résultats.

16.8. Calculer toutes les dérivées partielles du second ordre des fonctions appliquant x sur

$$\text{a) } \frac{x - y}{x + y}; \quad \text{b) } y^x; \quad \text{c) } \arctan \frac{x}{y}; \quad \text{d) } y^2 \sin \frac{x}{y}.$$

16.9. L'équation d'onde en la fonction inconnue $(x, t) \mapsto u(x, t)$ est de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

avec c une constante. Montrer que pour des choix judicieux des constantes A, α et β , la fonction $(x, t) \mapsto A \sin(\alpha x) \sin(\beta t)$ est solution de cette équation. Faites de même pour la fonction $(x, t) \mapsto A \cos(\alpha x - \beta t)$.

16.10. Après injection d'un produit, la concentration $c(x, t)$ à l'instant t en un point situé à une distance x du point d'injection satisfait, d'après un certain modèle,

$$\frac{\partial c}{\partial t} = k \frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

où k est une constante. Pour quelle(s) valeur(s) des constantes a et b (exprimées en fonction de k) la fonction $c(x, t) = t^a e^{bx^2/t}$ est-elle conforme au modèle ?

16.11. Calculer toutes les dérivées partielles quatrièmes de la fonction

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto e^{x^2+y^2}$$

(utilisez la symétrie en x, y de la fonction).

16.12. Soit f la fonction

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto xy^2z^3,$$

p le point de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(3, 2, 1)$ et $\mathbf{v}$ le vecteur de $\mathbb{R}^3$ lié en p et de composantes $(1, -1, 2)$. Calculer $df(p)(\mathbf{v})$.

16.13. Calculer les dérivées premières et les dérivées partielles secondes des fonctions :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 2y^2;$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 - 2xy + y^2;$$

$$h : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \ln(xy^2);$$

$$j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \cos(xy^2);$$

$$k : \mathbb{R} \times \{y \in \mathbb{R} \mid \forall k \in \mathbb{Z} : y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \operatorname{tg} \frac{x}{y};$$

$$l : (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x \ln y + y \ln x;$$

$$m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^3y + e^{xy^2}.$$

16.14. Pour $p = (\frac{\pi}{4}, 1)$ et le vecteur $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^2$ lié en p de composantes $(3, 5)$, calculer la dérivée selon $\mathbf{v}$ de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (\cos(x \cdot y))^2.$$

16.15. Soit la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 - xy - y^2$$

et en chaque point (x, y) du plan le vecteur $\mathbf{v}$ de norme 1 lié en ce point et faisant avec le demi-axe positif ox^+ un angle mesurant $\frac{\pi}{3}$ radians. Calculer $D_{\mathbf{v}}f(x, y)$.

16.16. Calculer la dérivée de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 - xy - 2y^2$$

au point $p = (1, 2)$ dans la direction orientée formant avec l'axe ox un angle orienté mesurant 60° .

16.17. Calculer au point $(1, 2, 1)$ la dérivée de la fonction

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (u, v, w) \mapsto u^2 - 3vw + 5$$

dans la direction orientée faisant le même angle inférieur à $\frac{\pi}{2}$ avec chacun des demi-axes positifs de coordonnée.

16.18. Soit f la fonction

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto e^{xz} \sin(x + y).$$

Déterminez le gradient de f au point $(2, -2, 1)$.

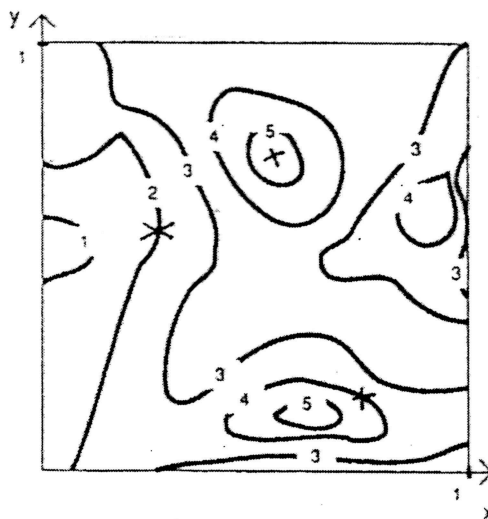
16.19. Décrivez le gradient, en un point quelconque de $\mathbb{R}^2$, de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 5; \\ g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 2x; \\ h : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 2x + 3y; \\ j : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

16.20. Faites un schéma dans un système d'axes de quelques courbes de niveau et quelques gradients de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy.$$

16.21. Voici des lignes de niveau d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, avec mention des valeurs de la fonction. Dessinez une estimation du gradient de la fonction aux trois points marqués.



16.22. Soit la fonction f appliquant (x, y) sur $\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}}$. Après avoir déterminé le domaine de f et la nature du graphe de f , faites un schéma dans un système d'axes oxy

- du graphe de f ;
- de quelques lignes de niveau de f dans le plan oxy ;
- des lignes correspondantes sur le graphe de f ;
- de quelques gradients de f .

16.23. Au point indiqué, dans quelle direction orientée la fonction augmente-t-elle le plus ?

- a) $f : \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto \cos(x \cdot y)$ au point $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$;
- b) $f : \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto 3x - 2y + 5z$ au point $(6, 7, 8)$;
- c) $f : \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto 4x^2 - y^2 + 3z^2$ au point $(1, -2, 5)$;

Chapitre 17

Optimisation à deux variables

17.1. Déterminer les points critiques de la fonction f définie par

$$f(x, y) = (x - 1)y(y - x)$$

et déterminer leur nature (min, max, ni min ni max).

17.2. Calculez le volume de la plus spacieuse boîte de forme parallélépipède rectangle dont trois côtés sont sur les axes, dont un coin est l'origine du système d'axes orthonormés $Oxyz$ et dont le coin opposé (x, y, z) est dans le morceau de plan d'équation

$$\{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_0^+)^3 \mid \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1\}.$$

17.3. Déterminez les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes :

- a. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$
- b. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 + y^3 + 3xy + 43$
- c. $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < 1\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 - 3y^2 + x - 2y - 1$
- d. $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 - 3y^2 + x - 2y - 1$

Chapitre 18

Intégrales multiples

18.1. Donner la valeur des intégrales suivantes :

- a. $\iint_D 3 \, dx \, dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } -2 \leq x \leq 2, \text{ et } -5 \leq y \leq 1\}$;
- b. $\iint_D -2 \, dx \, dy$, où $D = [0, 3] \times [-2, -1]$;
- c. $\iint_D dx \, dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } (x-4)^2 + (y-3)^2 \leq 9\}$;
- d. $\iint_D x \, dx \, dy$, où $D = [-1, 1] \times [0, 3]$;
- e. $\iint_D (x+y) \, dx \, dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 + y^2 \leq 36\}$.

18.2. Calculer.

- a. $\iint_D (x+y) \, dx \, dy$, où $D = [0, 1] \times [0, 1]$;
- b. $\iint_D x \sin y \, dx \, dy$, où $D = [0, 1] \times [0, \pi]$;
- c. $\iint_D (x+y)^2 \, dx \, dy$, où D est la région bornée du plan délimitée par les trois droites d'équations respectives $x=0$, $y=0$, $x+y=1$;
- d. $\iint_D y^2 \, dx \, dy$, où D est la couronne circulaire délimitée par les cercles de centre $(0, 0)$ et de rayons 1 et 2 ;
- e. $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2\}$ avec des constantes réelles r_1, r_2 telles que $0 < r_1 < r_2$;
- f. $\iint_D y \, dx \, dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 - y^2 \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$;
- g. $\iint_D x \, dx \, dy$, où D est le triangle plein de sommets $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(0, 1)$.
- h. $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} \, dx \, dy$, où D est la couronne circulaire délimitée par les cercles de centre $(0, 0)$ et de rayons 1 et 2 ;
- i. $\iint_D \frac{1}{x^2+y^2} \, dx \, dy$, où D est l'ensemble des (x, y) vérifiant $r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2$, avec r_1, r_2 nombres réels tels que $0 < r_1 < r_2$;
- j. $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, où D est défini par $x^2 + y^2 \leq 8x$;
- k. $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy$, où D est défini par $xy < 0$ et $x^2 + y^2 \leq 1$.
 - l. $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x \leq y \text{ et } x^2 + y^2 \leq y\}$;
- m. $\iint_D x^2 y^3 \, dx \, dy$, où D est le triangle plein de sommets $(0, 3)$, $(2, 1)$ et $(3, 5)$.

18.3. Si f est une fonction continue de $D = [0, 1] \times [0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ à valeurs toutes positives ou nulles et $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = 0$, faut-il que f soit la fonction nulle sur D ?

18.4. Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 2 - x^2 - y^2$. Faites un schéma de cette surface en dessinant aussi le système d'axes. Calculez ensuite le volume de la région située entre le plan d'équation $z = 0$ et la surface S , au dessus du plan $z = 0$. (Indice : utiliser une intégrable double en coordonnées polaires.)

18.5. Calculer, à l'aide d'une intégrale double, l'aire de la région bornée de $\mathbb{R}^2$

- a. délimitée par les paraboles d'équations respectives $y^2 = 10x + 25$ et $y^2 = -6x + 9$;

- b. ne contenant pas l'origine et délimitée par les courbes d'équations $x^2 + y^2 = 4$ et $x = 1$ respectivement ;
- c. délimitée par les droites d'équations $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$ en coordonnées polaires, ainsi que par l'arc de cercle de rayon 1 centré à l'origine et intercepté par ces deux droites.

18.6. Calculer par intégrale double le volume de la région bornée de $\mathbb{R}^3$ délimitée par les deux cylindres d'équations respectives $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + z^2 = 1$.

18.7. Déterminer

- a. $\iiint_D (x + y + z) \, dx \, dy \, dz$, si $D = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$;
- b. $\iiint_D 5 \, dx \, dy \, dz$, si $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 \leq 1\}$;
- c. $\iiint_D dx \, dy \, dz$, si $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$.

18.8. Calculer, par réduction à des intégrales simples,

- a. $\iiint_D xyz \, dx \, dy \, dz$, où $D = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$;
- b. $\iiint_D y \, dx \, dy \, dz$, où D est la région bornée du premier octant de $\mathbb{R}^3$ limitée par le plan d'équation $x + 2y + 3z = 1$.

18.9. Quelles sont les coordonnées cylindriques du point $(-1, 1, 2)$ de $\mathbb{R}^3$?

18.10. Quel est le point de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées sphériques sont $(10, \pi/2, \pi/4)$?

Chapitre 19

Complexes

19.1. Effectuer les opérations

- | | |
|--------------------------------|--|
| a) $(1 + i) + (3 - 2i) - 4i$; | e) $(1 - i)^3$; |
| b) $(2 - 3i)(3 - 2i)$; | f) $\frac{1}{3 - 5i}$; |
| c) $(3 - i)(3 + i)$; | g) $\frac{2 + i}{4 - 3i}$; |
| d) $(3 + 2i)^2$; | h) $\frac{1 - i}{i}$; |
| | i) $\left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^{10}$. |

19.2. Calculer les racines carrées de :

- | | |
|------------|------------------|
| a) i ; | c) $-5 - 12i$; |
| b) $50i$; | d) $-21 + 20i$. |

19.3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

- | | |
|--|---------------------------------|
| a) $6x^2 - 12x + 7 = 0$; | f) $x^4 - 1 = 0$; |
| b) $2x^4 + x^2 - 1 = 0$; | g) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$; |
| c) $x^2 - x(4 - i) + 5 + i = 0$; | h) $x^2 - (2 + 3i)x + 6i = 0$; |
| d) $x^2 + x + 3\sqrt{2}i = 0$; | j) $x^3 - 1 = 0$; |
| e) $x^2 - (4 \pm 2i)x + 12 + 4i = 0$; | k) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$. |

19.4. On considère l'équation :

$$z^3 - (1 + 8i)z^2 - (15 - 8i)z + 15 = 0.$$

- Cette équation admet une racine réelle. Quelle est cette racine ?
- Rechercher toutes les racines de cette équation dans le champ des nombres complexes.

19.5. Calculer en se servant de la représentation polaire

- | | |
|---|--|
| a. $(3 + 3i)(-1 + i\sqrt{3})$; | e. les racines cubiques de $1 + i$; |
| b. $\frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}}$; | f. les racines cubiques de $2 + 2\sqrt{3}i$; |
| c. $(-1 + i\sqrt{3})^{10}$; | g. les racines quatrièmes de $1 + i\sqrt{3}$; |
| d. les racines carrées de $3 - 4i$; | h. les racines sixièmes de $-27i$. |

19.6. Soit les ensembles A, B et C formés respectivement par les nombres complexes z satisfaisant

$$|z - 2| \leq 1, \quad |z - i| \leq 2 \quad \text{et} \quad |z - (2 + 2i)| \leq 2.$$

Représenter géométriquement ces ensembles dans le plan de Gauss.

19.7. Démontrer que deux nombres complexes non réels sont conjugués ssi la somme et le produit de ces nombres sont réels.

19.8. Soit $z = 1 - i\sqrt{3}$.

- Que vaut z^5 ?
- Déterminer le plus petit nombre naturel strictement positif n tel que z^n soit réel.
- Montrer qu'aucune puissance de z n'est imaginaire pure.

19.9. Trouver toutes les solutions complexes de l'équation

$$z(z - 2)^3 = 8z.$$

Représenter ces solutions dans le plan de Gauss et montrer que les points obtenus sont situés sur un cercle. Donner l'équation de ce cercle.

19.10. Trouver tous les nombres complexes z tels que z^2 soit une racine carrée de z .

19.11. Où est l'erreur dans le raisonnement suivant ? Partons de $i = i$; donc $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$. Comme $-1 = \frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$, on a $\sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}}$. Il en résulte que $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$ et $\frac{i}{1} = \frac{1}{i}$, d'où $i^2 = 1$.

19.12. Combien existe-t-il de nombres complexes z tels que $z^6 = 3$? Donnez les modules et les arguments de tous ces nombres.

19.13. Comment se simplifie l'équation $x^3 - 3ix^2 - 3x - 7i = 0$ si l'on y remplace x par $x + i$? En déduire les trois racines de l'équation initiale.

Chapitre 20

Équations différentielles

20.1. Pour quelle(s) valeur(s) réelle(s) de a l'équation différentielle en la fonction inconnue $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto y(t)$

$$\frac{dy}{dt}(t) = (t - a)y(t)$$

admet-elle la solution

$$y(t) = C e^{r(t-1)^2}$$

où C et r sont des constantes réelles données avec $C \neq 0$?

20.2. Trouver une équation différentielle du premier ordre admettant pour solutions les fonctions $x \mapsto y = ax$, où a est n'importe quel nombre réel.

20.3. Trouver une équation différentielle du premier ordre admettant pour solutions au moins toutes les fonctions $y = y(x)$ satisfaisant

$$x + a = e^x y$$

pour une certaine constante réelle a .

20.4. Sans résoudre l'équation, déterminer le lieu des points (x, y) où la solution $y = y(x)$ de l'équation différentielle $y' = xy - 1$ atteint un minimum ou un maximum. Montrer que toutes les solutions ont un graphe dans $\mathbb{R}^2$ qui coupe les axes sous un angle constant.

20.5. Dans quelle région du plan $\mathbb{R}^2$ les graphes des fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = \sin(x^2 + y^2)$ ont-ils une pente strictement positive ?

20.6. Quelle équation différentielle caractérise la famille des courbes d'équation $y = C_1 x + C_2 x^2$, où C_1 et C_2 varient dans $\mathbb{R}$?

20.7. Soit l'équation différentielle $(x + y)dx + x dy = 0$. Quel est le lieu des points appartenant aux courbes représentant les solutions y de cette équation différentielle et en lesquels y' vaut 2 ?

20.8. Résoudre les équations différentielles du premier ordre à variables séparables :

a) $y' \sqrt{1 - x^2} + xy = 0$;

b) $(1 - y^2)dy - y dx = 0$;

c) $(1 + y^2)x + (1 + x^2)y' = 0$;

pour les équations suivantes donner de plus la solution particulière satisfaisant $y_0 = y(x_0)$:

d) $(x - 4)xy' + y = 0$, $x_0 = 5$, $y_0 = -1$;

e) $(1 + y)dx - (1 + x)dy = 0$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

20.9. Quelle est la courbe de $\mathbb{R}^2$ qui représente une solution de l'équation différentielle $y' = \ln^2 x$ et qui coupe la première bissectrice au point d'ordonnée égale à 1 ?

20.10. Montrer que la substitution $y = \frac{t}{x}$ réduit l'équation différentielle $y(1 - xy)dx = x(1 + xy)dy$ à une équation à variables séparables. Résoudre l'équation donnée.

20.11. Une capacité se décharge au travers d'une résistance. Sa charge q , fonction du temps t , satisfait

$$\frac{dq}{dt} = i$$

où l'intensité i du courant est donnée comme suit en fonction du temps :

$$i = -\frac{q_0}{RC}e^{-t/RC}.$$

Dans cette expression, q_0 , R et C sont des constantes (q_0 désigne la charge à l'instant initial $t = 0$, R la résistance et C la capacité).

- Exprimer q en fonction du temps et des constantes de l'énoncé.
- Les trois constantes q_0 , R et C étant positives, la charge augmente-t-elle ?
- Pour t tendant vers l'infini, la charge a-t-elle une valeur limite ?

20.12. Trouver la solution $y = y(x)$ de l'équation différentielle

$$y' = (1 + y^2)x^2$$

satisfaisant la condition initiale $y(0) = 1$.

20.13. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle

$$y' = -\frac{x+y}{x+6},$$

ainsi que toutes les solutions particulières prenant la valeur 3 pour $x = 2$.

20.14. Résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre :

- $y' + 2xy = 4x$;
- $(x-2)y' = y + 2(x-2)^3$;
- $y' + y \cot x = 5e^{\cos x}$, et donner la solution particulière par le point $(\frac{\pi}{2}, -4)$;
- $x dy - 2y dx = (x-2)e^x dx$;
- $\frac{dr}{d\theta} + 3r = 2$.

20.15. Considérons l'équation différentielle

$$(x^2 + 2x + 5)y' - (x+1)y = x+1.$$

- Déterminer la solution générale de cette équation différentielle.
- Combien de solutions particulières passent par le point $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$? Déterminer toutes ces solutions particulières.

20.16. Résoudre les équations différentielles suivantes : lorsque des conditions initiales sont données, trouver les solutions qui satisfont de plus ces conditions.

- | | |
|--|---|
| a) $(1+x^2)xy dy = (1+y^2)dx$; | f) $y' + \frac{y}{2x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 4$, $y_0 = 4$; |
| b) $y' - 3\frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$; | g) $(1-x)dy - y^2 dx = 0$; |
| c) $y' - 2\frac{y}{x+1} = (x+1)^3$; | h) $d\rho + \rho \operatorname{tg} \theta d\theta = 0$; |
| d) $y' = 0$; | i) $x^3 y' + (2-3x^2)y = x^3$; |
| e) $y' = \frac{2x-1}{x^2}y + 1$; | j) $\sqrt{1-4x^2} dy + 2\sqrt{1-y^2} dx = 0$. |

20.17. Résoudre l'équation différentielle $y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x$, où $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

20.18. Résoudre les équations différentielles suivantes, en tenant compte des conditions initiales (CI) données :

- a. $y' - xy = x^3$;
 b. $y' - \frac{a}{x}y = \frac{x+1}{x}$ (où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) ;
 c. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$;
 d. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$;
 e. $y' \cos x + y \sin x = 1$;
 f. $y' + y = e^{-x}$;
 g. $y' - y \tan x = \cos x$;
 h. $y' - \frac{2y}{x} = x^2 e^x$;
 i. $xy' + 4y = x$;
 j. $y'(x+1) - 2y = x+1$ (CI : $x_0 = y_0 = 0$) ;
 k. $y' + \frac{y}{2x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (CI : $x_0 = y_0 = 4$) ;
 l. $x^3 y' + (2 - 3x^2)y = x^3$;
 m. $y' + y \cot x = 5e^{\cos x}$ (CI : $x_0 = \frac{\pi}{2}, y_0 = -4$) ;
 n. $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ (CI : $x_0 = y_0 = 2$) ;
 o. $yy' - xy^2 - x = 0$.

20.19. Déterminer la solution générale et, lorsque des conditions initiales sont données, la solution correspondante des équations différentielles suivantes :

- a. $(x^2 - yx^2) dy + (y^2 + xy^2) dx = 0$,
 $x_0 = y_0 = 2$;
 b. $y' + y \cot x = \sin x$;
 c. $y' + y \tan x = \sec^2 x$;
 d. $y' - y \sec x = 1$;
 e. $x(x^2 + 1)y' + (x^2 - 1)y = \frac{x^3}{1 + x^2}$;
 f. $y' - \frac{n}{x}y = e^x x^n$,
 où $n \in \mathbb{N}$;
 g. $x(1 - x^2) dy + (2x^2 - 1)y dx = ax^3 dx$,
 où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
 h. $ye^{2x} dx - (1 + e^{2x}) dy = 0$;
 i. $\tan x \sin^2 y dx + \cos^2 x \cot y dy = 0$;
 j. $3e^x \tan y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0$.

20.20. Résoudre l'équation différentielle en la fonction inconnue $t \mapsto y(t)$

$$\frac{dy}{dt}(t) + y(t) = \max(\sin 3t, 0).$$

20.21. Soit l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} + y f(x) = \sin x.$$

a) Déterminer la fonction f pour que cette équation admette comme solution la fonction cosinus. Dans la suite, nous travaillons avec cette fonction f .

b) Quelle est la solution générale de l'équation différentielle ?

c) Quelle est la solution particulière qui admet un extrémum pour $x = \frac{\pi}{4}$?

20.22. Quelle est la fonction solution de l'équation différentielle $(x^2 + y^2)dx = 2xy dy$ et dont le graphe coupe la droite d'équation $y = x + 3$ au point d'abscisse égale à -2 ?

20.23. Un certain mélange est formé d'un composant qui résiste au temps, et d'un autre composant qui se volatilise à une vitesse proportionnelle à la quantité de mélange présente à l'instant considéré. Si C_1 est la quantité présente du composant constant, C_2 celle du deuxième composant à l'instant t et k le facteur de proportionnalité, exprimez C_2 en fonction du temps t et des constantes $C_1, C_2(0)$ et k . Représenter graphiquement C_2 en fonction du temps.

20.24. Désignons par $C(t)$ la quantité d'un certain médicament présente dans le sang d'un patient à l'instant t . Ce médicament est éliminé par l'organisme. Admettons que la diminution de la quantité $C(t)$, sur l'intervalle de temps $[t, t+h]$, c'est-à-dire $C(t+h) - C(t)$, soit approximativement égale à $-k C(t)h$, où k est une constante dépendant du médicament.

Supposons d'abord qu'une seule injection soit faite au patient, disons à l'instant $t = 0$, d'une dose C_0 du médicament.

a) Le modèle considéré conduit à un problème de Cauchy sur la fonction $C = C(t)$. Résolvez-le et faites un graphique de C en fonction du temps.

b) Montrez qu'à l'instant $t = \frac{1}{k}$, environ 63% du médicament a été éliminé, et au temps $t = \frac{2}{k}$ environ 87%.

20.25. Quelle est la solution générale de l'équation différentielle

$$ppy'' - 6y' + 9y = x + e^x?$$

Déterminez toutes les solutions particulières y telles que $y(0) = 2$.

20.26. Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes :

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| a. $y'' - 2y' = 0$ | f. $y'' + y' - 12y = 0$ | k. $y'' - 7y' + 10y = 0$ |
| b. $y'' - 4y' + 4y = 0$ | g. $y'' + 4y = 0$ | l. $y'' + 4y' + 5y = 0$ |
| c. $y'' - 4y' + 3y = 0$ | h. $y'' + y' + y = 0$ | m. $y'' - 4y' + 13y = 0$ |
| d. $2y'' - y' = 0$ | i. $y'' + 2y' + y = 0$ | n. $y'' - 4y' + 3y = 0$ |
| e. $y'' - 4y' = 0$ | j. $y'' - 2y' - 8y = 0$ | |

20.27. Déterminer la solution particulière des équations différentielles suivantes répondant aux conditions initiales indiquées :

- | | | | |
|-----------------------------|-------------------------|-------------|---------------|
| a) $y'' + 10y' + 16y = 0$, | $x_0 = 0$, | $y_0 = 1$, | $y'_0 = 12$; |
| b) $y'' - 6y' + 10y = 0$, | $x_0 = 0$, | $y_0 = 1$, | $y'_0 = 4$; |
| c) $y'' + 9y = 0$, | $x_0 = \frac{\pi}{3}$, | $y_0 = 1$, | $y'_0 = 1$. |

20.28. Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes :

- | | |
|--|--|
| a. $y'' - 6y' + 13y = 39$; | l. $y'' - 2y' + 2y = \cos 2x$; |
| b. $y'' + 2y' + 8y = 4x^2 - 6x - 3$; | m. $y'' + y = \cos 2x$; |
| c. $y'' - 2y' - 3y = 2x + 1$; | n. $y'' + 4y = \sin 2x - \cos 2x$; |
| d. $y'' + 9y = 9e^{3x}$; | o. $y'' + y' = x^2$; |
| e. $y'' - 2y' + y = 6e^x$; | p. $y'' - y = \sin x - \cos x$; |
| f. $y'' - 5y' + 6y = e^{-x}$; | q. $y'' + 5y' + 4y = 3 - 2x$; |
| g. $y'' - y' - 3y = e^{2x}$; | r. $y'' + 2y' + 2y = x^2 + \sin x$; |
| h. $y'' - 16y = 2e^{-4x}$; | s. $y'' - 9y = x + e^{2x} - \sin 2x$; |
| i. $y'' - 2y' + 5y = 10 \sin x$; | t. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 1 + e^x$; |
| j. $y'' - 5y' + 6y = -3 \sin x$; | u. $y'' + y = -2 \sin x + 4 \cos x$; |
| k. $y'' - 5y' + 4y = -2 \cos x + 8 \sin x$; | v. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$. |

20.29. Déterminer la solution particulière des équations différentielles suivantes répondant aux conditions initiales indiquées :

- | | | | |
|--------------------------------------|-------------|-----------------------|-------------------------|
| a) $y'' + 3y' + 2y = x^2 + 4x + 8$, | $x_0 = 0$, | $y_0 = 1$, | $y'_0 = 2$; |
| b) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + x^2$, | $x_0 = 0$, | $y_0 = 0$, | $y'_0 = 0$; |
| c) $y'' - 2y' - 3y = 2x + 1$, | $x_0 = 0$, | $y_0 = \frac{1}{3}$, | $y'_0 = -\frac{4}{9}$; |
| d) $y'' + 4y = 2 \cos 2x$, | $x_0 = 0$, | $y_0 = 0$, | $y'_0 = \frac{1}{2}$. |

20.30. Déterminer la courbe de $\mathbb{R}^2$ représentant la solution des équations différentielles suivantes et répondant aux conditions imposées :

- a) $y'' - 2y' + 2y = 2 \sin x$, courbe dont la tangente à l'origine est l'axe des abscisses ;
 b) $y'' - 2y' = 2x$, courbe dont la tangente au point $(0, 2)$ est parallèle à l'axe des abscisses ;
 c) 1. $y'' + 4y = 3 \cos x$,
 2. $y'' + 4y' = \sin 2x$, courbe(s) passant par les points $(0, 0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 0)$;
 d) $y'' + 4y = \sin 3x$, courbe passant par les points $(0, 2)$ et $(\frac{\pi}{4}, \frac{9\sqrt{2}}{10})$.

20.31. Sous quelles conditions sur les nombres réels a, b, c l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ n'admet-elle que des solutions périodiques ?

20.32. Déterminer l'équation différentielle du second ordre linéaire homogène à coefficients constants, dont la solution générale est $y = Ce^{-x} \cos(2x + \varphi)$, où C et φ sont des constantes d'intégration.

20.33. Soit l'équation différentielle $y'' + 2y' + my = 12x^2e^{-x}$.

- a) Déterminer la constante réelle m de manière que $y = x^4e^{-x}$ soit une solution particulière de cette équation.
 b) Déterminer ensuite, pour cette valeur de m , la solution générale.
 c) Quelle est la solution particulière qui passe par les points $(0, 0)$ et $(1, 1)$?

20.34. Soit l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = f(x)$.

- a) Déterminer $f(x)$ pour que $y = 4x^2e^{2x}$ soit solution de cette équation.
 b) Déterminer ensuite la solution générale.
 c) Déterminer la solution particulière dont le graphe est tangent à la première bissectrice à l'origine des axes.

20.35. Déterminer les fonctions nulles à l'origine et telles que leur dérivée première soit égale à l'opposé de la dérivée seconde.

20.36. Quelle est la courbe de $\mathbb{R}^2$ passant par l'origine et admettant en chaque point une pente égale au triple de l'abscisse du point ?

20.37. Quelle est la courbe de $\mathbb{R}^2$ passant par le point $(\frac{1}{2}, 2)$ dont la pente en chaque point est proportionnelle au carré de l'ordonnée du point ?

20.38. Le mouvement d'une masse M suspendue à un ressort de coefficient d'élasticité k est dans le vide déterminé par l'équation

$$M \frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0.$$

Déterminer ce mouvement et sa période s'il est périodique.

Si le mouvement a lieu dans un milieu tel que les forces de frottement soient proportionnelles à la vitesse, l'équation devient

$$M \frac{d^2y}{dt^2} + r \frac{dy}{dt} + ky = 0$$

où r est le coefficient de proportionnalité. Déterminer le mouvement en prenant comme conditions initiales $t = 0$, $y = A$, $y' = 0$ (discuter suivant les valeurs de M, k et r).

20.39. Le mouvement d'un pendule simple de longueur l oscillant d'un petit angle θ dans un milieu où la résistance est proportionnelle à la vitesse est caractérisé par l'équation

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2k \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \theta = 0.$$

Déterminer le mouvement a) pour $k = 0$; b) pour $k \neq 0$.

Discuter, dans ce dernier cas, en prenant comme conditions initiales $\theta = \theta_0$ et $\frac{d\theta}{dt} = 0$ en $t = 0$.

20.40. Étudier la solution générale de l'équation différentielle du mouvement harmonique amorti

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + n^2 = 0$$

dans les cas $n^2 < k^2$, $n^2 = k^2$, $n^2 > k^2$.

20.41. L'altitude y d'une pierre, de masse m , lancée verticalement (vers le haut) dans l'air, vérifie l'équation différentielle $y'' = -mg - \frac{k}{m}y'$ où g et k sont des constantes strictement positives.

- a) Calculez l'altitude de la pierre en fonction du temps, si sa vitesse initiale est v_0 ($y'(0) = v_0$).
- b) Déterminez la vitesse v_0 pour que l'altitude maximale de la pierre soit A .