

Bases de logique et de raisonnement

(Syllabus Chapitre I)

Contenu de la section

Quelques notions de rigueur et de logique

Contenu de la section

Quelques notions de rigueur et de logique

Vrai et Faux

Connecteurs logiques

Quantificateurs

Négation d'une proposition logique

Définitions, résultats et démonstration

Manipuler le vrai et le faux

On s'intéresse à la valeur de vérité d'une affirmation donnée : est-elle vraie ou fausse ? C'est soit l'un, soit l'autre.

Exemple

Considérons les affirmations suivantes

1. "x est positif" ;
2. "Si x est un nombre plus grand que 1 alors x est positif" ;

Alors :

- ▶ la première peut être vraie ou fausse selon la valeur de x, car on n'a pas donné la valeur de x. Pour $x = -1$ elle est fausse.
- ▶ la seconde est vraie. Car il est dit qui est x dans l'affirmation: c'est un nombre plus grand que 1, donc positif.

Un autre exemple:

Exemple

1. “Pour tout x entier, x est positif” ;
2. “Il existe x entier tel que x est positif” ;

Alors

- ▶ la première est fausse: car $x = -1$ n'est pas positif.
- ▶ la deuxième est vraie: il suffit de montrer qu'il existe un entier positif, et $x = 1$ (par exemple) fait l'affaire.

Contenu de la section

Quelques notions de rigueur et de logique

Vrai et Faux

Connecteurs logiques

Quantificateurs

Négation d'une proposition logique

Définitions, résultats et démonstration

Connecteurs logiques

Pour exprimer des affirmations plus complexes nous utilisons des symboles appelés **connecteurs logiques**. Il y en a quatre:

- ▶ “et”, noté $\wedge$
- ▶ “ou”, noté $\vee$. C’est un “ou” **inclusif**: l’un ou l’autre, ou bien les deux à la fois
- ▶ “contraire de” (encore appelé “négation de”), noté $\neg$
- ▶ “Si ... Alors” (encore appelé “implique”), noté $\rightarrow$.

Ces connecteurs servent à exprimer des phrases logiques en langage mathématique. Quand on connecte deux affirmations logiques à l’aide des symboles $\wedge$ (“et”), $\vee$ (“ou”), $\neg$ (“négation de”) ou encore $\rightarrow$ (“si ... alors”) on construit **une nouvelle affirmation**. Qui peut donc encore être soit vraie soit fausse.

Exemple 1

Exemple

On va exprimer avec des connecteurs la phrase

S'il pleut ou s'il grèle, je prends mon parapluie.

- ▶ Notons P l'affirmation "Il pleut",
- ▶ Notons G l'affirmation "Il grèle",
- ▶ Notons A l'affirmation "Je prends mon parapluie".

Alors on peut ré-écrire l'affirmation initiale comme

Si (il pleut ou il grèle) Alors (je prends mon parapluie),

ce qui s'écrit avec les connecteurs comme

$$(P \vee G) \rightarrow A.$$

Exemple 2

Exemple

Soit A l'affirmation "Il pleut" et B l'affirmation "il ne pleut pas". Alors B est le contraire de A , et donc

$$B = \neg A.$$

L'affirmation composée

$$A \vee \neg A$$

est alors l'affirmation "il pleut OU il ne pleut pas".

Cette affirmation est évidemment toujours vraie.

Contenu de la section

Quelques notions de rigueur et de logique

Vrai et Faux

Connecteurs logiques

Quantificateurs

Négation d'une proposition logique

Définitions, résultats et démonstration

Affirmation dépendant d'un paramètre

Il arrive parfois qu'une proposition logique dépende d'une certaine inconnue appelée x . On la note dans ce cas $P(x)$.

Exemple

On reprend l'exemple précédent. Pour tout nombre réel x , $P(x)$ désignera l'affirmation “ x est positif”.

Autrement dit: à chaque fois qu'on choisit une valeur de x , $P(x)$ est une affirmation logique. Elle peut donc être soit vraie soit fausse en fonction de la valeur de x .

Exemple

Dans l'exemple ci-dessus, $P(x)$ est évidemment vraie si x est positif et fausse si x est négatif.

Quantificateur $\forall$

On peut alors se demander si $P(x)$ est vraie pour toute valeur de x . On définit **une nouvelle affirmation Q** donnée par:

Q : “pour tout x , $P(x)$ est vraie”.

Attention: Q ne dépend plus du paramètre x !

Q est une affirmation logique: elle est vraie ou fausse.

Par exemple dire que Q est vraie revient exactement à dire que: **pour toute valeur de x , $P(x)$ est vraie.**

Mathématiquement, on écrit Q de manière plus concise en introduisant le quantificateur $\forall$: “pour tout x , $P(x)$ est vraie” se réécrira comme

$\forall x, P(x)$ est vraie.

Quantificateur $\exists$

D'autre part, on peut aussi se demander si $P(x)$ est vraie pour au moins une valeur de x . En français on veut savoir si l'affirmation

R: "Il **existe** x tel que $P(x)$ est vraie"

est elle-même vraie.

Cette affirmation se note à l'aide du quantificateur $\exists$:

"il existe x tel que $P(x)$ est vraie"

"Il existe une valeur de x telle que $P(x)$ est vraie" se réécrira comme

$\exists x, P(x)$ est vraie.

Retour sur les exemples précédents

Exemple

La proposition

“ $\forall x$ entier, x est positif”

est fausse. Car $x = -1$ n'est pas positif.

En français on lira parfois la phrase précédente comme “Tout entier x est positif”. Le sens précis mathématiquement est celui ci-dessus.

Exemple

La proposition

“ $\exists x$ entier, x est positif”

est en revanche vraie. Car $x = 1$ est positif.

Contenu de la section

Quelques notions de rigueur et de logique

Vrai et Faux

Connecteurs logiques

Quantificateurs

Négation d'une proposition logique

Définitions, résultats et démonstration

Règles de négation

On peut toujours écrire la négation d'une proposition logique en appliquant les règles formelles suivantes. Si A et B sont des propositions logiques (des énoncés qui peuvent être vrais ou faux),

- ▶ $\neg\neg A = A$. Le contraire du contraire est l'affirmation de départ.
- ▶ $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$. Le contraire du "et" est le "ou" (sans oublier de prendre la négation des propositions considérées).
- ▶ $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$.
- ▶ $\neg\forall = \exists$ et $\neg\exists = \forall$.

Règles de négation

Par exemple, la négation de “Il pleut **ou** il grêle” est “il ne pleut pas **et** il ne grêle pas”.

Et le contraire de “ **$\forall$** x entier, x est positif”, qui se lit encore “tout entier est positif”, est donc “**il existe un entier** qui n'est pas positif.”

Négation de l'implication

Si A et B sont des propositions logiques (des énoncés qui peuvent être vrais ou faux), le contraire de l'implication $A \rightarrow B$ est:

$$\neg(A \rightarrow B) = A \wedge (\neg B).$$

Par exemple, le contraire de la phrase "S'il neige, alors l'ULB est fermée" est "il neige **et** l'ULB **n'est pas** fermée. "

Contenu de la section

Quelques notions de rigueur et de logique

Vrai et Faux

Connecteurs logiques

Quantificateurs

Négation d'une proposition logique

Définitions, résultats et démonstration

Définitions et résultats

Définition

Une **définition** est une manière d'attribuer un mot ou une notation à un concept.

Exemple

La description du mot “définition” ci-dessus peut être vue comme une définition.

Définitions et résultats

Voici un exemple plus classique et plus “mathématique” d’une définition :

Définition

Si x est un nombre réel, et si k est un entier naturel (donc $k = 0, 1, \dots$), on définit x^k comme:

$$x^k := \underbrace{x \cdots x}_{k \text{ fois}}.$$

On a donc défini une notation qui permet de décrire le produit de x k fois avec lui-même.

Démonstration

Qu'est ce qu'une démonstration?

Définition

On appelle **démonstration** la succession d'affirmations qui découlent les unes des autres par applications de règles logiques à des résultats déjà connus.

En pratique, une démonstration sert à **convaincre** de la véracité d'une affirmation, en montrant qu'elle découle logiquement d'informations déjà connues.

Contenu de la section

Raisonnements

Un exemple simple

Exemple

J'ai 3 paires de chaussettes différentes. Si je choisis au hasard sans regarder combien dois-je prendre de chaussettes dans ma valise pour être totalement certain d'avoir au moins deux chaussettes d'une même paire ?

Réponse :

Ceci est un exemple simple de raisonnement déductif. En maths, pour résoudre des problèmes, on est amenés à effectuer différents types de raisonnements en fonction du contexte. On va décrire trois grands types de raisonnements.

Raisonnement par l'absurde

Question

Existe-t-il un nombre qui, multiplié par 0, vaut 1 ?

Exemple

Supposons par l'absurde qu'un tel nombre a existe.

Alors il vérifie $0 \cdot a = 1$. Or $a \cdot 0 = 0$. Dès lors nous aurions $0 = 1$, qui est impossible: c'est ce qu'on appelle **une contradiction**.

Principe du raisonnement par l'absurde: Si on veut montrer qu'une affirmation P est vraie, on commence par supposer qu'elle ne l'est pas, c'est-à-dire que son contraire $\neg P$ est vraie. On essaye alors d'aboutir à une contradiction, **c'est-à-dire à un résultat dont on sait avec certitude qu'il est faux**.

Contenu de la section

Raisonnements

Raisonnement par Contraposée

Raisonnement par récurrence (ou induction)

Raisonnement par Contraposée

On commence par deux exemples:

Exemple

Les affirmations “S’il pleut (alors) je prends mon parapluie” et “Si je ne prends pas mon parapluie, alors il ne pleut pas” **sont équivalentes: elles sont simultanément vraies ou fausses.**

On peut également passer de l’une à l’autre par un raisonnement par l’absurde.

Exemple

“Si x est divisible par 6, alors x est pair” est équivalente à “Si x n’est pas pair, alors x n’est pas divisible par 6”. **Forcément, car si x n’est pas pair, il n’est pas divisible par 2, donc ne l’est certainement pas par $6 = 2 \times 3$.**

Raisonnement par Contraposée

Ces deux exemples permettent de comprendre le principe général du raisonnement par contraposée qu'on peut décrire comme suit:

Théorème (Principe général du raisonnement par contraposée)

Si P et Q sont des affirmations, alors l'affirmation $P \rightarrow Q$ est équivalente à $(\neg Q) \rightarrow (\neg P)$.

Pour montrer que $P \rightarrow Q$ est vraie, on peut donc montrer que $(\neg Q) \rightarrow (\neg P)$ l'est. Vous verrez des exemples de ce raisonnement dans les séances d'exercices.

Contenu de la section

Raisonnements

Raisonnement par Contraposée

Raisonnement par récurrence (ou induction)

Principe de la démonstration par récurrence / induction

Pour toute valeur d'un entier **naturel** n (c'est-à-dire $n = 0, 1, 2, \dots$) on considère une proposition $p(n)$.

Supposons que nous voulions démontrer que **$p(n)$ est vraie pour toute valeur de n .**

On ne peut bien sûr pas vérifier une infinité de valeurs à la main.

Mais si nous pouvons prouver que :

1. **Etape initiale** : $p(0)$ est vraie, ET
2. **Hypothèse**: quelle que soit la valeur de n , **si $p(n)$ est vraie,**
3. **Thèse**: **alors $p(n + 1)$ l'est aussi**

alors nous aurons montré que $\forall n \in \mathbb{N}, p(n)$ est vraie.

[on peut écrire les étapes 2 et 3 sous la forme:

$$\forall n \in \mathbb{N}, (p(n) \rightarrow p(n + 1))$$

C'est ce qu'on appelle **la démonstration par récurrence**. La deuxième et troisième étape est appelée **l'étape de récurrence**.

Un exemple: la somme des entiers

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n = 0, 1, 2, \dots$, la somme des entiers de 0 à n vaut $\frac{n(n+1)}{2}$.

Notre affirmation $p(n)$ est donc:

$$p(n) : \text{“ la somme des entiers de 0 à } n \text{ vaut } \frac{n(n+1)}{2} \text{”}.$$

Un autre exemple: la somme des entiers (suite)

Un autre exemple: la somme des entiers (suite)

Un autre exemple: la somme des entiers (suite)

Un autre exemple: la somme des entiers (suite)

1. L'affirmation $p(0)$ est : "La somme des entiers de 0 à 0 vaut 0."
Elle est manifestement vraie! L'étape d'initialisation est donc montrée.
2. Il reste donc à montrer les étapes de la récurrence (Hypothèse et Thèse). Pour cela, si n est un entier quelconque, **on suppose que $p(n)$ est vraie**, c'est-à-dire on suppose que

$$0 + 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. Nous voulons montrer que $p(n+1)$ est vraie. On va donc devoir montrer que :

$$0 + 1 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Concrètement, on a juste **remplacé n par $n+1$** dans la propriété définissant $p(n)$.

Pour montrer cette égalité on va calculer la somme de gauche.

Un autre exemple: la somme des entiers (suite)

Quand on calcule la somme de gauche on peut isoler les premiers n termes: la somme s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} 0 + 1 + \cdots + n + (n + 1) &= 0 + 1 + \cdots + n + (n + 1) \\ &= \underbrace{0 + 1 + \cdots + n}_{= \frac{n(n+1)}{2}} + (n + 1), \\ &= \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1), \end{aligned}$$

où on a utilisé **le fait que $p(n)$ est vraie**. En réduisant au même dénominateur on trouve

$$\frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) = \frac{n(n + 1) + 2(n + 1)}{2} = \frac{(n + 2)(n + 1)}{2}.$$

Mettant maintenant bout à bout nos dernières égalités, nous avons obtenu :

$$0 + 1 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

ce qui montre donc que $p(n + 1)$ est vraie. Par le principe de récurrence, $p(n)$ est donc vraie pour tout entier $n = 0, 1, \dots$