

Géométrie Analytique dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$: systèmes de coordonnées et équations dans le plan

(Syllabus Chapitre V et Chapitre VII jusqu'à la partie 3.)

Contenu de la section

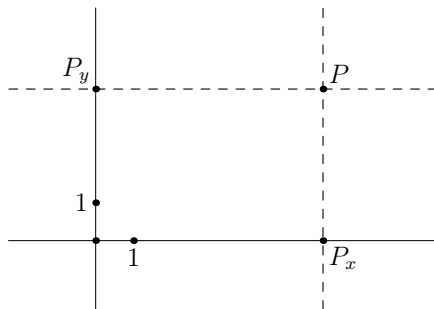
Géométrie analytique

Géométrie analytique

La **géométrie analytique** est une manière d'aborder des problèmes de géométrie **en faisant des calculs**. On utilise pour ça un ou plusieurs systèmes de coordonnées.

On donne quelques exemples dans le plan:

Coordonnées cartésiennes dans le plan



Définition

Un repère cartésien est la donnée de deux axes sécants, **et d'une unité sur chaque axe**. L'intersection des axes est appelée l'origine. Les **coordonnées cartésiennes** d'un point P du plan sont alors obtenues en projetant ce point sur chacun des axes, et en repérant la projection par rapport à l'unité.

Un système de coordonnées donne une équivalence entre

- ▶ les points du plan et
- ▶ les couples de nombres réels de la forme (x,y) , où x et y décrivent tous les nombres réels. Nous noterons $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des points de la forme (x,y) lorsque x et y décrivent $\mathbb{R}$. Nous allons donc repérer les points du plan par leurs coordonnées (x,y) où x est l'abscisse et y l'ordonnée.

Dans l'espace, on représente des points par trois coordonnées: (x, y, z) , respectivement abscisse et coordonnée dans le plan horizontal et hauteur. On notera de même $\mathbb{R}^3$ l'ensemble des points de la forme (x, y, z) lorsque x, y et z décrivent $\mathbb{R}$: c'est l'ensemble des points de l'espace.

Contenu de la section

Géométrie analytique

Points et vecteurs

Opérations de base

Norme d'un vecteur

Systèmes de coordonnées

Points de $\mathbb{R}^n$

Définition

Un élément de $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3 , peut être vu comme un *point*, et il s'écrit alors comme ses *coordonnées*, qui sont n nombres. Nous les notons généralement $(p_1, p_2, \dots, p_n)$.

Lorsque $n = 2$: les coordonnées sont appelées *l'abscisse et l'ordonnée* (souvent notées x et y)

Exemple

Le point $(1, -1)$ de $\mathbb{R}^2$ désigne l'élément du plan dont l'abscisse vaut 1 et l'ordonnée vaut -1 .

Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

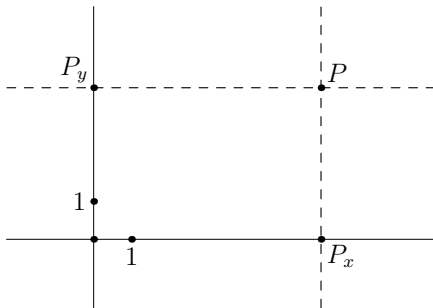
On peut aussi voir un élément de $\mathbb{R}^n$ comme **un déplacement dans la direction indiquée** (une translation) ou encore comme une flèche entre deux points. C'est ce qu'on appelle un vecteur:

Définition

Un vecteur est un élément de $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, \dots$, dont les coordonnées sont maintenant appelées **les composantes** du vecteur.

Exemple

Le vecteur $(-1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ indique une translation dans la direction “Nord-Ouest” sur le plan.



Différence entre point et vecteur

La différence, fondamentale et intuitive entre point et vecteur est:

- ▶ que le point représente **un état, une position**
- ▶ tandis que le vecteur représente **un déplacement**, dans une direction donnée, entre deux points.

Remarque

Mais les deux sont représentés par des éléments de $\mathbb{R}^n$! Par exemple si $n = 2$: pour un point, (x, y) représente sa position dans le plan. Alors que pour un vecteur, (x, y) représente un décalage de x unités sur l'axe horizontal et de y sur l'axe vertical.

Composantes d'un vecteur

Un vecteur se représentera sous la forme d'une flèche. Il est donné sans point de départ: c'est une direction.

Si x et y sont deux points de $\mathbb{R}^n$, on peut en revanche calculer le vecteur qui représente le déplacement de x à y . Ce vecteur se note généralement $\overrightarrow{xy}$.

Ses composantes sont données en prenant la différence entre les coordonnées de y (le point d'arrivée) et celles de x (le point de

départ). Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{xy} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \end{pmatrix}$

Contenu de la section

Géométrie analytique

Points et vecteurs

Opérations de base

Norme d'un vecteur

Systèmes de coordonnées

Opérations sur les vecteurs

Si $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut sommer deux vecteurs et multiplier un vecteur par un réel.

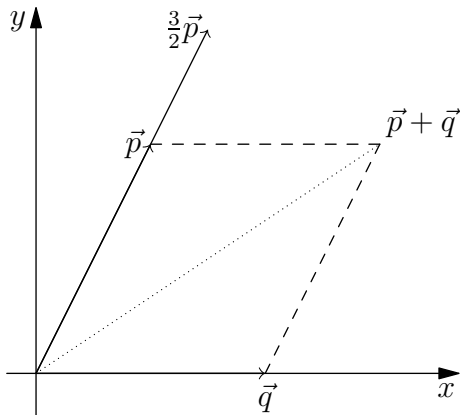
Tout se fait **coordonnée par coordonnée**:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\vec{x} - \vec{y} = (x_1, \dots, x_n) - (y_1, \dots, y_n) = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$$

$$\lambda \vec{x} = \lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

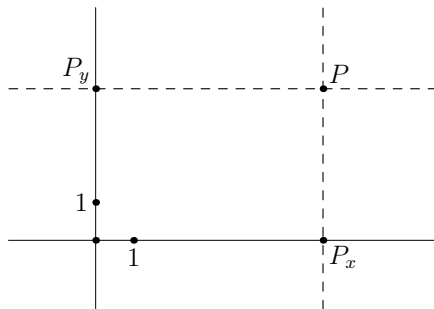
- ▶ la somme de deux vecteurs est donnée par la règle du parallélogramme ;
- ▶ la multiplication par un réel multiplie la longueur.



Combiner points et vecteurs

- ▶ la différence de deux **points** est un vecteur allant du second vers le premier : $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ est le vecteur $\overrightarrow{qp}$;
- ▶ la somme d'un **point** et d'un **vecteur** représente le point obtenu en se déplaçant dans la direction du vecteur à partir de ce point : le résultat est **un point** ;
- ▶ la somme de deux ou plusieurs **vecteurs** représente la composée de déplacements successifs : le résultat est **un vecteur**.

Tout ceci se calcule en coordonnées.



Exemple

Si on considère $\mathbf{p} = (1, 2)$ comme un point, et $\vec{w} = (-1, 1)$ comme un vecteur (donnant la direction “Nord-Ouest”), alors leur somme $\mathbf{p} + \vec{w} = (1, 2) + (-1, 1) = (0, 3)$ comme le point obtenu en translatant le point de départ, $\mathbf{p}$, dans la direction donnée $\vec{w}$.

Vecteur nul

Définition

Dans $\mathbb{R}^n$, l'élément particulier $(0,0,\dots,0)$ se note $\vec{0}$ et est appelé *vecteur nul*.

Il représente un déplacement ... nul (donc aucun déplacement).

Résultat

Quel que soit le vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, nous avons

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}.$$

Décomposition selon les axes de coordonnées

Regardons le cas $n = 3$. Nous notons $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ les vecteurs suivants :

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0) \qquad \vec{e}_2 = (0, 1, 0) \qquad \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

Soit $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Alors $\vec{v}$ peut s'écrire:

$$\vec{v} = (v_1, 0, 0) + (0, v_2, 0) + (0, 0, v_3) = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3.$$

Attention, ici $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ sont eux-mêmes des vecteurs. Alors que v_1, v_2 et v_3 sont des nombres (encore appelés des “scalaires”). Il ne faut pas confondre les deux.

Centre de gravité

Le milieu d'un segment d'un point **a** jusqu'à un **b** est donné par :

$$\mathbf{a} + \frac{1}{2} \overrightarrow{ab} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

Le *milieu* ou *centre de gravité* des points $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ est donné par:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbf{a}_i.$$

Chaque coordonnée du centre de gravité **g** est la *moyenne des coordonnées des $\mathbf{a}_i$* .

Contenu de la section

Géométrie analytique

Points et vecteurs

Opérations de base

Norme d'un vecteur

Systèmes de coordonnées

Résultat (Rappel – Théorème de Pythagore)

Dans le plan, la longueur du segment de $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ à $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ est donnée par $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

Définition

En général, on appelle *norme d'un vecteur* $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ la quantité:

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Exemple

La norme du vecteur $(4, 2, 4)$ est $\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$.

Remarque

Si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont deux points de $\mathbb{R}^n$, la norme du vecteur $\overrightarrow{ab}$ mesure la distance entre $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$.

Résultat

La norme $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :

- ▶ $\|\vec{a}\| = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$;
- ▶ $\|\lambda \vec{a}\| = |\lambda| \|\vec{a}\|$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$;
- ▶ $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (inégalité triangulaire).

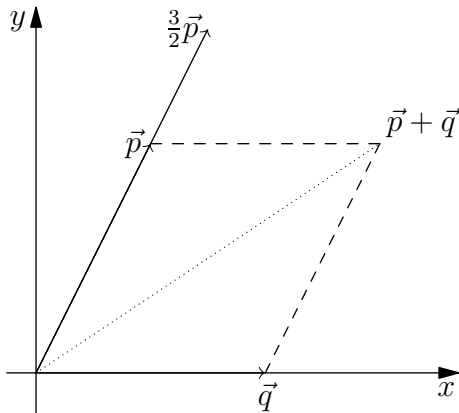
La preuve est omise et on renvoie au syllabus.

Illustration de l'inégalité triangulaire

L'inégalité triangulaire dit que, pour deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a

$$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|.$$

Ca se voit géométriquement:



Contenu de la section

Géométrie analytique

Points et vecteurs

Opérations de base

Norme d'un vecteur

Systèmes de coordonnées

On connaît le système de coordonnées cartésiennes du plan, c'est la fonction

$$\begin{cases} \text{plan} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{p} \mapsto (x(\mathbf{p}), y(\mathbf{p})) \end{cases}$$

qui à tout point associe son abscisse et sa coordonnée.

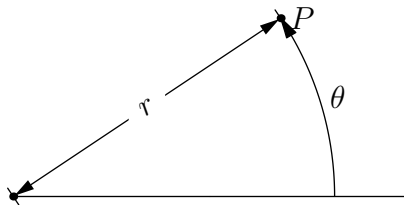
D'autres systèmes de coordonnées existent. Toute fonction qui permet de représenter **de manière unique** des points du plan par un couple de nombres réels peut servir de système de coordonnées. Même chose pour $\mathbb{R}^3$ avec trois (triplet) nombres réels.

Nous allons décrire en détail un autre système de coordonnées dans le plan, appelées **coordonnées polaires**.

Coordonnées polaires.

Pour définir des *coordonnées polaires* du plan, on choisit

- ▶ une origine o (un point) et
- ▶ une demi-droite issue de ce point.



Un point P est alors repéré dans le plan par deux coordonnées, souvent notées (r, θ) , où

- ▶ r correspond à la distance entre o et P , et
- ▶ θ correspond à l'angle orienté entre la demi-droite choisie et la demi-droite issue de o passant par P .

On choisit généralement $\theta \in [0; 2\pi[$.

Si P possède des coordonnées cartésiennes (x, y) et des coordonnées polaires (r, θ) , elles sont reliées par les relations :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta), \\ y = r \sin(\theta). \end{cases}$$

Remarque

Il n'est pas possible d'écrire aisément θ en terme de x et y , par contre par le théorème de Pythagore on obtient $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, ce qui permet d'écrire

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

Contenu de la section

équations dans le plan

Contenu de la section

équations dans le plan

Droites

équations de cercles

équations d'objets

Rappel: chaque point du plan a deux coordonnées cartésiennes. On va voir qu'on peut dessiner des ensembles de points dans le plan dont les coordonnées vérifient une équation de deux variables.

équation d'une droite

Dans $\mathbb{R}^2$, toute droite admet une équation de la forme

$$ax + by + c = 0$$

c'est-à-dire que les points (x, y) vérifiant l'équation ci-dessus sont exactement les points de la droite. Les constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ permettent de décrire la droite (position, direction).

Ceci est **une** équation à **deux** inconnues, elle admet donc en général un nombre infini de solutions! Voici pourquoi l'ensemble des solutions est une droite et pas simplement un point.

Justification

Soit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ (un point) et $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ (un vecteur). La droite de $\mathbb{R}^2$ passant par $\mathbf{p}$ et dirigée selon la direction $\vec{v}$ est l'ensemble des points $\mathbf{x}$ de la forme

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\vec{v} \quad t \in \mathbb{R}.$$

C'est ce qu'on appelle les équations paramétriques de la droite.

On écrit $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Sur chaque coordonnée on obtient donc:

$$x = p_1 + tv_1 \quad \text{et} \quad y = p_2 + tv_2.$$

donc

$$x - p_1 = tv_1 \quad \text{et} \quad y - p_2 = tv_2.$$

On a alors

$$(x - p_1)v_2 = tv_1v_2 = (y - p_2)v_1$$

c'est-à-dire, en changeant de notations

$$ax + by + c = 0$$

(on a posé: $a = v_2$, $b = -v_1$ et $c = p_2v_1 - p_1v_2$).

Remarquons que la droite d'équation $ax + by + c = 0$

- ▶ est verticale si $b = 0, a \neq 0$: son équation est alors $x = -\frac{c}{a}$.
- ▶ est horizontale si $a = 0, b \neq 0$: son équation est alors $y = -\frac{c}{b}$.
- ▶ passe par l'origine si $c = 0$. Car si $c = 0$, $(0,0)$ vérifie toujours l'équation.
- ▶ est identique à la droite d'équation $kax + kby + kc = 0$ pour n'importe quelle constante $k \neq 0$.

Lorsque $b \neq 0$ (droite non-verticale), on peut ré-écrire l'équation en isolant y :

$$y = mx + p$$

Contenu de la section

équations dans le plan

Droites

équations de cercles

équations de cercles

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et $r > 0$.

Le cercle de centre (a, b) et de rayon R est l'ensemble des points à distance R du point (a, b) . Il a donc pour équation :

$$\|(x, y) - (a, b)\| = R$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R$$

ou encore

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Exemple

L'équation:

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y + 9 = 0$$

représente un cercle de centre $(3, 1)$ et de rayon 1.

Pour voir ça, on réécrit:

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y + 9 = 0 \iff (x - 3)^2 - 9 + (y - 1)^2 - 1 + 9 = 0$$

qui est équivalente à :

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

équation d'un cercle en coordonnées polaires

Le choix d'un autre système de coordonnées peut parfois considérablement simplifier les équations des objets étudiés.

Exemple

On considère l'équation d'un cercle de centre 0 et de rayon R .

- ▶ En coordonnées cartésiennes: $x^2 + y^2 = R^2$
- ▶ En coordonnées polaires: $r = R$