

MATHF117 – Mathématiques I

Anna Vanden Wyngaerd

2025–2026

Préface

Ceci sont les notes de cours pour *MathF117 : Mathématiques I*, comme il est donné dans la première année du Bachelier en Sciences Informatiques à l'Université libre de Bruxelles pendant l'année académique 2025-2026.

Ce cours passe *très rapidement* en revue toutes les notions de mathématiques, en principe vues en secondaire, nécessaire pour entamer un cursus d'informatique à l'université. C'est un cours de remise à niveau. Il n'y aura donc peut-être pas beaucoup de nouveautés, mais la difficulté du cours est d'une part dans la *quantité* de matière que nous allons traiter sur six semaines, et d'autre part que nous la traiterons avec une *exigence universitaire*.

Vous verrez que ces notes sont structurées en utilisant des blocs de **Définition**, **Proposition**, **Exemple**, **Théorème**, **Preuve**, **Exercice**, etc. La fin de tous ces blocs est indiqué par un **└**. Je tire votre attention sur deux types de blocs spéciaux :

! Attention Ces blocs de texte contiennent une mise-en-garde. Une confusion possible. Un exemple d'une faute fréquemment commise. Un conseil d'étude. **!**
Le saviez-vous? Ces blocs de texte contiennent un peu de culture générale ou des explications plus poussées. Ils ne sont *pas* à connaître pour l'examen. **└**

Les dernières pages de ce document forment l'*index*, qui permet de retrouver des concepts du cours dans un syllabus imprimé. C'est le **Ctrl+f** de l'époque.

Ces notes sont librement et partiellement basés sur les anciennes notes de cours rédigées par Nicholas Richard et Jean-Paul Doignon, ainsi que des diapositives de cours rédigés par Julie De Saedeleer.

Il reste sans doute pas mal d'erreurs, imprécisions, fautes de frappes, etc dans ces pages. Pour toute correction ou question, écrivez-moi via [mail](mailto:anna.vanden.wyngaerd@ulb.be).¹

1. anna.vanden.wyngaerd@ulb.be.

Table des matières

1	Notions de base	1
1.1	Une classification des nombres	1
1.2	Les ensembles	5
1.3	Relations entre les nombres	9
1.3.1	Inégalités et notion d'ordre	10
1.3.2	Intervalles	12
1.3.3	Pourcentages	13
1.3.4	Principe de proportionnalité – Règle de trois	13
1.4	Manipulation et opération sur les nombres	14
1.4.1	Sommes	14
1.4.2	Moyenne arithmétique	18
1.4.3	Valeur absolue	19
1.4.4	Puissances	20
1.4.5	Racines	23
1.4.6	Logarithmes	25
1.4.7	Écriture scientifique	28
1.5	Équations, inéquations et systèmes	28
1.5.1	Systèmes d'équations	29
1.6	Polynômes	30
1.7	Notions de géométrie	33
1.7.1	Longueurs, aires et volumes	33
1.7.2	Repère orthonormé du plan	35
1.7.3	Théorèmes de Pythagore et Thalès	35

2	Trigonométrie	38
2.1	La notion d'angle	38
2.1.1	Le radian	40
2.1.2	Angles orientés et cercle trigonométrique	41
2.2	Définitions des fonctions trigonométriques	42
2.2.1	Propriétés de base	45
2.3	Retrouver un angle en partant du sinus	46
2.4	Angles associés	48
2.5	Fonctions trigonométriques dans les triangles	51
2.5.1	Triangles rectangles	51
2.5.2	Triangles quelconques	52
2.6	Formules de sommes d'angles	55
2.7	D'autres identités remarquables : formulaire	56
3	Géométrie analytique	58
3.1	Repères orthonormés et points	58
3.2	Vecteurs	61
3.2.1	Vecteurs libres et liés	61
3.2.2	Normes et distances	64
3.3	Opérations de base	65
3.3.1	Centre de gravité	69
3.4	Autres systèmes de coordonnées	69
3.4.1	Coordonnées polaires de $\mathbb{R}^2$	70
3.4.2	Coordonnées cylindriques de $\mathbb{R}^3$	71
3.4.3	Coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$	73
3.5	Produit scalaire	74
3.6	Produit vectoriel	79
3.6.1	Trièdres orientés	80
3.7	Équations	81
3.7.1	Droites dans le plan	82
3.7.2	Plans dans l'espace	85
3.7.3	Droites dans l'espace	88
3.7.4	Équations de cercles	89

3.7.5	Cylindres	89
3.7.6	Sphères	90
3.8	Interprétations géométriques	90
3.8.1	Aires et volumes	90
3.8.2	Angles	91
3.8.3	Distances	91
4	Fonctions	94
4.1	Graphes de fonctions	98
4.2	Opérations sur les fonctions	101
4.3	Quelques classes de fonctions	102
4.3.1	Fonctions polynomiales	102
4.3.2	Fonctions rationnelles	104
4.3.3	Fonctions exponentielles	104
4.3.4	Fonctions trigonométriques	106
4.4	Propriétés de fonctions	108
4.4.1	Croissance et décroissance	108
4.4.2	Parité	109
4.4.3	Périodicité	110
4.4.4	Injectivité, surjectivité et bijectivité	111
4.5	Fonctions réciproques	114
4.5.1	Fonctions racines	117
4.5.2	Fonctions logarithmiques	117
4.5.3	Fonctions trigonométriques réciproques	118
5	Dérivées	121
5.1	Une définition naïve de la dérivée	121
5.2	Dérivées de quelques classes de fonctions	126
5.3	Dérivées et opérations	127
5.3.1	Somme, produit, quotient	127
5.3.2	Composition	131
5.3.3	Fonction réciproque	132
5.4	Quelques calculs	134

5.5	Tableau récapitulatif	135
5.6	Dérivées et comportements de fonctions	136
5.6.1	Croissance	136
5.6.2	Extrema	136
5.6.3	Concavité	138
6	Primitives	139
6.1	Intégration immédiate	142
6.1.1	Sinus et cosinus hyperboliques	143
6.2	Intégration et opérations	145
6.3	Intégration par changement de variable	146
6.4	Intégration par parties	150
6.5	Décomposition en fractions simples	152
6.5.1	Fraction simple	152
7	Nombres complexes	160
7.1	Motivations	160
7.2	Définitions	162
7.3	Opérations	162
7.3.1	Somme	163
7.3.2	Produit	164
7.3.3	Conjugaison	165
7.3.4	Module	167
7.3.5	Inverse	168
7.3.6	Exponentiation	169
7.3.7	Argument	169
7.4	Forme polaire ou trigonométrique	170
7.4.1	Fonctions trigonométriques	173
7.4.2	Exponentielle complexe	173
7.5	Racine n^{e} d'un complexe	174
7.5.1	Racines de l'unité	175
7.6	Interprétations géométriques	175
7.7	Équations	178

7.7.1	Premier degré	178
7.7.2	Second degré	179
7.7.3	Degrés supérieurs	179
A	Liste de notations et symboles	180
B	Figures supplémentaires	181

CHAPITRE 1

Notions de base

Ce premier chapitre vous introduit aux concepts fondamentaux des mathématiques, qui constituent le socle nécessaire pour aborder des sujets plus avancés. Nous commencerons par explorer les différents types de nombres et leurs relations, en étudiant notamment les inégalités, les intervalles et les pourcentages. Ensuite, nous verrons comment manipuler ces nombres à travers diverses opérations : sommes, puissances, racines, logarithmes, etc. Enfin, nous aborderons les équations, inéquations et systèmes, avant de conclure par quelques notions essentielles de géométrie.

1.1 Une classification des nombres

La notion de nombre est apprise dès la petite enfance et pourtant n'est jamais vraiment bien définie. En effet, définir les nombres de façon mathématiquement rigoureuse est une tâche bien plus complexe qu'il n'y paraît. Pour cette raison, nous ne proposerons pas ici de définition formelle. Nous nous contenterons plutôt de rappeler les conceptions intuitives des nombres et les méthodes pour les manipuler.

Définition 1.1 (Nombres naturels). L'ensemble des **nombres naturels**, noté $\mathbb{N}$ et souvent appelé simplement l'ensemble des naturels, est l'ensemble de nombres qui permettent de compter : $0, 1, 2, 3, \dots$ ┘

Il contient des nombres tels que 0, 1, 5, 42, 6 841 241 237 et tant d'autres. Le nombre 0 est donc un nombre entier naturel. La notation $\mathbb{N}_0$ désigne l'ensemble

des naturels *sauf* ce 0.

Remarque 1.2. Notons que les entiers (comme les mathématiques en général) sont une *simplification* de la réalité : on compte, mais on ne dit pas ce qu'on compte. Cela a l'avantage de pouvoir faire des raisonnements généraux du type “ $2 + 3 = 5$ ”, qu'il s'agisse de pommes, de demi-pommes, de bombes à neutron ou de bières spéciales. En transposant les résultats mathématiques au monde réel, il faut veiller à bien préciser ce qui est compté. ┘

Remarque 1.3. L'ensemble des entiers naturels est “infini” mais ne contient aucun nombre appelé “l'infini”. Cela signifie seulement qu'on ne peut pas arriver au bout de tous les nombres entiers, car il y a toujours un nombre entier “suivant” dans la liste. Nous reviendrons régulièrement sur cette notion “d'infini”. ┘

Définition 1.4 (Nombres entiers). L'ensemble des **nombres entiers**, noté $\mathbb{Z}$ et souvent simplement appelé l'ensemble des entiers, contient les entiers naturels et leur opposé : $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$ ┘

Quand on compte “il y a une demi-pomme”, on compte *une* (le nombre entier 1) demi-pomme. La notion de **moitié** est plus abstraite que le simple comptage et demande d'introduire les nombres rationnels. Le nombre rationnel $\frac{1}{2}$ est un nombre caractérisé par le fait que son double vaut 1, ce qui n'existe pas si on se contente des nombres entiers.

Définition 1.5 (Nombres rationnels). Les **nombres rationnels** sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a un entier et b un entier non-nul. Deux nombres rationnels $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont considérés comme étant *égaux* si $ad = bc$. L'ensemble des nombres rationnels est dénoté par $\mathbb{Q}$. ┘

Pour rappel, les fractions s'additionnent, se multiplient et se divisent comme suit :

Somme	$\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{ay}{by} + \frac{xb}{by} = \frac{ay + xb}{by}$
Produit	$\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{ax}{by}$
Quotient	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x} = \frac{ay}{bx}$

! Attention (Position et taille de la barre de fraction) Pour le quotient, notez la taille de la barre de fraction et la position verticale par rapport au reste de la ligne (en particulier le signe d'égalité). Voici un exemple où la taille de la barre de fraction et sa position relative ont leur importance.

$$\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{1}} = \frac{1}{6} \qquad \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

!

Remarque 1.6. Notons encore une fois la simplification du problème physique : en mathématiques, deux demis font un, alors qu'en pratique deux demi-pommes ne font pas une pomme. Si vous n'êtes pas convaincu, prenez dix mille dix-millièmes de pomme et tentez de la croquer. ┘

Dans la définition d'un nombre rationnel, on voit que l'écriture d'un tel nombre sous forme de quotient de deux entiers n'est pas unique.

Exemple 1.7. Par exemple $\frac{2}{4}$ et $\frac{1}{2}$ représentent le même nombre rationnel : ils sont égaux. En effet, on a $2 \times 2 = 4$. En d'autres termes, on peut écrire $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. ┘

Il existe une autre écriture des nombres rationnels : le développement décimal. Par exemple, on écrira $\frac{1}{2} = 0,5$. Si ce concept ne vous est pas familier, parlez-en à vos enseignants.

Le développement décimal de x est y :

x	y
1	1
$\frac{1}{2}$	0,5
$\frac{1}{3}$	0,333...
$\frac{1}{11}$	0,090 909 090...
π	3,141 59...

Proposition 1.8. Un nombre rationnel admet un **développement décimal périodique**. Réciproquement, tout nombre admettant un développement périodique est rationnel. ┘

Exemple 1.9. Quelques développements décimaux :

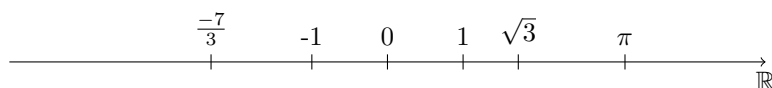


FIGURE 1.1 – La droite réelle.

- * Celui de $\frac{1}{3}$ est $0,333\dots$. C'est bien périodique, puisque 3 se répète.
- * Celui de $\frac{1}{2}$ est $0,5$. C'est également périodique, en l'écrivant sous la forme $0,50000\dots$. Le chiffre 0 se répète.
- * Pour $\frac{11}{13}$, cela donne $0,846\ 153\ 846\ 153\ 846\ 153\ 846\ 153\dots$

┘

Les nombres dont le développement décimal n'est pas périodique, ne sont pas rationnels (ce sont des nombres **irrationnels**). Pour les inclure il nous faut un ensemble de nombres plus “général”.

Définition 1.10 (Nombres réels). L'ensemble des **nombres réels** est l'ensemble de “tous” les nombres qui permettent un développement décimal. Il est dénoté par $\mathbb{R}$.

┘

Cet ensemble contient non-seulement les entiers et rationnels, mais également des nombres tels que $4 - \sqrt{2}$ ou $\pi^2 + \frac{2}{3}$. On représente souvent l'ensemble des nombres réels par une droite “sans trou”, voir Figure 1.1.

Exemple 1.11. Le développement décimal de π n'est pas fini (il ne se termine jamais) et n'est pas non plus périodique, mais les premières décimales sont

$$\pi = 3,1415926535897932384626433832795028841971693993751\dots$$

┘

Remarque 1.12 (La précision et l'illusion de la précision). En pratique, un moyen sûr de tomber sur des nombres est de faire des mesures. La température, la hauteur, la longueur, le nombre d'amis, la vitesse, le nombre de désintégrations par seconde, la fréquence cardiaque : tout cela se mesure et donne lieu à des nombres.

Le nombre d'amis que vous avez sur le premier réseau social venu est un nombre entier, déterminé sans équivoque : qu'il soit égal à 4 ou à 578, il peut être mesuré univoquement et précisément à un moment donné.

La température de la pièce, par contre, est sujette à l'imprécision : fait-il 20°C , 20.5°C ou en fait 20.42°C ? Tout dépend de l'appareil que vous utilisez pour mesurer. La mesure peut être erronée pour diverses raisons, que ce soit une imprécision à la lecture (graduations trop grossières), ou une erreur due à un appareil mal calibré.

D'autre part, à partir de certaines mesures, on peut calculer certaines valeurs. Par exemple on peut calculer qu'en roulant à vélo à 20 km/h pendant 10 minutes, la distance parcourue est de $3,333\dots\text{km}$. La présence des décimales laisse croire à une précision importante dans le calcul, alors qu'en réalité la vitesse utilisée (20 à l'heure) était probablement une approximation grossière.

Retenons donc que le "nombre" en mathématiques est un objet très précis, alors que la mesure physique est généralement très floue. Il est par exemple tout à fait sans objet de se demander si la vitesse d'un cycliste est un nombre rationnel. ┘

1.2 Les ensembles

Les ensembles de nombres sont des exemples d'un concept mathématique qui s'appelle un **ensemble**. Comme pour les nombres, ce n'est pas l'ambition de ce texte de fournir un traitement rigoureux de la théorie des ensembles, l'approche suivie est plutôt naïve et intuitive.

Définition 1.13. Un **ensemble** contient des objets, qu'on appelle **éléments**. Si X est un ensemble et x est un élément de X , nous écrivons

$$x \in X$$

et nous disons

$$x \text{ est un élément de } X.$$

Nous disons aussi que l'élément x **appartient** à l'ensemble X , ou que l'ensemble X **comprend** l'élément x . Si y n'est pas un élément de X , on note

$$y \notin X.$$

┘

Notation 1.14. Pour indiquer un ensemble on entoure souvent ses éléments, ou la description de ses éléments par $\{$ et $\}$ ┘

Exemple 1.15. Voici quelques exemples d'ensembles, dont on en a déjà rencontrés certains.

* $\mathbb{N}$	* $\mathbb{R}$	* $\{-1, 2, 3\}$
* $\mathbb{Z}$	* $\{0, 1\}$	* $\{\text{bleu, rouge}\}$.

Définition 1.16. Il existe un unique ensemble qui ne contient aucun élément. Cette ensemble est appelé **l'ensemble vide** et il est noté $\emptyset$. ┘

Définition 1.17. Si X contient un nombre fini d'éléments, nous disons que X est un **ensemble fini** et nous pouvons donner une liste complète de ces éléments. ┘

Exemple 1.18. L'ensemble $\{0, 1\}$ est fini, mais $\mathbb{N}$ n'est pas un ensemble fini. En effet, il n'est pas possible de lister tous les nombres naturels. ┘

Définition 1.19. Pour un ensemble fini X , le nombre d'éléments est aussi appelé la **cardinalité** de X . On note $|X|$ ou $\#X$. ┘

Exemple 1.20. Si $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ alors $\#X = 6$. ┘

Le saviez-vous? Nous parlons aussi de la **cardinalité** des ensembles infinis. Les ensembles infinis n'ont pas tous la même cardinalité. Par exemple, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ont la même cardinalité, c'est-à-dire, ils ont la même "taille". La cardinalité de $\mathbb{R}$ est plus grande. Pour définir la cardinalité de manière formelle, il faut d'abord introduire les bijections. ┘

Souvent, il est plus utile de donner une description des éléments, plutôt qu'une liste complète. Nous pouvons écrire par exemple ¹ :

$$V := \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est pair}\}.$$

Ce que nous pouvons lire comme :

V est l'ensemble de tous les éléments x dans l'ensemble des nombres naturels tels que x est un nombre pair.

1. Le symbole $:=$ indique une "égalité, par définition", de sorte que le membre de gauche est défini comme étant égal au membre de droite.

Parfois un ensemble contient trop d'éléments pour les lister tous. Alors, on utilise le symbole “...” pour indiquer qu'il manque des éléments. Par exemple :

$$W := \{0, 1, 2, \dots, 99, 100\}$$

Quand on utilise cette notation, on suppose que la progression des éléments manquants est claire. On peut donc dénoter l'ensemble des nombres pairs entre 0 et 100 par

$$\{0, 2, 4, 6, \dots, 100\}.$$

Nous pouvons aussi utiliser cette notation pour indiquer qu'il y a un nombre infini d'éléments, comme dans :

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$$

Vu que, pour les ensembles infinis, il n'est plus possible d'en donner une liste complète de leurs éléments, les descriptions d'éléments deviennent plus importantes. Par exemple, pour l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, nous pouvons écrire

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ est positif ou nul}\}.$$

Définition 1.21. Soient X et Y des ensembles. Nous disons que Y est un **sous-ensemble** de X si et seulement si tout élément de Y est aussi un élément de X . On note

$$Y \subset X, \quad \text{ou} \quad Y \subseteq X.$$

Si on veut exprimer qu'un sous-ensemble Y de X est différent de X (c'est-à-dire il existe au moins un élément $x \in X$ tel que $x \notin Y$), on écrit

$$Y \subsetneq X$$

Nous appelons un tel sous-ensemble **strict** ou **propre**. Si X n'est pas un sous-ensemble de Y , on note

$$X \not\subset Y.$$

┘

! Attention Il ne faut pas confondre les symboles “ $\in$ ” et “ $\subset$ ” ! Le premier donne une relation entre des éléments et des ensembles, le deuxième est une relation entre

ensembles!

!

Exemple 1.22.

- * $2 \in \{2, 3\}$
- * $\{2\} \notin \{2, 3\}$
- * $\{2\} \subset \{2, 3\}$.
- * $\emptyset \subseteq S$ pour tout ensemble S .

┘

En partant d'ensembles connus on peut en construire des nouveaux.

Définition 1.23. La **différence** entre des ensembles X et Y est donnée par²

$$X \setminus Y := \{x \in X \mid x \notin Y\}$$

┘

Définition 1.24. La **réunion**, ou simplement l'**union**, de X et Y est donnée par

$$X \cup Y := \{z \mid z \in X \text{ ou } z \in Y\}$$

┘

Définition 1.25. L'**intersection** de X et Y est donnée par

$$X \cap Y := \{z \mid z \in X \text{ et } z \in Y\}$$

┘

Définition 1.26. Le **produit (cartésien)** de X et Y est l'ensemble de tous les couples d'un élément de X et un élément de Y . C'est-à-dire, c'est l'ensemble donné par

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \text{ et } y \in Y\}.$$

Nous pouvons considérer un particulier le produit d'un ensemble avec lui-même :

$$X^2 := X \times X = \{(x, x') \mid x \in X \text{ et } x' \in X\}.$$

2. Le symbole $:=$ indique une "égalité, par définition", de sorte que le membre de gauche est défini comme étant égal au membre de droite.

Plus généralement, nous pouvons considérer le produit cartésien de n ensembles $X_1, \dots, X_n$:

$$X_1 \times \dots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i, \forall i = 1, \dots, n\}$$

et en particulier

$$X^n = \underbrace{X \times \dots \times X}_{n \text{ copies}} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X, \forall i = 1, \dots, n\}$$

┘

Exemple 1.27. Prenons $X = \{0, 1\}$ et $Y = \{1, 2, 3\}$. Alors

- * $X \setminus Y = \{0\}$ et $Y \setminus X = \{2, 3\}$
- * $X \cup Y = \{0, 1, 2, 3\}$
- * $X \cap Y = \{1\}$
- * $X \times Y = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$.

┘

Remarque 1.28. Pour obtenir le produit cartésien de l'exemple précédent, on peut exécuter le code python ci-dessous.

```

1 X = [0, 1]
2 Y = [1, 2, 3]
3 out = []
4 for x in X:
5     for y in Y:
6         out.append((x, y))
7 print(out)
```

┘

Exemple 1.29. On a $\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Cet ensemble est souvent identifié au plan, voir Section 1.7.2

┘

1.3 Relations entre les nombres

1.3.1 Inégalités et notion d'ordre

Les nombres peuvent être comparés.

Définition 1.30. On dit que

- * “ a est **strictement inférieur** à b ”, noté $a < b$, si a est plus petit et différent de b ;
- * “ a est **strictement supérieur** à b ”, noté $a > b$, si a est plus grand et différent de b ;
- * “ a est **inférieur** à b ” (ou “inférieur ou égal”), noté $a \leq b$, si a est plus petit ou égal à b ;
- * “ a est **supérieur** à b ” (ou “supérieur ou égal”), noté $a \geq b$, si a est plus grand ou égal à b .

┘

Exemple 1.31. Les affirmations suivantes sont vraies :

- | | |
|---------------------|---------------------------|
| * $2 \leq 3$ | * $2 \leq 2$ |
| * $\frac{1}{2} < 3$ | * $2 \geq 2$ |
| * $-2 \leq 1$ | * $5 > 3$ |
| * $-2 \leq -1$ | * $\sqrt{2} < \sqrt{3}$, |

mais celles-ci sont fausses :

- | | |
|----------------|-------------|
| * $2 \geq 3$ | * $2 < 2$ |
| * $-2 \geq 1$ | * $2 > 2$ |
| * $-2 \geq -1$ | * $\pi < 3$ |

┘

Remarque 1.32. L'inégalité $2 \leq 2$ peut perturber, mais c'est l'usage en mathématique : $\leq$ signifie “plus petit ou égal”, donc en particulier puisque $2 = 2$, on a forcément $2 \leq 2$.

┘

Nous supposons les deux résultats suivants connus.

Proposition 1.33. Pour tous réels a, b, c , nous avons :

- * Si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$ (propriété d'antisymétrie)
- * Si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$ (propriété de transitivité).

┘

Proposition 1.34. Soient a, b des nombres réels tels que $a \leq b$. Alors pour tout réel c nous avons

$$a + c \leq b + c.$$

De plus, si $c \geq 0$, on a

$$ac \leq bc.$$

Si $c < 0$ alors

$$ac \geq bc.$$

┘

Nous pouvons alors prouver ceci :

Proposition 1.35. Soient a, b, c, d des réels vérifiant $a \leq b$ et $c \leq d$. Alors

$$a + c \leq b + d.$$

De plus, si $0 \leq a$ et $0 \leq c$, alors

$$ac \leq bd.$$

┘

Preuve. Comme $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$ (résultat précédent). De même, comme $c \leq d$, nous avons $b + c \leq b + d$. Par transitivité, nous obtenons $a + c \leq b + d$ comme annoncé.

La preuve pour le produit (avec la condition supplémentaire) est laissée en exercice. □

Exercice. Faire la preuve de la seconde partie du résultat 1.35. Que se passe-t-il si $a < 0$ ou $c < 0$? ┘

Exercice. Trouver des réels a, b, c, d tels que $a \leq b$, $c \leq d$ et $ac > bd$. ┘

1.3.2 Intervalles

Définition 1.36. Un **intervalle** est un ensemble de nombres réels “sans trou” (on parle d’ensemble **connexe**). ┘

Exemple 1.37. * Si on définit $[-2, \pi]$ comme l’ensemble des réels compris entre -2 et π , c’est un intervalle : il n’y a aucun trou entre ces deux nombres.

* L’ensemble des réels positifs (ou nuls), noté $\mathbb{R}^+$, est également un intervalle.

* L’ensemble des réels sauf 0, noté $\mathbb{R}_0$, n’est pas un intervalle, car 0 manque : il y a un trou. ┘

On peut classer les intervalles comme suit.

Définition 1.38. Si a et b sont des nombres réels, on définit ces notations pour les ensembles suivants :

- | | |
|---|---|
| * $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\};$ | * $] -\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\};$ |
| * $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\};$ | * $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\};$ |
| * $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\};$ | * $]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\};$ |
| * $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\};$ | * $] -\infty, \infty[= \mathbb{R}$ |
| * $] -\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\};$ | |

Dans les notations ci-dessus, a et $-\infty$ sont la **borne inférieure** des intervalles dans lesquels ils apparaissent, tandis que b et ∞ sont la **borne supérieure** des intervalles dans lesquels ils apparaissent. ┘

Notation 1.39. Nous utiliserons les notations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R}^+ = [0, \infty[& \mathbb{R}^- =]\infty, 0] \\ \mathbb{R}_0^+ =]0, \infty[& \mathbb{R}_0^- =]\infty, 0[\end{array}$$

Un intervalle est généralement “infini” car il contient une infinité de nombres. Cependant, les quatre premières notations définissent des intervalles **bornés** (c’est-à-dire que les deux bornes sont des nombres réels), tandis que les cinq suivantes forment des intervalles non bornés (l’une des deux bornes au moins est infinie). ┘

Exemple 1.40. * L'intervalle $[0, 1]$ contient une infinité de nombres, puisqu'il contient notamment $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \text{ etc.}$ Mais il est également borné, car aucun des nombres n'est inférieur à 0 ou supérieur à 1 (de par la définition de cet intervalle!).

* L'intervalle $[4, 4]$ contient un seul nombre : le nombre 4.

* L'intervalle $]4, 4[$ ne contient aucun nombre, car aucun nombre n'est à la fois strictement supérieur et strictement inférieur à 4.

┘

1.3.3 Pourcentages

Un pourcentage est une façon commode de quantifier le rapport entre deux quantités.

Exemple 1.41. “50% des humains sont des femmes.” Ceci signifie que dans la population, la moitié sont des femmes. En effet, $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

┘

Le “pourcent” décrit une proportion “pour cent unités”. En d’autres termes, on décrit un nombre qui doit être divisé par cent.

Exemple 1.42. “Le taux de réussite des étudiants de bachelier de l’année passée était d’un tiers.” En d’autres termes, un étudiant sur trois avait réussi. Ceci est approximativement 33% car

$$\frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{3}100}{100} = \frac{33,333\dots}{100} = 33,333\dots\%$$

┘

Le pourcentage est une information globale, et non individuelle.

Exemple 1.43. Un taux de 33% ne veut pas dire qu’en prenant trois étudiants au hasard, un seul réussira.

┘

Le pourcentage n’est pas de la voyance.

Exemple 1.44. Le taux de réussite peut très bien être différent cette année!

┘

1.3.4 Principe de proportionnalité – Règle de trois

La règle de trois est un principe qui s’applique dans un grand nombre de situations de la vie courante.

Exemple 1.45. Pour faire un quatre gâteaux pour quatre personnes, il faut 200 grammes de beurre³. Combien de beurre faut-il pour cinq personnes ?

- * Pour 4 personnes, il faut 200 grammes.
- * Pour 1 personne, il faut donc $\frac{200}{4}$ grammes, soit 50 grammes.
- * Pour 5 personnes, il faut dès lors 5×50 grammes, soit 250 grammes.

┘

Le principe est le suivant : ce qui compte n'est pas la quantité proprement dite, mais la proportion par rapport aux autres quantités.

Exemple 1.46 (Gâteau, continué). On passe de 4 à 5 personnes, c'est-à-dire on multiplie par $\frac{5}{4}$. Dès lors toutes les quantités doivent augmenter de la même manière, y compris le beurre. On multiplie donc la quantité de beurre par $\frac{5}{4}$, cela fait bien 250 grammes.

┘

On peut également considérer les choses en terme d'augmentation par rapport à la quantité de départ.

Exemple 1.47 (Gâteau, continué). On passe de 4 à 5 personnes, c'est-à-dire une augmentation de $\frac{5-4}{4} = 25\%$. Dès lors toutes les quantités doivent augmenter de la même proportion. Y compris le beurre. Or 25% de 200 grammes, c'est 50 grammes. Il faut donc rajouter 50 grammes.

┘

Attention cependant que toutes les grandeurs ne jouent pas forcément à ce jeu-là. Par exemple les températures :

Exemple 1.48. Un gâteau pour quatre personnes se cuit au four à 180 °C. Un gâteau pour huit personnes ne se cuit **pas** à 360 °C!

┘

1.4 Manipulation et opération sur les nombres

1.4.1 Sommes

Considérons les calculs suivants :

$$1 + 2 = 3, 1 + 2 + 3 = 6, 1 + 2 + 3 + 4 = 10, \dots$$

3. Les données sont inventées. L'auteur décline toute responsabilité en cas d'incompatibilité entre l'attente et les résultats de ceux qui puiseraient une recette dans le présent syllabus.

Comment exprimer un calcul pour sommer les cent nombres de 1 jusqu'à 100 ? Où jusqu'à une valeur n quelconque ? Une solution classique est d'inventer une notation !

Définition 1.49 (Symbole de sommation). Si m et n sont des entiers, $m \leq n$, et si $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ sont des nombres, on définit :

$$\sum_{k=m}^n a_k := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

┘

Exemple 1.50. La notion est très simple, mais requiert quelques exemples. Il s'agit juste de donner une autre manière d'écrire les sommes.

$$* \sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$$

$$* \sum_{k=1}^{100} k^2 = 1 + 4 + 9 + \dots + 10000$$

$$* \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}$$

$$* \sum_{k=1}^{100} 3 = 3 + 3 + 3 + \dots + 3 (= 300)$$

$$* \sum_{k=5}^{10} (k-1) = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

$$* \sum_{k=5}^5 (k-1) = 4$$

$$* \frac{1}{100} \sum_{k=1}^{100} k = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 100}{100}$$

$$* \sum_{k=1}^{100} \frac{k}{100} = \frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \dots + \frac{100}{100}$$

$$* (n+1) + \sum_{k=1}^n k = (n+1) + (1+2+3+\dots+n) = 1+2+3+\dots+n+(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k$$

┘

Remarque 1.51. Cette notation rappelle une boucle `for`. Si on veut calculer par exemple $\sum_{i=1}^{100} i^2$, on pourrait écrire le code suivant en python.

```
1 out = 0
2 for i in range(1,101):
3     out += i*i
4 print(out)
```

Ce programme imprimera alors $\sum_{i=1}^{100} i^2 = 338350$. ┘

Proposition 1.52. Le symbole somme vérifie les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^n (a_k + b_k) &= \left(\sum_{k=m}^n a_k \right) + \left(\sum_{k=m}^n b_k \right) \\ \sum_{k=m}^n \lambda a_k &= \lambda \sum_{k=m}^n a_k \\ \sum_{k=m}^n a_k &= \sum_{k=m}^n a_{n+m-k}\end{aligned}$$

Preuve. Les preuves sont très simples. Donnons celle du dernier de ces résultats, puisqu'il peut surprendre au premier abord. Par définition, le membre de gauche est

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

et le membre de droite est

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^n a_{n+m-k} &= a_{n+m-(m)} + a_{n+m-(m+1)} + \cdots + a_{n+m-(n-1)} + a_{n+m-(n)} \\ &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_{m+1} + a_m\end{aligned}$$

Les deux sont donc égaux (l'un est simplement sommé dans un sens, l'autre l'est dans l'autre sens). On a seulement changé l'ordre dans lequel on somme les termes, mais pas les termes qui sont sommés. □

Donnons un premier résultat explicite faisant intervenir le signe somme. Il donne la solution au problème initial.

Proposition 1.53.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

┘

Remarque 1.54. Avant de passer à la preuve, notons que ce résultat n'a rien de magique. Il pourrait très bien s'écrire sans le signe somme :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

┘

Preuve. Appliquons le résultat prouvé précédemment :

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n (n+1-k)$$

et calculons

$$\begin{aligned} 2 \left(\sum_{k=1}^n k \right) &= \left(\sum_{k=1}^n k \right) + \left(\sum_{k=1}^n k \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n k \right) + \left(\sum_{k=1}^n (n+1-k) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (k + (n+1-k)) = \sum_{k=1}^n (n+1) = n(n+1) \end{aligned}$$

d'où le résultat final.

□

Remarque 1.55. Avant de passer à la suite, remarquons que cette preuve n'a rien de magique. Elle pourrait très bien s'écrire sans le signe somme. Faisons-le pour $n = 100$ afin d'illustrer :

$$\begin{aligned} &(1 + 2 + 3 + \cdots + 100) + (1 + 2 + 3 + \cdots + 100) \\ &= (1 + 2 + 3 + \cdots + 100) + (100 + 99 + \cdots + 3 + 2 + 1) \\ &= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \cdots + (100 + 1) \\ &= 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 \\ &= 100 \cdot 101 \end{aligned}$$

dès lors $1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$.⁴

┘

1.4.2 Moyenne arithmétique

Le signe somme permet de décrire de façon générale une quantité bien connue : la moyenne. La moyenne est un estimateur numérique qui sera décrit plus précisément dans un cours de statistique, mais il est intuitivement connu des étudiants qui, depuis toujours, calculent “leur moyenne” !

Exemple 1.56. Si un étudiant a suivi trois cours, et a obtenu les notes x_1 , x_2 et x_3 , alors sa moyenne (arithmétique) est $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$.

┘

Exemple 1.57. Si cinq étudiants ont suivi le cours de mathématiques et ont eu des notes e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 , alors on dira que la moyenne des notes pour ce cours est

$$\frac{e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5}{5}.$$

┘

Définition 1.58. La **moyenne arithmétique** de n nombres $x_1, \dots, x_n$ est la quantité

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}$$

┘

Proposition 1.59. La moyenne arithmétique d’une séquence de nombres est toujours plus petite que le plus grand de ces nombres, et plus grande que le plus petit de ces nombres.

┘

Preuve. Considérons la moyenne $\bar{x}$ de n nombres $x_1, \dots, x_n$. L’un de ces nombres, “le plus petit”, est inférieur ou égal à tous les autres. Il a donc un certain indice, disons j . De même, le plus grand a un certain indice disons J . C’est-à-dire qu’on a $x_j \leq x_k \leq x_J$ pour tout k entre 1 et n . Dès lors :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq x_j + x_J + \cdots + x_J = nx_J$$

4. La légende dit que cette preuve fut inventée par le grand Gauss à l’âge de 7 ans, à la grande surprise de son professeur.

(ceci est une application répétée de la Proposition 1.35) dont on tire

$$\bar{x} \leq x_J,$$

c'est-à-dire la moyenne d'une séquence de nombres est inférieure au plus grand de ces nombres.

La preuve se termine similairement avec x_j :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq x_j + x_j + \cdots + x_j = nx_j$$

d'où $\bar{x} \geq x_j$, ce qui est le résultat annoncé. □

1.4.3 Valeur absolue

Définition 1.60. Soit $x \in \mathbb{R}$. La **valeur absolue** de x , notée $|x|$, est définie par⁵ :

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

┘

Exemple 1.61. * Nous avons $|5| = 5$, car 5 est positif, donc on est dans le premier cas.

* Similairement, $|-5| = -(-5) = 5$, car -5 est négatif, donc on est dans le second cas.

* Le cas de 0 n'est pas spécial : $|0| = 0$, tout simplement (premier cas).

┘

Proposition 1.62. Pour tous x, y , nous avons

$$|x| = |-x| \qquad |x - y| = |y - x|$$

┘

Preuve. Pour la première égalité, on distingue trois cas :

* Si $x = 0$ est nul, alors $-x = 0$,

5. Le symbole $:=$ indique une "égalité, par définition", de sorte que le membre de gauche est défini comme étant égal au membre de droite.

- * Si $x > 0$, alors $-x < 0$ donc $x = -(-x)$,
- * Si $x < 0$, alors $-x > 0$ donc $-x = -x$.

Pour la seconde égalité, notons simplement que $x - y = -(y - x)$. □

Remarque 1.63. Si x et y sont des nombres réels, le nombre $|x - y|$ peut être vu comme la distance entre x et y . Le lecteur est invité à penser à cela seul avant de lire la suite de cette remarque.

Nous allons distinguer les cas et voir que ça marche dans chacun. Avant tout, remarquons que la distance entre x et y doit être la même que celle entre y et x . Or $|x - y| = |y - x|$, donc on peut supposer $x < y$ dans notre raisonnement, et il sera alors également valide pour $y < x$.

- * Si $0 < y < x$, il est assez clair qu'on voudrait que $x - y$ soit la distance entre les deux. Par exemple la distance entre 2 et 5 serait $5 - 2 = 3$. Ça tombe bien : $|x - y| = x - y$ dans ce cas.
- * Si $y < 0 < x$, on voudrait que la distance entre y et x soit égale à la distance entre y et 0 additionnée à la distance entre 0 et x . La première vaut $-y$ (car y est négatif), la seconde vaut x (car x est positif), donc $-y + x$ est la distance recherchée, ça tombe bien : c'est encore égal à $|x - y|$.
- * Si $y < x < 0$, on a envie que la distance entre x et y soit la même que la distance entre $-x$ et $-y$. Or $y < x < 0$, donc $0 < -x < -y$, ce qui permet d'appliquer le premier cas : la distance entre $-x$ et $-y$ est $|-y - (-x)|$, c'est-à-dire $|x - y|$!

┘

1.4.4 Puissances

Notation 1.64 (Produits). Généralement le produit entre deux quantités se note en juxtaposant ces quantités. Par exemple ab veut dire “ a fois b ”, et $3x$ veut dire “3 fois x ”. Lorsque ces deux quantités sont des nombres tels que 3 et 5, cette notation amènerait à confondre le produit “3 fois 5” avec le nombre 35. Lorsqu'il y a ambiguïté, nous utilisons alors la notation $3 \cdot 5$ pour désigner le produit de 3 et de 5. Nous n'utilisons généralement *pas* la notation 3×5 , pour éviter de confondre le symbole $\times$ avec la variable x . ┘

Définition 1.65 (Réels à puissances naturelles). Pour tout réel x , la notation x^b (lire : “ x **exposant** b ”, ou “ x à la b^{e} **puissance**”) a le sens suivant, lorsque b est un entier naturel :

$$x^b := \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{b \text{ fois}}.$$

Avec comme cas particulier : $x^0 = 1$. L’expression x^b est appelé une **exponentielle** et x est appelé sa **base**. ┘

Exemple 1.66. Quelques calculs d’exponentielles.

* $2^2 = 4$	* $3^3 = 27$	* $(-1)^{2025} = -1$
* $(-2)^2 = 4$	* $(-3)^3 = -27$	* $(-1)^{2026} = 1$

┘

Les puissances permettent de répondre à certaines questions de comptage.

Exemple 1.67 (Nombres de séquences binaires). Combien de séquences de 8 chiffres peut-on réaliser avec les chiffres 0 et 1 ? En première position, on a deux chiffres possibles. Pour chacun de ces deux choix, nous avons à nouveau deux choix possibles en deuxième position. Et ainsi de suite jusqu’à la huitième position, nous avons donc au total le nombre de choix possibles suivant :

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$$
┘

Les exposants apparaissent également dans de nombreuses questions de croissance.

Exemple 1.68 (Propagation d’un virus). Considérons le script suivant qui modélise la propagation d’un virus.

```

1 cas_initiaux = 1          # Premier cas infecté
2 taux_transmission = 2     # Chaque malade contamine 2 personnes
3 jours_simulation = 5      # Durée de la simulation
4 total_cas = cas_initiaux
5 print("Jour\tTotal_Cas")
6 for jour in range(1, jours_simulation + 1):
7     nouveaux_cas = total_cas * taux_transmission

```

```

8   total_cas += nouveaux_cas
9   print(f"{jour}\t{total_cas}")

```

L'output est donné par :

Jours	Total Cas
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243

On observe que le nombre de cas lors du jour n est donné par 3^n . Savez-vous le montrer ? ┘

Les propriétés suivantes sont faciles à déduire de Définition 1.65.

Proposition 1.69. Pour tous réels x, y et pour tous naturels a, b , nous avons

1. $x^a y^a = (xy)^a$
2. $x^a x^b = x^{a+b}$
3. $(x^a)^b = x^{ab}$
4. $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

Pour le dernier point, on doit supposer que $a \geq b$, sinon $a - b$ n'est pas naturel. ┘

Exemple 1.70. Sans surprise, quelques lignes de calcul faisant intervenir des puissances :

$$\begin{aligned}
 3^5 &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243 \\
 3^4 3^2 &= (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3^6 = 729 \\
 (3^2)^3 &= (3^2) \cdot (3^2) \cdot (3^2) = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3^6 \\
 \frac{2187}{81} &= \frac{3^7}{3^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27
 \end{aligned}$$

Supposons que nous voulions donner du sens à x^{-4} , il serait agréable que $x^{-4} x^4 = x^{-4+4} = x^0 = 1$, c'est-à-dire $x^{-4} = \frac{1}{x^4}$. Notons que, pour que cela fonctionne, il faut supposer $x \neq 0$.

Définition 1.71 (Réels non-nuls à puissances entières). Soient b un naturel et x un réel non nul, alors on définit

$$x^{-b} := \frac{1}{x^b}.$$

En combinant ceci avec Définition 1.65, on a défini x^b pour tout entier b . ┘

Exemple 1.72. On a

$$* \quad 1^{-3} = 1 \qquad * \quad 2^{-1} = \frac{1}{2} \qquad * \quad (-2)^{-2} = \frac{1}{4}$$

┘

De la même manière, on peut donner un sens à $x^{\frac{1}{4}}$, mais pour ce faire on a d'abord besoin de parler de racines.

1.4.5 Racines

Définition 1.73. Si t est un réel *positif ou nul*, sa **racine carrée**, notée $\sqrt{t}$, est l'unique réel *positif ou nul* dont le carré vaut t . ┘

Le saviez-vous? (L'existence des racines carrées) On pourrait se demander comment on peut être *sûr* que tout nombre réel positif possède une racine carrée dans $\mathbb{R}$. C'est loin d'être une question évidente et la réponse repose sur une propriété fondamentale de l'ensemble des nombres réels appelé la **propriété de la borne supérieure**.

Cette propriété stipule que tout sous-ensemble S de réels qui est majoré (il existe un élément plus grand ou égal à tous les éléments de S), doit posséder un majorant minimal (un majorant de S plus petit que tous les autres majorants de S) dans $\mathbb{R}$. Alors on peut définir $\sqrt{t}$ comme étant le majorant minimal de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq t\}$. ┘

Remarque 1.74. Si t est strictement positif, alors il existe exactement **deux** nombres dont le carré vaut t : $\sqrt{t}$ et $-\sqrt{t}$. Le premier est positif, le second est négatif. ┘

On peut sans problème étendre ces raisonnements à x^3 , x^4 , etc.

Définition 1.75. Si t est un réel positif ou nul, sa **racine n^e** , notée $\sqrt[n]{t}$, est l'unique réel positif ou nul dont la puissance n^e vaut t . ┘

Remarque 1.76. Lorsque n est impair, cela garde un sens de parler de racine n^e d'un nombre t négatif. Par exemple, la racine cubique de -8 est $\sqrt[3]{-8} = -2$, car $(-2)^3 = -8$. Mais ceci ne fonctionne pas pour n pair, car x^n est toujours positif si n est pair, donc il est impossible de trouver la racine n^e d'un nombre négatif dans ce cas. ┘

Revenons maintenant aux puissances. Supposons que nous voulons donner du sens à $x^{\frac{1}{4}}$. Il serait agréable que $(x^{\frac{1}{4}})^4 = x^{\frac{4}{4}} = x^1 = x$. Pour que cela fonctionne, il faut supposer $x \geq 0$, car n'importe quoi mis à une puissance quatrième sera positif!

Définition 1.77 (Réels positifs à puissances rationnelles). Soient b un entier non-nul et x un réel strictement positif. Alors on définit

$$x^{\frac{1}{b}} := \sqrt[b]{x}.$$

En combinant ceci avec Définitions 1.65 et 1.71, on a défini x^y pour tout rationnel y . ┘

Définition 1.78 (Réels à puissances réelles). En fait, on peut donner un sens raisonnable à cette notation x^b pour tout $b \in \mathbb{R}$ pour $x > 0$. Nous ne donnons pas cette définition de façon rigoureuse, mais nous pouvons l'expliquer intuitivement. En effet, imaginons que nous voulons calculer 2^π . On a

$$\pi = 3,1415926535897932384626433832795028841971693993751 \dots$$

On sait que π est un nombre irrationnel, mais on peut se rapprocher de π autant qu'on veut en utilisant que des nombres rationnels! On a

$$\frac{314}{100} = 3,14 \qquad \frac{3141}{1000} = 3,141 \qquad \frac{31415}{10000} = 3,1415$$

En calculant $2^{\frac{31415}{10000}}$ on trouve déjà une bonne approximation de 2^π . On peut alors définir 2^π comme étant la valeur réelle vers laquelle nos approximations rationnelles tend. ⁶ ┘

Il serait possible de démontrer les résultats suivants.

6. On peut rendre ceci plus précis en utilisant la notion de *limite*, qui sera traité dans MATHF114.

Proposition 1.79. Les Propriétés 1.69 restent vraies si on suppose que x est un réel strictement positif et b un réel quelconque. ┘

Proposition 1.80. Si $x, y, b \in \mathbb{R}_0^+$ avec $x < y$ alors $x^b < x^y$. ┘

1.4.6 Logarithmes

Définition 1.81. Soient x et a des réels strictement positifs. Supposons $a \neq 1$. Le **logarithme (de base a)** d'un nombre x , donne la *puissance* y à laquelle on doit élever a pour obtenir x . On dénote cette valeur par $\log_a(x)$. En d'autres mots, on a

$$\log_a(x) = y \text{ si et seulement si } a^y = x.$$

Exemple 1.82. * $\log_2(16) = 4$ * $\log_{10}(0,01) = -2$

* $\log_{10} 1000 = 3$ * $\log_3(1) = 0$

Exemple 1.83 (Propagation d'un virus, continué). Reprenons le virus modélisé dans l'Exemple 1.68. Si on constate qu'il y a 19683 malades, comment peut-on déterminer le nombre de jours écoulés depuis le premier patient? Le jour n , il y a 3^n infectés. On veut donc trouver n tel que $3^n = 19683$. Le nombre de jours écoulés est donc $\log_3(19683) = 9$. ┘

Remarque 1.84. Dans la définition du logarithme $\log_a(x)$ nous avons mis des restrictions sur les valeurs x et a . Elles sont importantes pour s'assurer que $\log_a(x)$ définit bien un nombre (unique).

1. On doit avoir $x > 0$, car si on prend par exemple $x = -2$ et $a = 2$ il n'existe pas de puissance à laquelle on peut élever a pour obtenir x , car 2^y sera toujours positif.
2. On doit avoir $a > 0$, car si on prend par exemple $a = -2$ et $x = 5$ alors la valeur $(-2)^y$ est défini seulement si y est entier. L'équation $(-2)^y = 5$ n'a alors pas de solution, car 5 n'est pas une puissance entière de -2 .

3. On doit avoir $a \neq 1$, car si $a = 1$, la puissance à laquelle on doit élever 1 pour obtenir x n'existe pas si $x \neq 1$. Et si $x = 1$, tout réel y a la propriété que $1^y = 1$. On voit donc que parler de logarithmes de base 1 n'a pas beaucoup de sens.

┘

Exemple 1.85. Dans la table suivante se trouvent les valeurs (approximatifs) pour $\log_2(x)$ pour x qui varie :

x	$\log_2(x)$
0,001	-13,29
0,1	-3,32
0,2	-2,32
0,5	-1
1	0
1,5	0,58
2	1
3	1,58
4	2
5	2,32
10	3,32
100	6,64

┘

On voit dans l'exemple précédent que $\log_a(x)$ varie quand x varie.

Proposition 1.86. Si x, u sont des réels strictement positifs et a un réel strictement positif différent de 1. On a que $\log_a(x) = \log_a(u)$ si et seulement si $x = u$. ┘

Proposition 1.87. Soit a un réel strictement positif et différent de 1 et x, u des réels strictement positifs et y un réel. Alors

1. $a^{\log_a(x)} = x$
2. $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$
3. $\log_a(xu) = \log_a(x) + \log_a(u)$
4. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

┘

Preuve. Ces propriétés découlent facilement de la définition. On montre les deux premières, les deux dernières sont laissées comme exercice.

1. Par définition, on a que $a^y = x$ si $y = \log_a(x)$.
2. Pour montrer que $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$ il faut montrer que $a^{y \log_a(x)} = x^y$. Vu que $a^{y \log_a(x)} = (a^{\log_a(x)})^y$ par Propriétés 1.69 et $a^{\log_a(x)} = x$ par 1., on peut conclure.

□

Exemple 1.88. On a

- * $2^{\log_2(8)} = 2^3 = 8$
- * $\log_2(8^2) = \log_2(64) = 6 = 2 \log_2(8)$
- * $\log_2(4 \cdot 8) = \log_2(32) = 5 = 2 + 3 = \log_2(4) + \log_2(8)$
- * $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3 = 0 - 3 = \log_2(1) - \log_2(8)$.

└

Proposition 1.89 (Formule de changement de base du logarithme). Soient a, b des réels strictement positifs et différents de 1 et x un réel strictement positif. Alors

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}.$$

└

Preuve. Tout d'abord, notons que $\log_a(b) \neq 0$, car $a^0 = 1 \neq b$.

On a que $\log_b(x) = y$ si et seulement si

$$b^y = x.$$

Prenons $\log_a$ des deux côtés de cette équation. Par Proposition 1.86, on obtient une équation *équivalente* :

$$\log_a(b^y) = \log_a(x).$$

Par une des Propriétés 1.87, on sait que $\log_a(b^y) = y \log_a(b)$.

On résume : on a $\log_b(x) = y$ si et seulement si $y \log_a(b) = \log_a(x)$. Cette dernière égalité étant équivalente à $y = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$, on peut conclure. □

Exemple 1.90. On a $\log_{100}(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(100)} = \frac{\log_{10}(x)}{2}$. └

1.4.7 Écriture scientifique

Certains nombres sont trop grands ou trop petits pour être décrits dans les unités classiques. Par exemple la masse de Jupiter est d'environ

1 898 600 000 000 000 000 000 000 kg.

Ridicule. Même en tonnes, ça n'enlève que trois zéro.

On prend alors l'habitude de décrire ces nombres en **notation scientifique** : $m10^e$. Le nombre m s'appelle la **mantisse**, le nombre e s'appelle l'**exposant**.

Exemple 1.91. Voici les masses de quelques planètes de notre système solaire

Planète	Masse (kg)
Jupiter	$1,898\ 6 \cdot 10^{27}$
Saturne	$5,684\ 6 \cdot 10^{26}$
Neptune	$1,024\ 3 \cdot 10^{26}$
Uranus	$8,683\ 2 \cdot 10^{25}$
Terre	$5,973\ 6 \cdot 10^{24}$
Vénus	$4,868\ 5 \cdot 10^{24}$
Mars	$6,418\ 5 \cdot 10^{23}$
Mercure	$3,302 \cdot 10^{23}$

┘

1.5 Équations, inéquations et systèmes

Définition 1.92. Une **équation** est une égalité faisant intervenir une ou plusieurs quantités inconnues. Résoudre une équation revient à déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour la quantité inconnue de sorte que l'égalité soit vérifiée. Ces valeurs sont les **solutions** de l'équation. ┘

Dans une de ses formes les plus simples, une équation fait intervenir une unique quantité inconnue : un nombre réel. La “quantité inconnue” (ou simplement “inconnue”) est souvent nommée x , mais ce nom n'a rien de magique.

Exemple 1.93. * L'équation $2x - 3 = 1$ a pour seule solution : $x = 2$.

- * L'équation $t^2 - 1 = 0$ (dont l'inconnue est t) a pour solutions : $t = 1$ et $t = -1$.
On peut écrire que l'ensemble des solutions est $S = \{-1, 1\}$.
- * L'équation $\sin(x) = 0$ a pour solution $x = 0$, mais il y en a d'autres. Par exemple $x = \pi$. En fait, l'ensemble des solutions est formé de l'ensemble des multiples entiers de π . On peut noter $S = \{k\pi \text{ tel que } k \in \mathbb{Z}\}$.
- * L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans les nombres réels, car tout réel pris au carré est positif, donc $x^2 + 1$ ne peut jamais être égal à 0. L'ensemble des solutions est donc vide. On peut noter $S = \emptyset$.

┘

Une équation peut faire intervenir plusieurs inconnues. Dans ce cas, **une** solution est la donnée d'une valeur pour chaque inconnue.

Exemple 1.94. L'équation $x^2 + y^2 = 0$ (dont les inconnues sont x et y) a une solution : $x = y = 0$. Il n'y en a pas d'autres. On peut noter $S = \{(0, 0)\}$.

┘

Dans l'exemple ci-dessus, il y avait une équation, deux inconnues, mais une seule solution. C'est rare. Généralement une seule équation ne permet pas de déterminer les deux inconnues

Exemple 1.95. L'équation $x + y^2 = 0$ possède une infinité de solutions : pour chaque nombre réel r , les valeurs $y = r$ et $x = -r^2$ fournissent une solution. On peut noter $S = \{(r, -r^2) \text{ tel que } r \in \mathbb{R}\}$.

┘

1.5.1 Systèmes d'équations

Lorsqu'il y a plusieurs inconnues, il peut arriver qu'il y ait également plusieurs équations. On parle alors de **système d'équations**.

Exemple 1.96. Considérons le système d'équations suivant, dont les inconnues sont (x, y) :

$$\begin{cases} x + y &= 1 \\ x - y &= 3 \end{cases}$$

Les solutions sont $x = 2$ et $y = -1$. Il y a une unique solution.

┘

Exemple 1.97. Considérons le système d'équations suivant, dont les inconnues

sont (x, y) :

$$\begin{cases} x - y^2 = 1 \\ x + y^2 = 3 \end{cases}$$

En résolvant, on trouve $x = 2$ et $y^2 = 1$. Dès lors il y a deux possibilités :

- * Soit $x = 2$ et $y = 1$,
- * soit $x = 2$ et $y = -1$.

Il y a donc ici deux solutions !

┘

1.6 Polynômes

Définition 1.98. Un **polynôme en X** est une expression de la forme

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots a_1 X + a_0$$

où $n \in \mathbb{N}$ est le **degré** du polynôme et les $a_i \in \mathbb{R}$. Un tel polynôme sera dès fois noté $P(X)$.

┘

Exemple 1.99. * $X + 3$ est un polynôme de degré 1

- * -7 est un polynôme de degré 0
- * $X^2 + X - 1$ est un polynôme de degré 2.

┘

Définition 1.100. Une **racine réelle** d'un polynôme $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots a_1 X + a_0$ est une solution à l'équation

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots a_1 X + a_0 = 0$$

┘

Pour les polynômes de degré ≤ 2 , nous pouvons explicitement décrire les racines.

Proposition 1.101. Si $P(X) = aX^2 + bX + c$, alors toute racine réelle de P est de la forme $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, si $b^2 - 4a \geq 0$. Si $b^2 - 4ac < 0$, P ne possède pas de racines réelles.

┘

Rappelons que la division euclidienne de deux entiers m, n , $n \neq 0$, est la recherche de deux entiers d et r vérifiant $m = dn + r$ avec $0 \leq r < d$. d et r sont respectivement appelés le quotient et le reste de la division de m par n . Ces deux entiers sont uniques. On peut faire quelque chose de similaire pour les polynômes !

Proposition 1.102 (Division Euclidienne pour les polynômes). Soient P_1, P_2 deux polynômes tels que le degré de P_1 est plus grand ou égal au degré de P_2 alors ils existent deux polynômes (uniques !) Q, R tel que le degré de R est strictement inférieur au degré de Q et

$$P_1 = QP_2 + R.$$

┘

Exemple 1.103. Par exemple la division de X^4 par $X + 1$ donne :

$$X^4 = (X + 1)(X^3 - X^2 + X - 1) + 1.$$

on peut obtenir cela par division Euclidienne classique (mais légèrement adaptée : ce qui est compte est le coefficient du plus haut degré)

$$\begin{array}{r}
 X^4 \\
 - X^4 - X^3 \\
 \hline
 - X^3 \\
 X^3 + X^2 \\
 \hline
 X^2 \\
 - X^2 - X \\
 \hline
 - X \\
 X + 1 \\
 \hline
 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 X + 1 \\
 \hline
 X^3 - X^2 + X - 1
 \end{array}$$

┘

Proposition 1.104. Soit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme. Alors $t \in \mathbb{R}$ est racine de P si et seulement s'il existe un polynôme $Q(X)$ de degré $n - 1$ tel que

$$P(X) = (X - t)Q(X).$$

┘

Preuve. Clairement, si $P(X) = (X-t)Q(x)$, t est racine de P . Supposons maintenant que t est racine de P . Effectuons la division Euclidienne de $P(X)$ par $(X-t)$, alors il existe $Q(X)$ et $R(X)$ tels que

$$P(X) = Q(X)(X-t) + R(X).$$

De plus le degré de R doit être strictement inférieur au degré de $X-t$, qui est de degré un ; donc $R = r \in R$. En remplaçant X par t dans cette équation, et en utilisant que t est une racine de P on trouve que

$$0 = P(a) = Q(a)(t-t) + R(a) = 0 + r.$$

Il suit que $r = 0$ et on a fini. □

Remarque 1.105. La proposition précédente nous aide à trouver les racines de degré ≥ 3 , à condition qu'on sache “deviner une racine”. ┘

Exemple 1.106. Prenons $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2$, alors on peut voir que -1 est racine. On sait alors par Proposition 1.104 que $X+1$ divise P :

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 2X^2 - X + 2 & X+1 \\ -X^3 - X^2 & \hline \hline -3X^2 - X & \\ 3X^2 + 3X & \hline \hline 2X + 2 & \\ -2X - 2 & \hline \hline 0 & \end{array}$$

On trouve donc que $X^3 - 2X^2 - X + 2 = (X+1)(X^2 - 3X + 2)$. Les racines de $X^2 - 3X + 2$ sont 1 et 2. On a donc que $P(X) = (X+1)(X-1)(X-2)$ et ses racines sont $-1, 1, 2$. ┘

Définition 1.107. Un polynôme est **irréductible** s'il est non constant et ne peut pas s'écrire sous la forme d'un produit de deux polynômes non constants. ┘

En d'autres termes, un polynôme est irréductible s'il n'est pas factorisable !

Proposition 1.108. Les polynômes irréductibles sont exactement la réunion des polynômes de degré 1 avec l'ensemble des polynômes de degré 2 n'ayant pas de racine (ne s'annulant pas). ┘

Exemple 1.109. Les polynômes suivants sont irréductibles :

$$X, X - 1, 3X + 5, X^2 + 1, X^2 + 2X + 2, \dots$$

tandis que ceux-ci ne le sont pas :

$$X^2 - 1, (X^2 + 1)^2, 3X^4 + 2X + 1, X^4 + 1.$$

Remarque 1.110. Le résultat précédent dit en fait que tout polynôme de degré au moins égal à 3 est factorisable. Il ne dit cependant pas que ces polynômes ont forcément une racine : $X^4 + 1$ n'a bien évidemment aucune racine (dans $\mathbb{R}$). Mais on peut vérifier que

$$X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}x + 1)(X^2 + \sqrt{2}x + 1),$$

de sorte que $X^4 + 1$ est bien le produit de deux polynômes non constants à coefficients dans $\mathbb{R}$. ┘

1.7 Notions de géométrie

1.7.1 Longueurs, aires et volumes

Chacun sait intuitivement ce qu'est la **longueur**. Plus un chemin est long, plus il faudra de temps à le parcourir. Pour mesurer une longueur, l'unité est le mètre ou ses dérivés (centimètre, kilomètres, etc.)

Notation 1.111. Si A et B sont deux points du plan ou de l'espace, on notera $\|AB\|$ la longueur du segment qui relie A à B . ┘

Exemple 1.112. Un carré est une figure du plan formée de quatre côtés de même longueur orthogonaux. Chacun des côtés a une longueur c . Le périmètre, c'est-à-dire la longueur du pourtour du carré, est alors $4c$. ┘

Exemple 1.113. Un cercle est une figure du plan formée de l'ensemble des points à une distance $r > 0$ donnée d'un autre point (le centre du cercle). Le périmètre d'un tel cercle est $2\pi r$. ┘

La notion d'**aire** est une notion plus complexe. Il s'agit ici d'estimer la place que prend une portion de plan. Lorsque la portion de plan est rectangulaire, la formule est simple : la hauteur multipliée par la largeur.

Exemple 1.114. L'aire de la surface délimitée par un carré dont les côtés ont une longueur c est c^2 . ┘

Exemple 1.115. L'aire d'un disque de rayon r (surface délimitée par le cercle de rayon r) est πr^2 . ┘

Exercice. Ayant à sa disposition 300 mètres de clôture, une bergère veut délimiter un enclos pour ses blancs moutons avant qu'il pleuve. Afin que ses bêtes à quatre pattes aient le plus de place possible, quelle forme doit avoir l'enclos : un carré ou un cercle ? ┘

On pourrait montrer, mais c'est hors sujet, la chose suivante :

Proposition 1.116. Le disque est la surface plane ayant l'aire la plus grande parmi toutes les figures dont le périmètre est fixé. ┘

La notion de **volume** est la généralisation logique de la notion d'aire. Pour un solide en parallélépipède rectangle (une brique), la formule est simple : surface de la base multipliée par la hauteur.

Exemple 1.117. Un cube de côté c a pour volume c^3 . ┘

Exemple 1.118. Une boule de rayon r a pour volume $\frac{4}{3}\pi r^3$. ┘

De la même manière qu'une surface (par exemple un disque) est délimitée par une certaine courbe (dans l'exemple, un cercle), un solide (par exemple une boule) est généralement délimité par une surface de l'espace (dans l'exemple, une sphère). Cette surface, appelée **surface latérale**, possède une certaine aire, appelée **aire latérale**.

Exemple 1.119. La surface latérale d'un cube est composée de six faces carrées. L'aire latérale est donc égale à $6c^2$. ┘

Proposition 1.120. L'aire latérale de la boule de rayon r est $4\pi r^2$. ┘

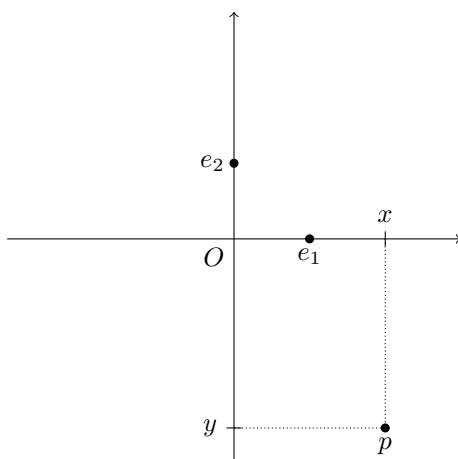


FIGURE 1.2 – Un repère orthonormé du plan.

1.7.2 Repère orthonormé du plan

Dans les chapitres qui suivent, nous allons souvent considérer des objets géométriques dans le plan $\mathbb{R}^2$. Pour pouvoir mieux les appréhender on fixe un *repère*.

Définition 1.121. Un **repère orthonormé** ou **cartésien du plan** est la donnée de trois points : O, e_1 et e_2 , où O est appelé l'**origine**, e_1 et e_2 sont à distance 1 de l'origine et les droites Oe_1 et Oe_2 forment un angle droit. La droite Oe_1 est appelé l'axe des **abscisses** et la droite Oe_2 est appelé l'axe des **ordonnés**. ┘

Ensuite nous identifions l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées à la droite réelle (voir Figure 1.1) Tous les points du plan peuvent dès lors s'exprimer dans ce repère orthonormé : tout point correspond à un couple de points réels, (x, y) , où x est le réel trouvé en projetant p sur l'axe des abscisses, parallèle à l'axe des ordonnées ; et y le réel trouvé en projetant p sur l'axe des ordonnées, parallèle à l'axe des abscisses (voir Figure 1.2).

1.7.3 Théorèmes de Pythagore et Thalès

Nous terminons avec deux résultats classiques en géométrie du plan.

Théorème 1.122 (Théorème de Pythagore). Si A, B, C est un triangle rectangle

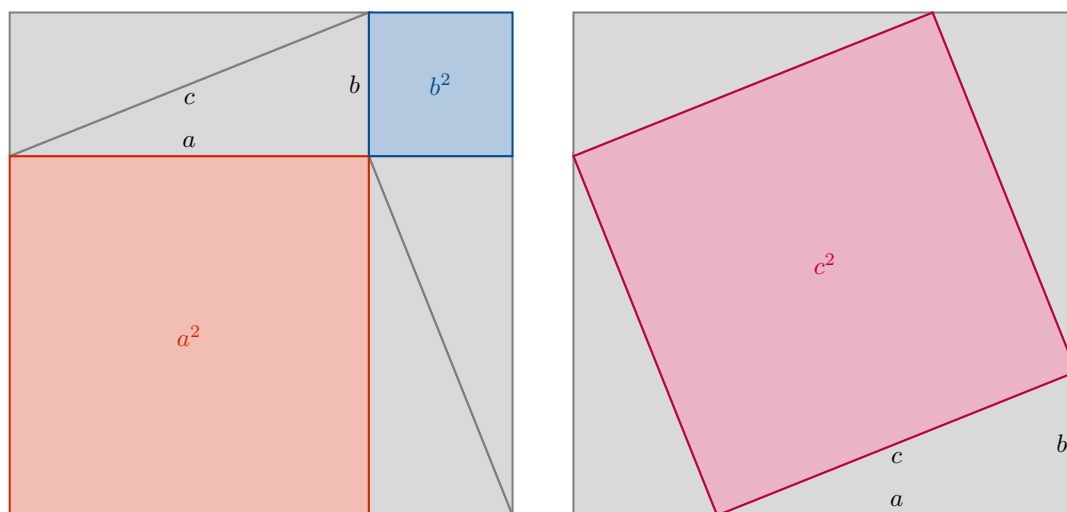


FIGURE 1.3 – Une preuve géométrique du théorème de Pythagore.

en C alors

$$\|AB\|^2 = \|AC\|^2 + \|BC\|^2.$$

┘

Une preuve géométrique est dessinée dans Figure 1.3
Théorème 1.123 (Théorème de Thalès). Soit S le point d'intersection de deux droites. Considérons deux droites parallèles dont les points d'intersection avec la première droite sont A et B et avec la deuxième droite sont C et D (voir Figure 1.4). Alors

$$* \quad \frac{\|SA\|}{\|AB\|} = \frac{\|SC\|}{\|CD\|} \quad * \quad \frac{\|SB\|}{\|AB\|} = \frac{\|SD\|}{\|CD\|} \quad * \quad \frac{\|SA\|}{\|SB\|} = \frac{\|SC\|}{\|SD\|} = \frac{\|AC\|}{\|BD\|}.$$

La preuve est omise.

┘

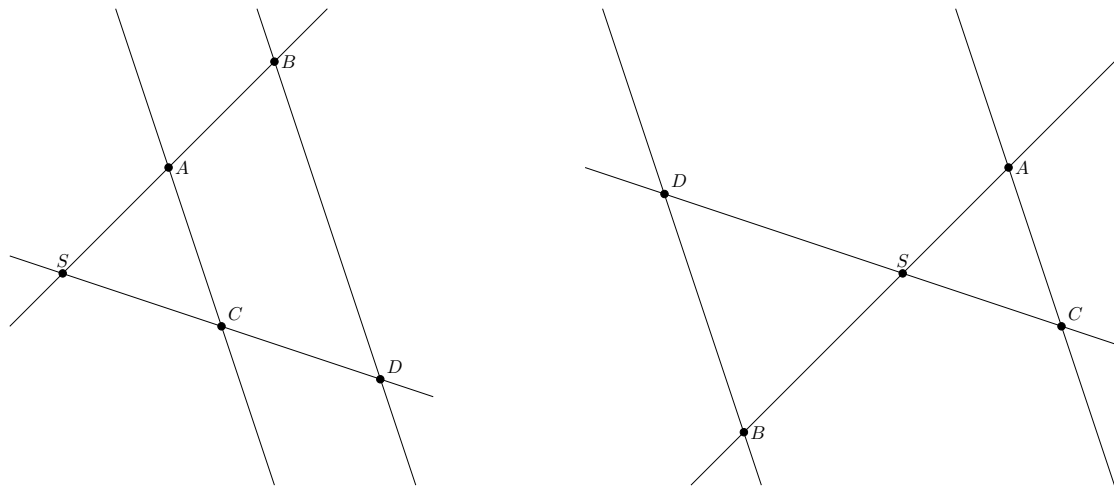


FIGURE 1.4 – Deux configurations possibles pour le Théorème de Thalès.

CHAPITRE 2

Trigonométrie

La trigonométrie, c'est l'étude des triangles. Plus spécifiquement, l'étude des liens entre la mesure des angles et la mesure des côtés.

2.1 La notion d'angle

Mesurer un angle, c'est mesurer l'idée intuitive qu'on peut faire un “tour complet”, mais aussi un demi-tour, un quart de tour ou toute autre fraction de tour. La première notion de mesure d'un angle pourrait donc être simplement un nombre réel, décrivant le nombre de tours. Ce serait tout à fait envisageable, mais ça n'est pas l'unité qui est la plus communément utilisée.

En fait, il y a deux sous-unités classiques : le **degré** et le **radian**. De la même manière qu'un centimètre est le centième d'un mètre, on définit le degré et le radian en divisant l'unité “tour complet” en parties égales : un tour vaut “360 degrés”, ou encore “ 2π radians”. Donc, un degré est $\frac{1}{360} \approx 0,02\%$ d'un tour et un radian est $\frac{1}{2\pi} \approx 16\%$ d'un tour, voir Figure 2.1.

Vu qu'un tour complet est exprimé à la fois par 360° et $2\pi\text{rad}$, on a que

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad.}$$

Nous pouvons convertir les degrés en radians (ou inversement) en utilisant la règle de trois.

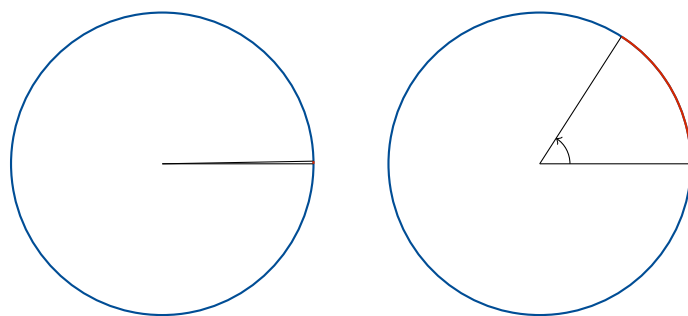


FIGURE 2.1 – Un degré comme $\frac{1}{360}$ d'un tour complet (gauche) et un radian comme $\frac{1}{2\pi}$ d'un tour complet (droite).

Exemple 2.1. Vu que $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$, $1^\circ = \frac{\pi}{180}$. Donc un angle de $60^\circ = 60 \cdot 1^\circ$ est égal à un angle de $60 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$. ┘

Exercice. Convertir $\alpha = \frac{\pi}{12} \text{ rad}$ en degrés. ┘

Dans Tableau 2.1, nous avons exprimés quelques proportions de tours en degrés et radians.

! Attention (Radians comme défaut) Lorsqu'on mesure un angle en radians, on n'indique pas nécessairement l'unité. Par exemple, si un angle mesure 12 radians, on écrira 12rad ou simplement 12. Par contre, s'il mesure 12 degrés, on écrira toujours 12° . Il n'y a donc pas de confusion possible. **!**

Définition 2.2. La **mesure** d'un angle est un réel α entre 0 et 360 (en degrés), ou un réel entre 0 et 2π (en radians), indiquant la proportion d'un tour complet. Un tel réel s'appelle la **détermination principale** de l'angle considéré. ┘

Si cela est la détermination principale, c'est qu'il y en a d'autres. Et en effet : s'il est possible de faire un demi-tour, il est également possible de faire un tour et demi, et se retrouver dans la même position. Dès lors, 180° est "équivalent" à 540° ($540 = 180 + 360$). La détermination principale, c'est simplement enlever assez de

	quart de tour	tiers de tour	demi tour	tour complet	deux tours
degrés	90°	120°	180°	360°	720°
radians	$\frac{\pi}{2} \text{ rad}$	$\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$	$\pi \text{ rad}$	$2\pi \text{ rad}$	$4\pi \text{ rad}$

TABLEAU 2.1 – Proportions de tours exprimés en degrés et radians.

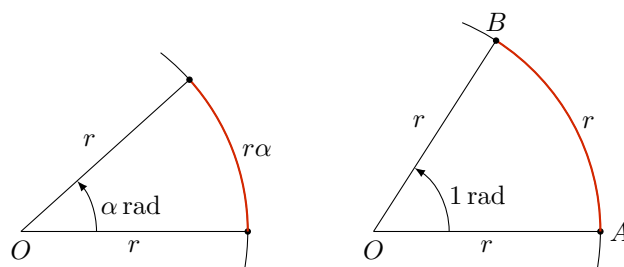


FIGURE 2.2 – Angle de α radian (à gauche), et le cas particulier de l'angle de 1 radian (à droite). Dans le dessin de droite, les segments OA et OB sont de longueurs égales entre elles et égales à la longueur de l'arc de cercle AB .

tours complets pour ramener la mesure de l'angle entre 0° et 360° , ou entre 0 rad et 2π rad.

Le saviez-vous? (Histoire des 360°) C'est il y a environ 4000 ans qu'un babylonien a eu la brillante idée de diviser un angle plein en 360 degrés. Pourquoi 360 ? Parce que les babyloniens comptaient en base 60 et que le nombre 360 a l'avantage de posséder un grand nombre de diviseurs.

Il est par exemple plus facile de calculer un tiers de 360 que de 100.

Un astronome de l'époque trouva cette unité tellement pratique qu'il la publia. C'est ainsi que cette unité d'angle a traversé les siècles pour arriver jusqu'à nous. Il s'agit d'une des plus anciennes unités de mesure encore utilisée. ┘

Le fait qu'il y ait 360 degrés pour un tour complet semble donc purement historique, par contre la valeur 2π radians peut s'interpréter géométriquement.

2.1.1 Le radian

Un **radian** (1 rad) correspond à l'angle au centre d'un cercle qui intercepte, sur la circonférence, un arc dont la longueur est égale au rayon du cercle (voir Figure 2.2, à droite).

En particulier, un angle de α rad intercepte un arc de longueur αr , si r est le rayon du cercle (à gauche, sur la figure) ; dès lors un angle de 2π intercepte un arc de longueur $2\pi r$, soit le cercle entier : cet angle correspond à un tour complet.

Le radian est donc une unité de choix dès qu'il faut faire intervenir des longueurs interceptées par des angles. Il s'avère également l'unité adéquate pour manipuler

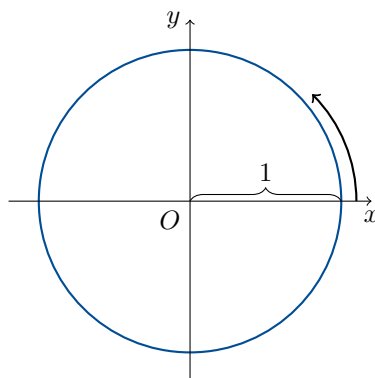


FIGURE 2.3 – Le cercle trigonométrique

les fonctions trigonométriques (cosinus, sinus).

2.1.2 Angles orientés et cercle trigonométrique

Vu que nous concevons les angles par rapport à la notion de “tour complet”, il est coutume de les représenter dans un cercle. Pour cela, nous utiliserons un cercle bien particulier appelé **cercle trigonométrique**. Nous allons munir ce cercle d’une **orientation**, ce qui va nous permettre de distinguer entre tourner dans un sens, ou dans l’autre. On va donc parler d’**angle orienté**.

Définition 2.3. Dans un repère orthonormé, le **cercle trigonométrique** est le cercle dont le centre O est l’origine du repère, dont le rayon vaut 1 et qui est orienté positivement dans le sens contraire des aiguilles d’une montre. Voir Figure 2.3 ┘

Un angle orienté sera représenté sur le cercle trigonométrie de la manière suivante :

- * son sommet en O (origine du repère orthonormé considéré) ;
- * un premier côté confondu avec la partie positive de l’axe x ;
- * le deuxième côté donné par le segment liant un point du cercle à l’origine. Ce point est appelé le **point image** de l’angle.
- * Si l’angle est positif, on considère l’angle du premier au deuxième côté. Si l’angle est négatif, on considère l’angle du deuxième au premier côté.

Exemple 2.4. Dans Figure 2.4 nous avons représenté l’angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$ à gauche

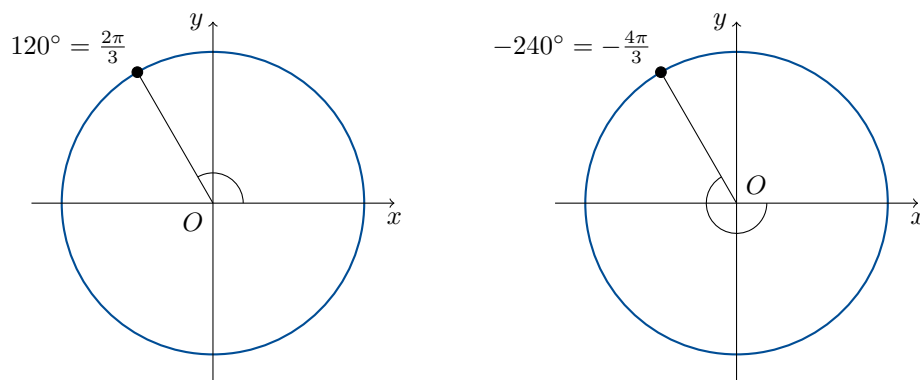


FIGURE 2.4 – Représentations d’angles orientés dans le cercle trigonométrique.

et l’angle de mesure $-\frac{3\pi}{3}$ à droite. Ces deux angles partagent le même point image sur le cercle trigonométrie, car ils diffèrent d’un tour complet : $\frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{4\pi}{3}\right) = 2\pi$. ┘

Par construction, nous avons le résultat suivant.

Proposition 2.5. Deux angles orientés α et β ont le même point image si et seulement α peut être obtenu de β en ajoutant ou soustrayant des tours complets. C’est-à-dire, il existe un nombre entier k tel que $\alpha - \beta = k \cdot 2\pi$. ┘

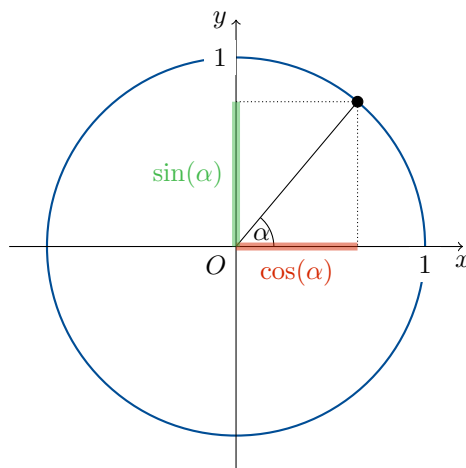
Dans Annexe B, Figures B.1 et B.2, vous trouverez des illustrations indiquant des angles communs positifs et négatifs sur le cercle trigonométrique, en degrés et radians.

2.2 Définitions des fonctions trigonométriques

Étant donné un angle α , il y a quelques nombres qui sont associés à cet angle, qui auront une grande importance en trigonométrie, mais pas que. Pour les définir, on se sert du cercle trigonométrique.

Définition 2.6 (Nombres trigonométriques). Fixons un angle α . Alors

- * Le **cosinus** de l’angle α est l’*abscisse* du point-image de l’angle α sur le cercle trigonométrique. Ce nombre est dénoté $\cos(\alpha)$.
- * Le **sinus** de l’angle α est l’*ordonnée* du point-image de l’angle α sur le cercle trigonométrique. Ce nombre est dénoté $\sin(\alpha)$.

FIGURE 2.5 – Interprétation géométrique du sinus et cosinus d'un angle α

- * Si $\cos(\alpha) \neq 0$, la **tangente** de l'angle α , dénoté $\tan(\alpha)$ est le quotient de son sinus par son cosinus : $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.
- * Si $\sin(\alpha) \neq 0$, la **cotangente** de l'angle α , dénoté $\cot(\alpha)$ est le quotient de son cosinus par son sinus : $\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$.

┘

Dans la Figure 2.5, on identifie directement la représentation géométrique du cosinus et sinus d'un angle. L'interprétation géométrique de la tangente et cotangente demande un peu plus de réflexion.

Proposition 2.7. Soit α un angle représenté sur le cercle trigonométrique et d la droite passant par l'origine et le point image de α . Alors

1. $\tan(\alpha)$ est l'ordonnée du point d'intersection de d et la droite $x = 1$;
2. $\cot(\alpha)$ est l'abscisse du point d'intersection de d et la droite $y = 1$.

┘

Preuve. Par construction la droite d passe par l'origine et le point image de α . C'est-à-dire les points $(0, 0)$ et $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. Il suit que la pente de d est

$$\frac{\sin(\alpha) - 0}{\cos(\alpha) - 0} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha).$$

Si P est le point d'intersection de d et la droite $x = 1$, le point P a comme

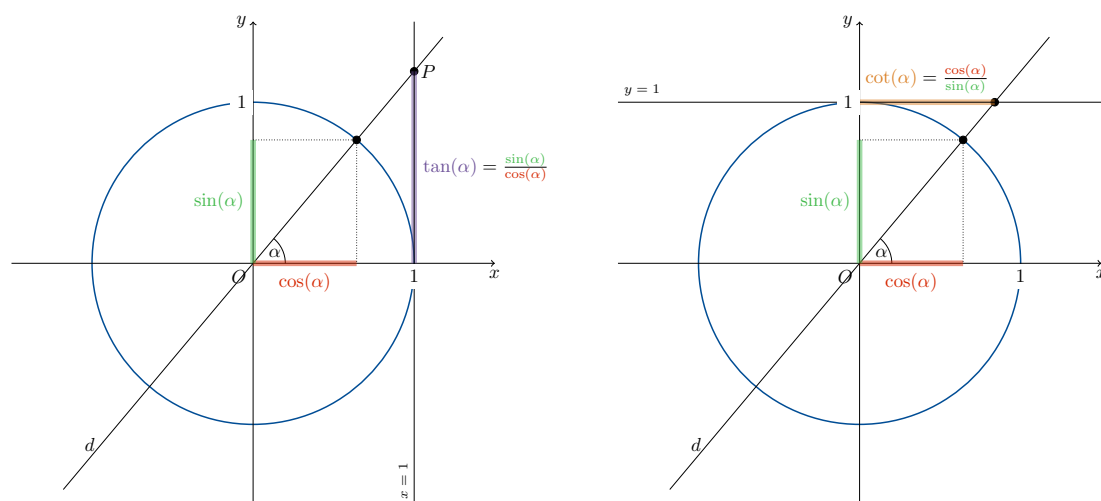


FIGURE 2.6 – Interprétation géométrique de la tangente et la cotangente d'un angle.

angle	sin	cos	tan	cot
0	$\sqrt{0}/2 = 0$	1	0	$\nexists$
$\pi/6$	$\sqrt{1}/2 = 1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/2$	$\sqrt{4}/2 = 1$	0	$\nexists$	0

TABLEAU 2.2 – Valeurs particulières de fonctions trigonométriques.

coordonnées $(t, 1)$ pour un certain t . Vu que d passe par l'origine et P , la pente de d est également égal à $\frac{t-0}{1-0} = t$. Il suit que $t = \tan(\alpha)$, ce qui établit la première assertion.

Pouvez-vous compléter la preuve de la deuxième assertion? **exercice** □

Dans Annexe B, Figure B.3 se trouve une illustration combinant les interprétations de toutes les fonctions trigonométriques.

Dans le Tableau 2.2 sont repris quelques valeurs de fonctions trigonométriques. Il faut connaître ces valeurs et pouvoir reconstruire ce tableau de mémoire!

Exercice. Déterminez les angles pour lesquels le cosinus est positif. Même question pour le sinus, la tangente et la cotangente. ┘

2.2.1 Propriétés de base

On remarque dans la Définition 2.6 que les fonctions trigonométriques ne dépendent que du point image de l'angle. On combine cette observation avec Proposition 2.5 afin d'obtenir le suivant.

Proposition 2.8. Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ et angle $\alpha \in \mathbb{R}$ on a

$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 2\pi)$$

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k \cdot 2\pi)$$

$$\tan(\alpha) = \tan(\alpha + k \cdot 2\pi)$$

$$\cot(\alpha) = \cot(\alpha + k \cdot 2\pi)$$

┘

Ensuite, nous remarquons dans la définition que le sinus et le cosinus d'un angle sont des bornés.

Proposition 2.9. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un angle alors

$$-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$$

$$-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$$

┘

Contrairement au sinus et cosinus, la tangente et cotangente d'un angle peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle. Par contre, il existe des angles pour lesquels la tangente ou la cotangente *n'existent pas*. En effet, pour définir la tangente d'un angle α , il faut que $\cos(\alpha) \neq 0$ et pour la cotangente, il faut que $\sin(\alpha) \neq 0$. Nous reviendrons sur ces conditions plus tard.

Nous terminons cette section avec une formule très importante. Elle suit directement de la définition du sinus et cosinus et le Théorème de Pythagore.

Proposition 2.10 (Relation fondamentale trigonométrique). Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

┘

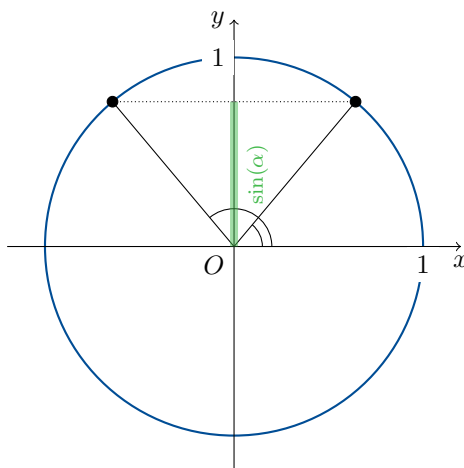


FIGURE 2.7 – Angles ayant le même sinus.

Convention 2.11. On utilisera souvent $\sin^2(\alpha)$, pour indiquer $\sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$. Ceci étant plus court que d'écrire $(\sin(\alpha))^2$. On fera de même pour toutes les fonctions trigonométriques. ┘

2.3 Retrouver un angle en partant du sinus

On considère un angle α dont on suppose connaître le sinus, le cosinus, la tangente, etc. Que vaut α ? Discutons du cas où c'est $\sin(\alpha)$ qui est connu. C'est-à-dire pour un certain S fixé, on cherche les α 's qui satisfont

$$\sin(\alpha) = c. \quad (2.1)$$

Considérons ce problème à l'aide du cercle trigonométrique, voir Figure 2.7. Il est clair qu'en général deux points sur le cercle sont possibles : l'un se trouve entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, l'autre est son symétrique par rapport à l'axe vertical. On sait donc qu'il y a *un unique* α entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ qui satisfait (2.1).

Définition 2.12. Soit c un réel quelconque entre -1 et 1 (qui est l'ensemble des valeurs possibles pour le sinus d'un angle), alors on définit $\arcsin(c)$ comme étant l'unique réel α entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ tel que $\sin(\alpha) = c$. ┘

Remarque 2.13. On voit facilement que la “symétrie par rapport à l'axe verticale”

de $\arcsin(c)$ est donné par $\pi - \arcsin(c)$. ┘

Exemple 2.14. Considérons l'équation $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Une solution est donnée par $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$. Une deuxième solution est $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. ┘

En pratique, sauf si on a la chance d'avoir un sinus ou un cosinus issu du Tableau 2.2 (ce qui dans nos exercices, ce sera souvent le cas!), il n'est pas possible d'obtenir plus qu'une idée approximative de $\arcsin(c)$. Mais l'ordinateur peut calculer sa valeur avec une redoutable précision.

En répétant un argument similaire pour le cosinus et la tangente, on obtient les définitions suivantes.

Définition 2.15. Soit c un réel quelconque entre -1 et 1 , alors on définit $\arccos(c)$ comme étant l'unique réel α entre 0 et π tel que $\cos(\alpha) = c$. ┘

Définition 2.16. Soit c un réel quelconque, alors on définit $\arctan(c)$ comme étant l'unique réel α entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ tel que $\tan(\alpha) = c$. ┘

Finalement, on remarque que, par Proposition 2.8, si un angle α possède un certain sinus, alors tout angle $\alpha + k \cdot 2\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ aura le même sinus.

Exemple 2.17. Reprenons l'équation $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ comme dans Exemple 2.14. Les solutions de cette équation sont toutes de la forme

$$\frac{\pi}{3} + 2 \cdot k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{2\pi}{3} + 2 \cdot k\pi$$

pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. ┘

En combinant toutes ces informations peut résumer cette section comme ceci.

Si $c = \begin{cases} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ \tan(\alpha) \end{cases}$	alors $\alpha = \begin{cases} \arcsin(c) + k \cdot 2\pi \text{ ou } \pi - \arcsin(c) + k \cdot 2\pi \\ \arccos(c) + k \cdot 2\pi \text{ ou } -\arccos(c) + k \cdot 2\pi \\ \arctan(c) + k \cdot 2\pi \text{ ou } \pi + \arctan(c) + k \cdot 2\pi \end{cases}$
---	---

pour $k \in \mathbb{Z}$.

Bien entendu, plutôt que de retenir cette recette par cœur, il vaut mieux se rappeler comment elle est obtenue grâce au cercle trigonométrique.

Exemple 2.18. Les angles pour lesquels la tangente n'existe pas sont les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\cos(\alpha) = 0$. C'est-à-dire les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. ┘

Exercice. Quels sont les angles pour lesquels la cotangente n'existe pas ? ┘

Exercice. Déterminez toutes les angles dont le sinus vaut $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et le cosinus est positif. ┘

2.4 Angles associés

Comme on a vu dans Figure 2.7, on peut se servir de symétries géométriques pour trouver des relations entre différentes fonctions trigonométriques. La proposition suivante reprend un tas de ces relations entre angles appelés **associés**. Elles découlent facilement de symétries du cercle trigonométrique (voir les figures qui suivent l'énoncé de la proposition).

Proposition 2.19 (Angles associés). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un angle. Alors

* l'angle **symétrique par rapport à l'axe des abscisses** est $-\alpha$ et on a

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \quad \tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$

* l'angle **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** est $\pi - \alpha$ et on a

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha) \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) \quad \tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$$

* l'angle **symétrique par rapport à l'origine** est $\pi + \alpha$ et on a

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha) \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha) \quad \tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$$

* l'angle **symétrique par rapport à la première bissectrice** est $\frac{\pi}{2} - \alpha$ et on a

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha) \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha) \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha)$$

* l'angle **décalé d'un angle droit** est $\frac{\pi}{2} + \alpha$ et on a

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha) \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha) \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot(\alpha)$$

┘

! Attention (Conseil d'étude) Vous devez connaître toutes les relations énoncées dans Proposition 2.19. Ne les apprenez pas par cœur, mais déduisez-les d'un dessin du cercle trigonométrique. **!**

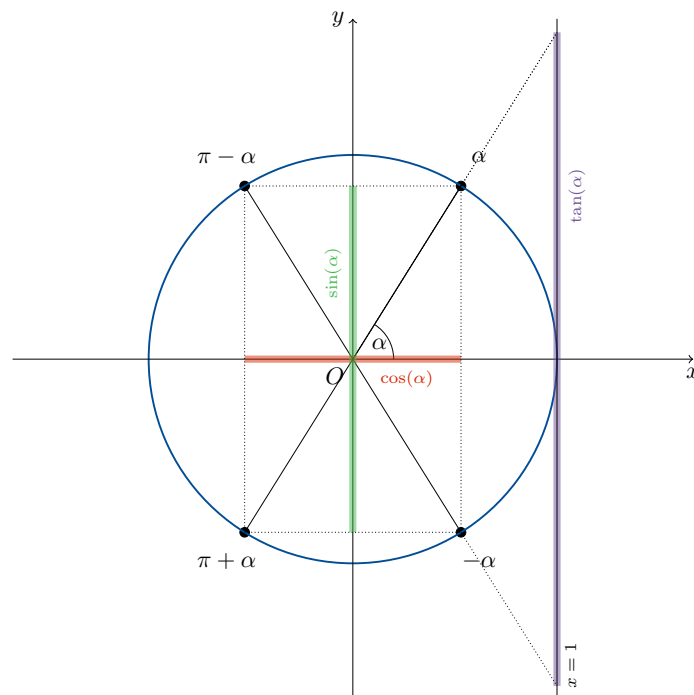


FIGURE 2.8 – Angles associés : symétries par rapport à l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et l'origine.

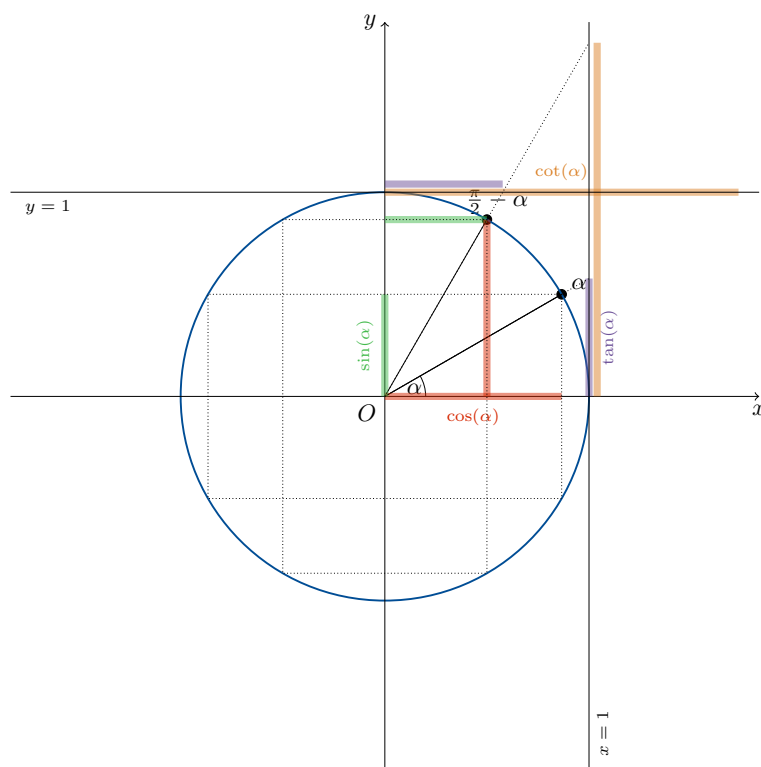


FIGURE 2.9 – Angles associés : symétrie par rapport à la première bissectrice.

Remarque 2.20 (Réduction à un angle du premier quadrant). En utilisant Proposition 2.19 et Proposition 2.8, on voit que si on doit calculer $\sin, \cos, \tan$ ou $\cot$ d'un certain angle réel, il est toujours possible de réduire le problème à un angle entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. ┘

Exemple 2.21. Si on veut calculer $\sin\left(\frac{35\pi}{6}\right)$, on remarque d'abord que

$$\frac{35\pi}{6} = \frac{(24 + 11)\pi}{6} = 4\pi + \frac{11\pi}{6}.$$

Et donc, par Proposition 2.8, $\sin\left(\frac{35\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$. Ensuite, en utilisant Proposition 2.19, on sait que

$$\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

En utilisant le Tableau 2.2, on trouve que $-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$. ┘

2.5 Fonctions trigonométriques dans les triangles

Nous avons défini le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle à partir du cercle trigonométrique, mais on y voyait déjà apparaître des triangles. Étudions de plus près l'interprétation des fonctions trigonométriques dans les triangles.

2.5.1 Triangles rectangles

Dans les triangles rectangles, grâce au théorème de Thalès, on trouve aisément une interprétation pour les fonctions trigonométriques.

Proposition 2.22. Considérons un triangle ABC , rectangle en C . Dénotons par α l'angle du triangle au sommet A . Alors on a

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{\|AC\|}{\|AB\|} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \alpha}{\text{longueur de l'hypoténuse}} \\ \sin(\alpha) &= \frac{\|BC\|}{\|AB\|} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \alpha}{\text{longueur de l'hypoténuse}} \\ \tan(\alpha) &= \frac{\|BC\|}{\|AC\|} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \alpha}{\text{longueur du côté adjacent à } \alpha}.\end{aligned}$$

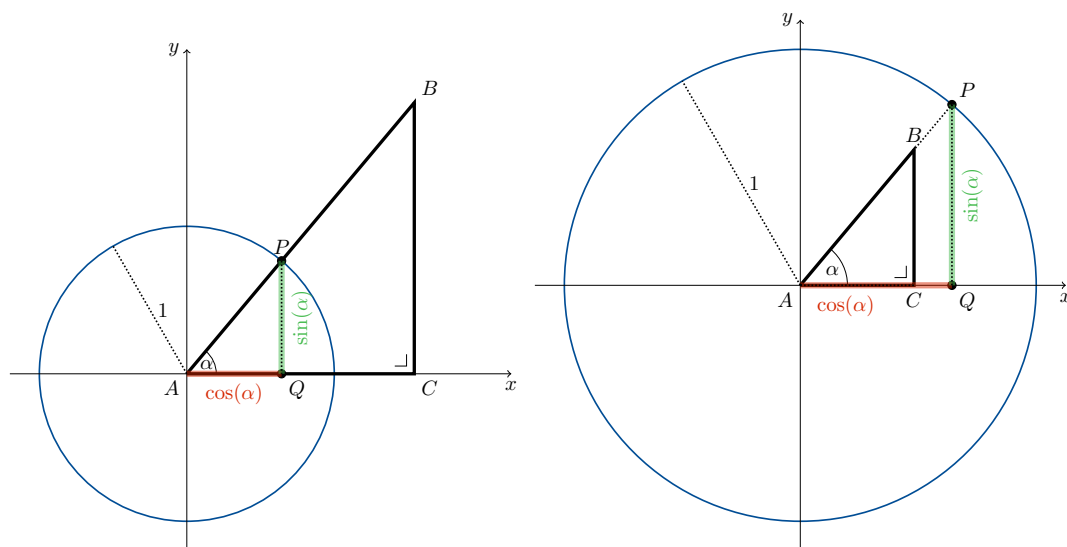


FIGURE 2.10 – Preuve de Proposition 2.22.

┘

Preuve. Il est conseillé de suivre cette preuve en faisant référence à la Figure 2.10.

Positionnons le triangle ABC dans un repère orthonormé de façon à ce que le point A se trouve à l'origine et le point C dans la direction positive de l'axe des abscisses. Traçons un cercle de rayon 1 avec comme centre le sommet A (dans la Figure 2.10 nous présentons deux possibilités : le cas où $\|AC\| > 1$ et le cas où $\|AC\| < 1$. Que se passe-t-il quand $\|AC\| = 1$?). Soit P le point image de l'angle α sur ce cercle trigonométrique. Soit Q la projection orthogonale du point P sur l'axe des abscisses. Alors les droites PQ et BC sont parallèles et intersectent les droites AB et AC en P, B et Q, C ; respectivement. Les deux premières formules suivent alors directement du Théorème de Thalès (1.123). La dernière formule suit des deux premières et la définition de la tangente. $\square$

2.5.2 Triangles quelconques

Dans un triangle quelconque, le sinus et cosinus permettent toujours d'exprimer des relations entre ses angles et les longueurs ses côtés.

Convention 2.23. Soit un triangle de sommets A, B et C , alors $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ désignent les angles (pris entre 0 et π) en chacun des sommets, et a , b et c les mesures

des longueurs (positives) des segments BC , CA et AB , respectivement. Voir Figure 2.11

Proposition 2.24 (Loi des sinus). Dans un triangle ABC , en utilisant Convention 2.23, on a

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}.$$

Preuve. Prouvons l'une de ces égalités. Nous utiliserons Figure 2.12. Notons par h la hauteur issue de B . Alors, en appliquant Proposition 2.22, on a d'une part $\sin \hat{C} = \frac{h}{a}$ et d'autre part $\sin \hat{A} = \frac{h}{c}$, ceci prouve

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{C}}{c}.$$

Théorème 2.25 (Loi des cosinus ou Théorème d'Al-Kashi). Dans un triangle ABC , en utilisant Convention 2.23, on a

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C}).$$

Remarque 2.26 (Al-Kashi généralise Pythagore). On voit que, lorsque le triangle est rectangle en C ($\hat{C} = \frac{\pi}{2}$), alors $\cos(\hat{C}) = 0$ ce qui donne la formule de Pythagore $c^2 = a^2 + b^2$.

Preuve. Voir Figure 2.13. Dans un triangle quelconque ABC , soit D la projection

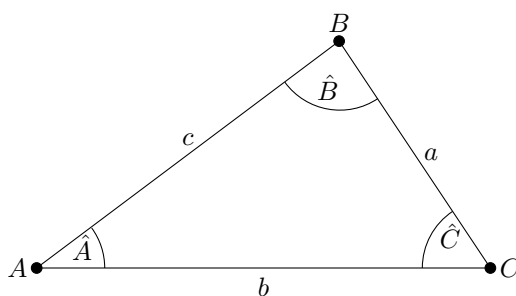


FIGURE 2.11 – Illustration de Convention 2.23

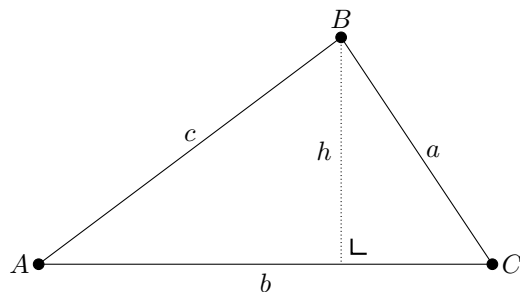


FIGURE 2.12 – Preuve de Proposition 2.24

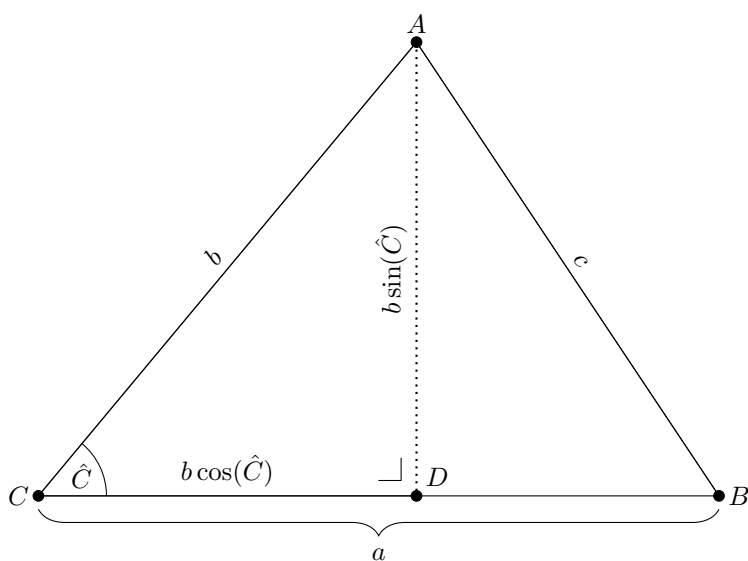


FIGURE 2.13 – Preuve de Théorème 2.25

orthogonale de A sur CB . On trouve que $\|DB\| = a - b \cos(\hat{C})$ et $\|AD\| = b \sin(\hat{C})$. En appliquant le Théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ADB , on trouve que

$$\begin{aligned} c^2 &= (a - b \cos(\hat{C}))^2 + (b \sin(\hat{C}))^2 \\ &= a^2 - 2ab \cos(\hat{C}) + b^2 \cos^2(\hat{C}) + b^2 \sin^2(\hat{C}) \\ &= a^2 + b^2(\sin^2(\hat{C}) + \cos^2(\hat{C})) - 2ab \cos(\hat{C}). \end{aligned}$$

Maintenant, le résultat suit de Proposition 2.10 □

2.6 Formules de sommes d'angles

Il sera souvent utile de reformuler l'expression du $\sin, \cos$ ou $\tan$ de la somme de deux angles. Les formules suivantes sont à connaître par cœur.

Théorème 2.27. Pour tout pair d'angles $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

- * $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
- * $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
- * $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$.

┘

Preuve. Pour montrer les deux premières formules, supposons d'abord que $0 \leq \alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Alors nous pouvons faire une construction géométrique comme dans Figure 2.14. On part d'un triangle rectangle ABC d'hypoténuse 1 et on utilise Proposition 2.22 et le fait que la somme des angles d'un triangle vaut π pour calculer la mesure des angles et côtés. Les formules suivent alors des expressions différentes obtenues pour les longueurs $\|AF\| = \|DE\|$ et $\|AD\| = \|FE\|$.

Le cas général peut se déduire en utilisant Remarque 2.20 (exercice).

La troisième formule suit facilement des deux autres et la définition de la tangente (exercice). □

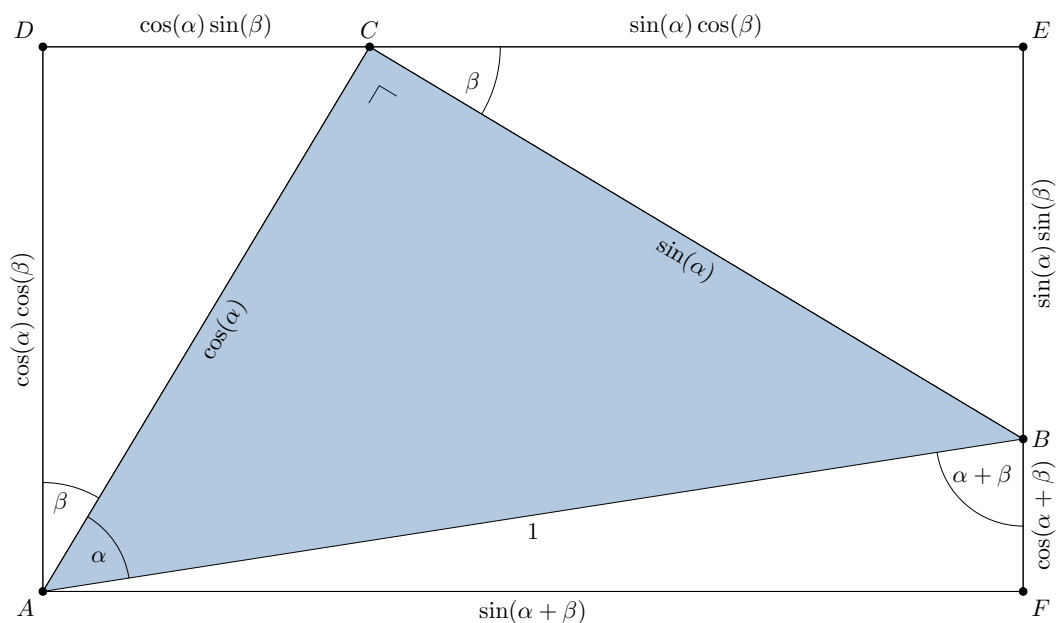


FIGURE 2.14 – Preuve de Théorème 2.27.

2.7 D'autres identités remarquables : formulaire

Les identités suivantes sont souvent utiles. Elles peuvent se déduire en combinant Théorème 2.27, Proposition 2.19, Proposition 2.10 et un peu de calcul.

- * $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
- * $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
- * $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$
- * $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
- * $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- * $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$
- * $\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$
- * $\cos(3\alpha) = -3 \cos \alpha + 4 \cos^3 \alpha$
- * $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$
- * $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$
- * $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$

- * $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$
- * $\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}$, (en particulier $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$)
- * $\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$, (en particulier $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$)
- * $\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$
- * $\cos \alpha \sin \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}$
- * $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- * $\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- * $\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- * $\sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Exemple 2.28. Étudions le cosinus du double d'un angle :

$$\begin{aligned}
 \cos(2\alpha) &= \cos(\alpha + \alpha) \\
 &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha && \text{par Théorème 2.27} \\
 &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha && \text{par Proposition 2.10} \\
 &= 2 \cos^2(\alpha) - 1 \\
 &= 2(1 - \sin^2(\alpha)) - 1 && \text{par Proposition 2.10} \\
 &= 1 - 2 \sin^2(\alpha).
 \end{aligned}$$

┘

CHAPITRE 3

Géométrie analytique

La géométrie analytique est une manière d’aborder des problèmes de géométrie grâce à un ou plusieurs systèmes de coordonnées, et en faisant des calculs. Le choix classique d’un système de coordonnées est un système cartésien orthonormé, ce qui fournit une bijection entre l’objet géométrique (nous concernant : une droite, un plan, un cercle) et un objet analytique (des (tuples de) nombres réels, ou des équations). Ce choix est tellement standard que nous aurons coutume de parler de “la droite réelle” pour désigner $\mathbb{R}$, et de même pour le plan réel ($\mathbb{R}^2$) et l’espace réel ($\mathbb{R}^3$), prenant ainsi le modèle analytique pour le modèle géométrique lui-même.

3.1 Repères orthonormés et points

Au tout début de ce cours, nous avons remarqué que nous identifions les nombres réels souvent à une “droite sans trou”, comme représenté dans Figure 1.1. Sous-entendu dans cette représentation est en fait un repère de la droite.

Définition 3.1. Un **repère** de la droite est un choix de deux points : une origine O , et un point e_1 à distance 1 de 0. ┘

Les autres points de la droite s’expriment alors par comme une valeur réelle dans ce repère, *par rapport aux points O et e_1* (voir Figure 3.1). Au premier abord ce point de vue ne change pas grand-chose, si ce n’est que le potentiel de généralisation.

Rappelons la définition suivante, vu dans Section 1.7.2.

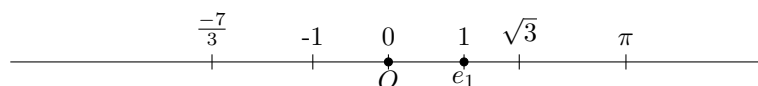


FIGURE 3.1 – Repère de la droite réelle.

Définition 1.121. Un **repère orthonormé** ou **cartésien du plan** est la donnée de trois points : O, e_1 et e_2 , où O est appelé l'**origine**, e_1 et e_2 sont à distance 1 de l'origine et les droites Oe_1 et Oe_2 forment un angle droit. La droite Oe_1 est appelé l'axe des **abscisses** et la droite Oe_2 est appelé l'axe des **ordonnés**. ┘

À l'aide d'un tel repère, on peut établir une équivalence entre

1. les points p du plan
2. les couples de nombres réels de la forme (x, y) où $x, y \in \mathbb{R}$. C'est-à-dire, les éléments de l'ensemble $\mathbb{R}^2$.

Pour trouver x et y à partir d'un point p (voir Figure 3.2) : on voit les axes comme des droites réelles de repères O, e_1 et O, e_2 .

- * On projette p parallèlement à l'axe des ordonnées, sur l'axe des abscisses. Soit x le réel trouvé sur l'axe. Il s'agit de l'**abscisse** du point.
- * On projette p parallèlement à l'axe des abscisses, sur l'axe des ordonnées. Soit y le réel trouvé sur l'axe. Il s'agit de l'**ordonnée** du point.

Il est clair comment inverser cette opération.

On peut faire la même chose dans l'espace.

Définition 3.2. Un **repère orthonormé** ou **cartésien** de l'espace est la donnée de quatre points : une origine O et trois points e_1, e_2 et e_3 , tels que les e_i sont à distance 1 de O et que les droites Oe_i sont orthogonales entre elles. ┘

On identifie à nouveau (voir Figure 3.2 (droite)), en projetant parallèlement

1. les points p du de l'espace
2. les triples de nombres réels de la forme (x, y, z) où $x, y, z \in \mathbb{R}$. C'est-à-dire, les éléments de l'ensemble $\mathbb{R}^3$. On appellera alors les droites Oe_1, Oe_2 et Oe_3 l'axe des x, y et z , respectivement.

Définition 3.3. Soit p un point du plan ou de l'espace. Les entrées du couple (x, y) ou du triple (x, y, z) correspondent à p sont appelés les **coordonnées cartésiennes** de p . ┘

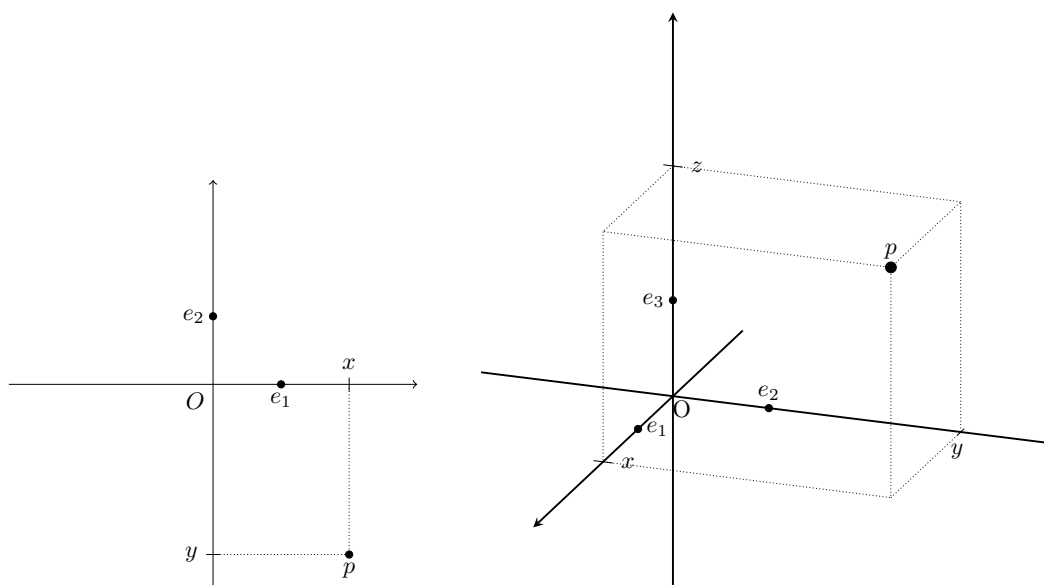


FIGURE 3.2 – Repère orthonormé du plan (gauche) et de l’espace (droite).

Remarque 3.4 (Orientation d’un repère dans l’espace). Quand on fait le choix d’un repère orthonormé du plan “tous les choix sont équivalents”. Par cela, on veut dire que tous les repères orthonormés du plan sont les mêmes à translation ou rotation près : on peut obtenir tout repère à partir d’un autre en le bougeant et tournant.

Ceci n’est pas vrai dans l’espace. Il y a deux types de choix qui résultent en des repères qualitativement différents. En effet, si on a déjà fixé O , e_1 et e_2 et on fait le choix de e_3 , on est obligé de le prendre sur la droite perpendiculaire au plan $e_1 O e_2$ et passant par O . Mais on pourrait le prendre d’un côté ou l’autre du plan. Ceci résultent en des repères dites *orientés positivement* ou *négativement*. Plus d’information sur cette distinction sera donné dans la Section 3.6. ┘

Par analogie à ces conceptions du plan et de l’espace, il n’est pas difficile de généraliser et d’imaginer un espace “ **n -dimensionnel**,” dont les points seront décrits par ses coordonnées cartésiennes : $(p_1, \dots, p_n)$ où chaque $p_i \in \mathbb{R}$. Ils sont donc identifiés aux éléments de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 3.5. Le point $(1, -1)$ de $\mathbb{R}^2$ désigne l’élément du plan d’abscisse 1 et d’ordonnée -1 . ┘

Remarque 3.6. Comme on a vu, pour certaines valeurs de n fixées, d'autres coutumes existent : pour $n = 1$, il n'y a qu'une seule coordonnée donc on n'écrit généralement pas p_1 , mais simplement p , ou toute autre lettre. Pour $n = 2$, il y a deux composantes qui sont souvent notées (x, y) (mais d'autres lettres s'utilisent). Similairement pour $n = 3$ en ajoutant z (ou autres). Et cætera. Toutes ces conventions d'écriture n'ont qu'un effet psychologique : on peut très bien en changer si le contexte le requiert. ┘

3.2 Vecteurs

3.2.1 Vecteurs libres et liés

Au-delà de l'étude des points de la droite, du plan, de l'espace, etc. nous pouvons également étudier les relations entre eux et, en particulier, les mouvements. Le mouvement le plus élémentaire est la translation et une translation peut également se décrire par un élément de $\mathbb{R}^n$. Il se décrit en utilisant la notion suivante.

Définition 3.7. Un **vecteur (libre)**¹ est un élément de $\mathbb{R}^n$. ┘

Remarque 3.8. Ceci a la désagréable conséquence que le même objet $\mathbb{R}^n$ modélise plusieurs réalités (points et vecteurs).

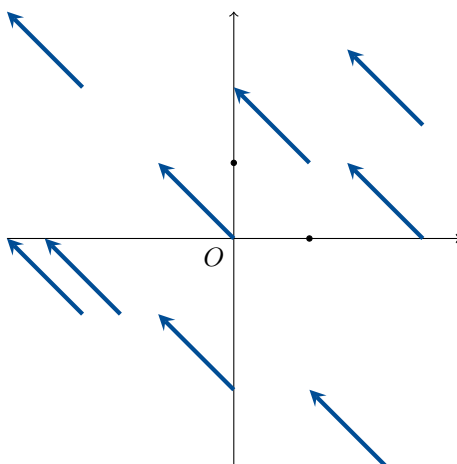
Formellement et pratiquement, les points et les vecteurs sont interchangeables.

La différence entre les concepts se trouve dans l'idée qu'ils forment dans notre imaginaire, à travers les images et le langage qu'on utilise pour les décrire. C'est une différence fondamentale et intuitive entre point et vecteur est que

le point représente un *état*, une *position* tandis que le vecteur représente un *mouvement*, une *évolution*. ┘

On marque donc la différence entre autre par un vocabulaire différencié.

1. Les parenthèses indiquent que si on parle simplement de *vecteur*, l'adjectif *libre* est sous-entendu !

FIGURE 3.3 – Différentes représentations du vecteur $(-1, 1)$

Définition 3.9. Soit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{x}$ est vu comme un point, les x_i 's sont appelés des coordonnées (cartésiennes) du point. Si $\mathbf{x}$ est vu comme un vecteur les x_i 's les **composantes** du vecteur. ┘

Exemple 3.10. Le vecteur $(-1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ indique une translation dans la direction “Nord-Ouest” sur le plan. ┘

Exemple 3.11. L'élément $(1, 1)$ (de $\mathbb{R}^2$) peut représenter soit un point du plan, soit un déplacement dans le plan. En tant que point, il se trouve au “nord-est” du point $(0, 0)$; en tant que vecteur, il indique la direction “Nord-Est”. ┘

Remarque 3.12. Sur un dessin, un point (au sens ci-dessus) est généralement représenté par un point (dessiné); un vecteur est représenté le plus souvent par une flèche. Mais pleines de flèches différentes peuvent indiquer la même direction. Ceci explique pourquoi on parle de vecteur **libre** : un vecteur indique une direction, mais pas un point de départ. ┘

Exemple 3.13. Toutes les flèches dans Figure 3.3 représentent la même direction et donc le **même** vecteur $(-1, 1)$: “Nord-Ouest”. ┘

Parfois, le point de départ d'un vecteur est important dans le contexte.

Définition 3.14. Un **vecteur lié** est donné par

1. un vecteur (libre) $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$
2. un point $\mathbf{p}$ de $\mathbb{R}^n$ appelé le point-base ou l'origine du vecteur lié.

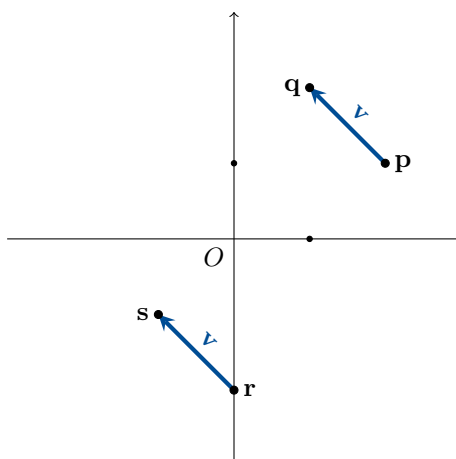


FIGURE 3.4 – Deux vecteurs liés équipollents.

On dessine tel vecteur en plaçant le début de la flèche représentant le vecteur $\mathbf{v}$ au point $\mathbf{p}$. Si $\mathbf{q}$ est le point qui se trouve sur la fin de la flèche, le vecteur libre est dénoté par $\overrightarrow{pq}$. ┘

Définition 3.15. Deux vecteurs liés sont dits **équipollents** s'ils ont le même vecteur sous-jacent. ┘

Exemple 3.16. Dans Figure 3.4 on a dessiné deux vecteurs liés équipollents : $\overrightarrow{pq}$ et $\overrightarrow{rs}$. Le vecteur sous-jacent à ces deux vecteurs liés est le même : $(-1, 1)$. Le point-base de $\overrightarrow{pq}$ est $\mathbf{p} = (2, 1)$. Le point-base de $\overrightarrow{rs}$ est $\mathbf{r} = (0, -2)$. ┘

Exemple 3.17. Si on imagine un vecteur représentant la vitesse (direction et intensité) du vent en un point donné, cela n'a pas de sens que ce vecteur soit basé en un autre point que celui-là. On utilisera donc un vecteur lié, basé en le point en question. ┘

Remarque 3.18. Il y a des situations où le point-base n'a aucune importance et donc la donnée d'un vecteur (libre) suffit. Souvent, quand on veut dessiner une flèche représentant un vecteur (libre) $\mathbf{v}$, on décide un point de départ arbitraire par défaut : l'origine O du repère. Si p est le point sur la fin de la flèche représentant $\mathbf{v}$, les coordonnées du point p coïncident avec les composantes du vecteur $\mathbf{v}$! On confond sur ce dessin alors le vecteur libre $\mathbf{v}$, le point p et le vecteur lié $\overrightarrow{Op}$. On écrira parfois $\overrightarrow{p}$, pour indiquer le même vecteur libre $\mathbf{v}$. Voir Figure 3.5 ┘

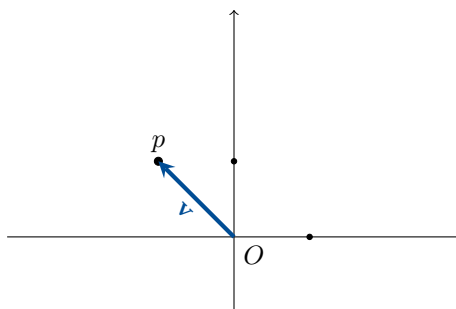


FIGURE 3.5 – Le vecteur $(-1, 1) \in \mathbb{R}^2$ basé en l’origine.

Remarque 3.19. Les notions de vecteur libre et vecteur lié n’ont rien à voir avec les notions de partie “libre” et “liée” qui seront vue en MATHF114. ┘

3.2.2 Normes et distances

Considérons le vecteur $v = (x, y)$ dans le plan. En le dessinant comme la flèche entre O et (x, y) on peut appliquer le Théorème de Pythagore (1.122) (voir Figure 3.6, gauche) pour conclure que la longueur de la flèche est donnée par

$$\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si on prend un vecteur dans l’espace, $v = (x, y, z)$, on peut similairement conclure (voir Figure 3.6, droite) que la longueur de la flèche qui relie O à (x, y, z) est

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ceci nous amène à la définition suivante.

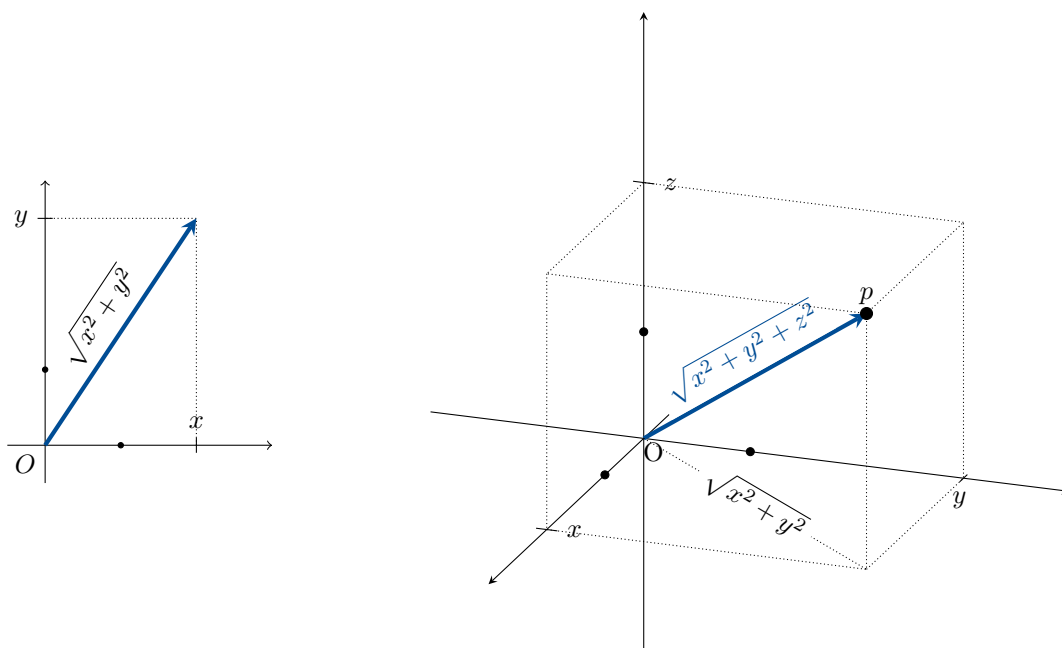
Définition 3.20. La **longueur** ou **norme** d’un vecteur $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ est donnée par

$$\|v\| := \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$

┘

Il est alors intuitif de définir le suivant.

Définition 3.21. Soient p, q deux points de $\mathbb{R}^n$. Alors la *distance* entre p et q est alors définie comme étant $\|\vec{pq}\|$: la norme du vecteur liant p à q . ┘

FIGURE 3.6 – Normes de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Remarque 3.22. On a que $\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$. C'est-à-dire le seul vecteur de norme 0 est le vecteur nul. ┘

3.3 Opérations de base

Définition 3.23. Les éléments de $\mathbb{R}^n$ (pour toute valeur de n fixée) peuvent être additionnés (“composante par composante”) entre eux, ou multipliés par un réel donné de la manière suivante : si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont des éléments de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$(x_1, \dots, x_n) - (y_1, \dots, y_n) := (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

┘

Remarque 3.24. Il est également possible de multiplier deux éléments composante par composante, cependant, c'est une opération qui se révèle largement moins

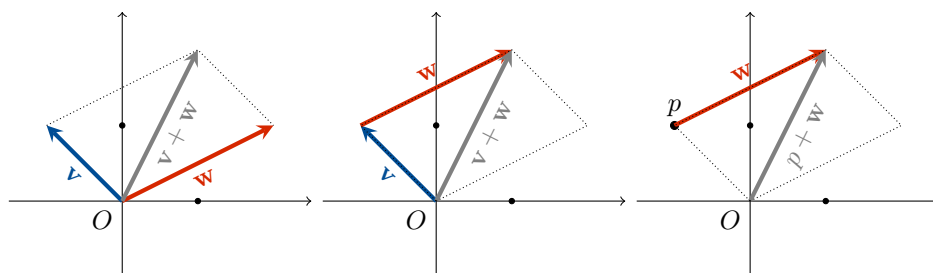
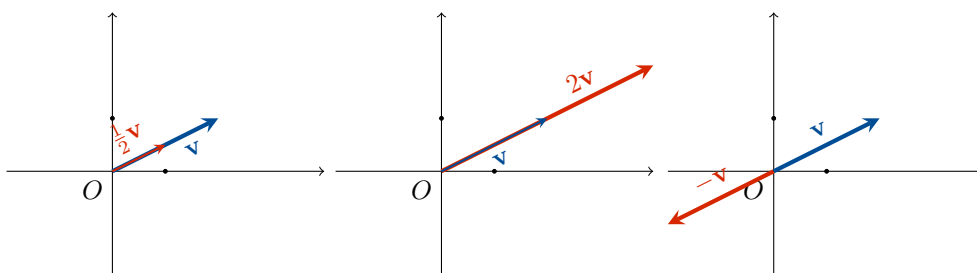
FIGURE 3.7 – Interprétation géométrique de la somme de deux éléments de $\mathbb{R}^2$.

FIGURE 3.8 – Interprétation géométrique de la multiplication d'un vecteur avec un réel.

utilisée. Nous n'en parlerons donc pas plus. ┘

Ces opérations ont l'interprétation géométrique suivante :

- * la somme de deux vecteurs est donnée par la règle du parallélogramme (voir Figure 3.7) ;
- * la multiplication par un réel (on dira aussi “par un **scalaire**”) multiplie la longueur (voir Figure 3.8).

Remarque 3.25 (Addition entres points ou vecteurs). Précisons notre modèle de pensée pour ce qui concerne la somme de points et de vecteurs :

- * La somme de deux ou plusieurs *vecteurs* représente la composée de déplacements successifs : le résultat est un vecteur (voir Figure 3.7, gauche et milieu).
- * La somme d'un **point** et d'un *vecteur* représente un déplacement à partir de ce point dans la direction du vecteur donné : le résultat est un point (voir Figure 3.7, droite).
- * La différence de deux *points* est un vecteur allant du second vers le premier : $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ est le vecteur $\overrightarrow{pq}$ (voir Figure 3.7) ;

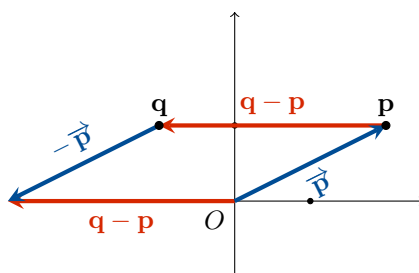


FIGURE 3.9 – Interprétation géométrique de la différence entre deux points.

* La somme de deux *points* n'a pas de sens intuitif.

┘

Exemple 3.26. Si on considère $\mathbf{p} = (1, 2)$ comme un point, et $\mathbf{w} = (1, -1)$ comme un vecteur (donnant la direction “Nord-Ouest”), alors on conçoit leur somme $\mathbf{p} + \mathbf{w} = (1, 2) + (1, -1) = (2, 1)$ comme le point obtenu en translatant le point de départ, $\mathbf{p}$, dans la direction donnée $\mathbf{w}$.

┘

Remarque 3.27 (Formule pour la distance entre deux points). Soient $p = (p_1, \dots, p_n)$ et $q = (q_1, \dots, q_n)$ deux points de l'espace $\mathbb{R}$. En combinant les deux faits suivants le fait que $\vec{pq} = q - p$ avec la Définition 3.21 (qui dit que la distance entre p et q est la norme du vecteur $\vec{pq}$) on obtient que la distance entre p et q est donnée par

$$\sqrt{(q_1 - p_1)^2 + \dots + (q_n - p_n)^2}.$$

┘

Définition 3.28. L'élément particulier $(0, 0, \dots, 0)$ se note $\mathbf{0}$ et est appelé **vecteur nul**.

┘

Proposition 3.29. Quel que soit le vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, nous avons

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

┘

Avec ces définitions, nous attardant pour l'exemple sur le cas $n = 3$. Notons $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ les vecteurs suivants :

$$\mathbf{e}_1 := (1, 0, 0)$$

$$\mathbf{e}_2 := (0, 1, 0)$$

$$\mathbf{e}_3 := (0, 0, 1).$$

Avec l'origine, ces points forment donc un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$ (voir Définition 3.2)

Alors tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$. Cette décomposition et ces vecteurs $\mathbf{e}_i$ peuvent évidemment se généraliser à toute valeur de n : ils contiennent simplement plus de composantes. Les vecteurs $\mathbf{e}_i$ sont appelés vecteurs de **base** de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 3.30. En MATHF114, le concept de **base** va être plus généralement et précisément défini. ┘

Proposition 3.31. Tout vecteur $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit

$$v_1\mathbf{e}_1 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n$$

où $\mathbf{e}_i$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la j^{e} composante vaut 0 si $i \neq j$, et vaut 1 si $i = j$; en d'autres termes

$$(e_i)_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 3.32. Attention, ici $\mathbf{e}_1$ et ses compagnons ne sont pas les composantes d'un hypothétique vecteur e , mais des vecteurs eux-mêmes ! Pour l'exemple, x_1 et $\mathbf{e}_1$ ont donc des rôles fondamentalement différents : le premier est un nombre réel (ou "scalaire"), le second est un vecteur. ┘

Définition 3.33. Si $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ sont des vecteurs et $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des nombres réels, une **combinaison linéaire** de ceux-ci est une somme de la forme $\lambda_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{u}_k$. ┘

Remarque 3.34. On peut paraphraser la proposition précédente sous la forme :

tout vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. ┘

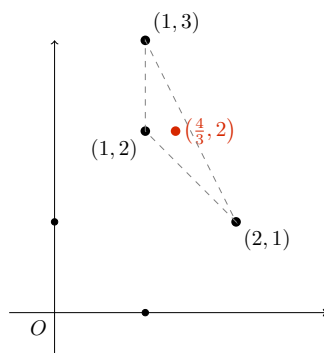


FIGURE 3.10 – Centre de gravité

3.3.1 Centre de gravité

Le milieu d'un segment d'un point $\mathbf{a}$ jusqu'à un $\mathbf{b}$ est donné par :

$$\mathbf{a} + \frac{1}{2}\vec{ab} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

Définition 3.35. Si on considère des points $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_k$ dans $\mathbb{R}^n$, leur **milieu** ou **centre de gravité** est :

$$\frac{1}{k} \sum_i \mathbf{P}_i.$$

┘

On a donc le suivant.

Proposition 3.36. Chaque coordonnée du centre de gravité $\mathbf{g}$ est la moyenne des coordonnées des a_i .

┘

Exemple 3.37. Le centre de gravité de $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$ est l'origine.

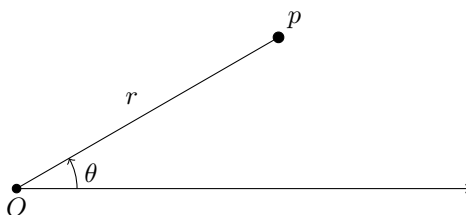
┘

Exemple 3.38. Le centre de gravité des points $(1, 2), (1, 3), (2, 1)$ est $(\frac{4}{3}, 2)$. Voir Figure 3.10.

┘

3.4 Autres systèmes de coordonnées

Jusqu'à présent, on a décrit les points du plan et de l'espace en utilisant des **coordonnées cartésiennes**, c'est-à-dire des paires ou triples de nombres réels

FIGURE 3.11 – Coordonnées polaires (r, θ) du point p .

représentant les projections parallèles dans un repère orthonormé.

Ils existent d'autres **systèmes de coordonnées** pour décrire ses espaces.

3.4.1 Coordonnées polaires de $\mathbb{R}^2$

Pour définir ces coordonnées, on fixe

1. un point du plan O , l'**origine** ou **pôle** ;
2. un **axe polaire** : une demi-droite issue de ce point.

Définition 3.39. Soit p un point du plan. Ses **coordonnées polaires** sont donnés par un couple (r, θ) où

- * r est le **rayon** : la distance entre O et P . On a donc que $r \in \mathbb{R}^+$;
- * θ est **angle polaire** : l'angle orienté entre la demi-droite fixée et la demi-droite issue de O et passant par p . On peut donc prendre $\theta \in [0, 2\pi[$

┘

Un point p du plan peut donc être situé en utilisant des coordonnées cartésiennes (x, y) ou des coordonnées polaires (r, θ) . Par convention, on fait coïncider l'axe polaire des coordonnées polaires avec l'axe des abscisses des coordonnées cartésiennes. On a alors clairement (voir Figure 3.12) que

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta) & r &= \sqrt{x^2 + y^2}. \\ y &= r \sin(\theta) \end{aligned}$$

On peut aussi obtenir la valeur de ϕ en fonction de x et y en utilisant la fonction arctan. Par exemple quand $x > 0$ et $y > 0$ on a $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Il faut faire un peu attention dans les autres cas, quand $x = 0$ ou $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ donne un angle négatif, mais cela se résout en faisant un petit **exercice** de trigonométrie.

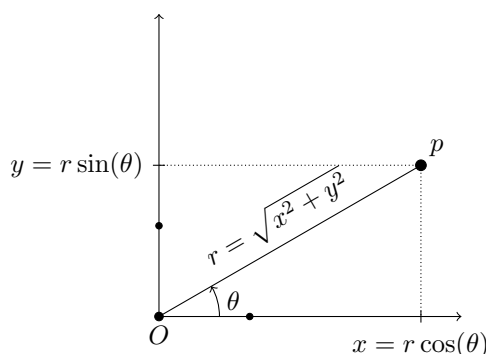


FIGURE 3.12 – Relations entre coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes.

3.4.2 Coordonnées cylindriques de $\mathbb{R}^3$

Pour ces coordonnées on fixe :

1. un point de l'espace O , l'**origine** ou le **pôle** ;
2. une demi-droite (**axe polaire**) issue de ce point O . On appellera le plan passant par O et cette demi-droite le **plan de référence** ou **plan horizontale** ;
3. une droite *orienté* passant par le point O , perpendiculaire au plan horizontal. C'est l'**axe cylindrique**.

Avec ces repères on peut définir le système de coordonnées suivant.

Définition 3.40. Soit p un point de l'espace. On note p' la projection de p sur le plan horizontal, parallèlement à l'axe cylindrique. Ses **coordonnées cylindriques** sont données par un triple (ρ, ϕ, z) où

1. ρ est la distance entre p' et O . On a $\rho \in \mathbb{R}^+$;
2. z est la **hauteur** : le réel obtenu sur l'axe vertical en projetant p sur cet axe, parallèlement au plan horizontal. On a $z \in \mathbb{R}$;
3. ϕ est l'**azimut** : l'angle orienté entre l'axe polaire et la demi-droite issue de O passant par p' . On prend $\phi \in [0, 2\pi[$.

┘

Remarque 3.41. Les coordonnées cylindriques sont en fait des coordonnées polaires dans le plan horizontal, auquel on a “rajouté” une dimension : la hauteur, encodé par la coordonnée z .

┘

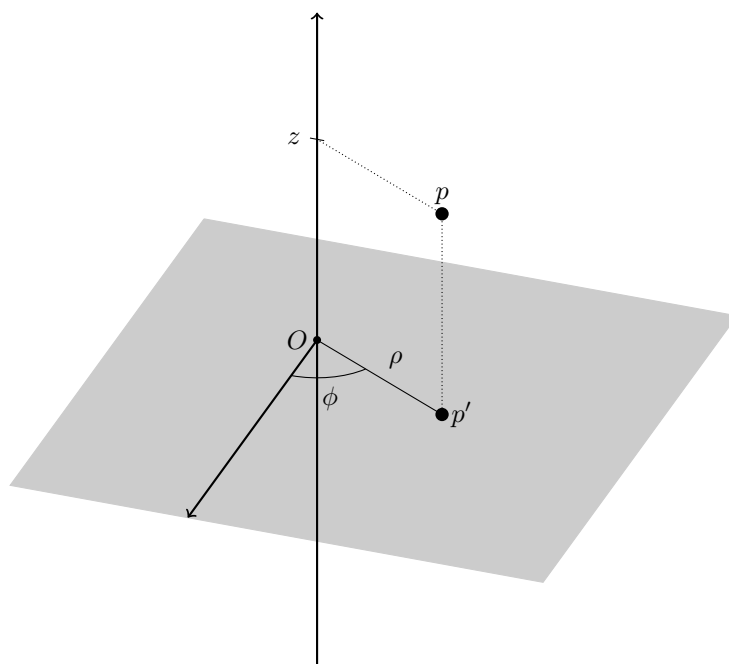


FIGURE 3.13 – Coordonnées cylindriques

Pour passer des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes, on utilise la convention de faire coïncider les axes polaires et cylindrique des coordonnées cylindriques avec l'axe des x et l'axe des z des coordonnées cartésiennes, respectivement. Alors, si p est un point de coordonnées cylindriques $(\rho, \phi, z_{\text{cyl}})$ et de coordonnées cartésiennes (x, y, z_{cart}) alors on a

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\phi) & \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= \rho \sin(\phi) \\ z_{\text{cart}} &= z_{\text{cyl}} \end{aligned}$$

De la même manière que pour les coordonnées polaires, ϕ se déduit de x et y .

Exemple 3.42. Le point de coordonnées cartésiennes $(0, 1, 1)$ a coordonnées cylindriques $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}, 1)$. ┘

Remarque 3.43. Le nom de ces coordonnées vient du fait qu'elles se prêtent très bien à définir des cylindres. En effet, un cylindre de rayon 1 sont les points de l'espace tels que $\rho = 1$. ┘

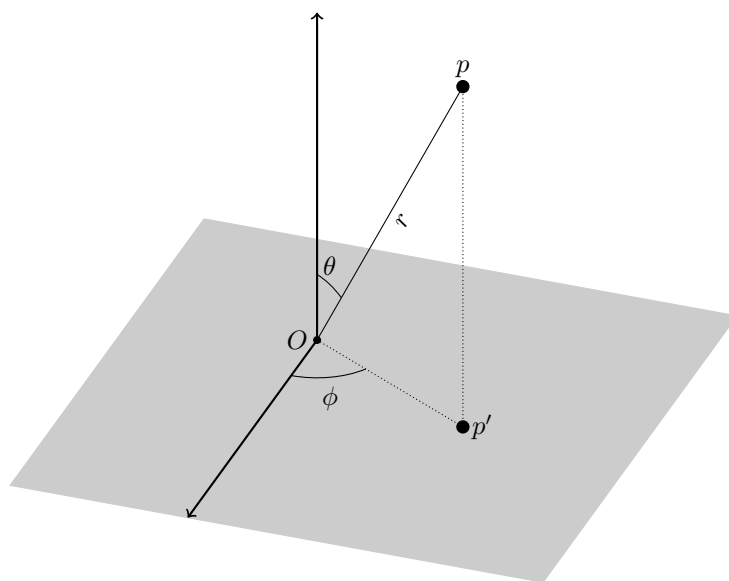


FIGURE 3.14 – Coordonnées sphériques

3.4.3 Coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$

Pour ces coordonnées on fixe :

1. un point de l'espace O , l'**origine** ou le **pôle** ;
2. une demi-droite issue de ce point O , l'**axe polaire** ; que nous dessinons *verticalement* ;
3. une deuxième demi-droite issue du point O , qui se trouve dans le plan **horizontal** : le plan perpendiculaire à l'axe polaire et passant par O .

! Attention Dans les coordonnées cylindriques, l'axe polaire est dans le plan horizontal, mais dans les coordonnées sphériques l'axe polaire est perpendiculaire à ce plan. **!**

Avec ces repères on peut définir le système de coordonnées suivant.

Définition 3.44. Soit p un point de l'espace. On note p' la projection de p sur le plan de référence, parallèlement à l'axe cylindrique. Ses **coordonnées sphériques** sont données par un triple (r, ϕ, θ) où

1. r est le **rayon** : la distance entre p et O . On a $r \in \mathbb{R}^+$;
2. θ est l'**angle polaire** : l'angle *non orienté* entre la demi-droite issue de O et passant par p et l'axe polaire. On prend $\theta \in [0, \pi]$;

3. ϕ est l'**azimut** : l'angle orienté entre l'axe dans le plan horizontal et la demi-droite issue de O passant par p' . On prend $\phi \in [0, 2\pi[$.

┘

Remarque 3.45. La raison pour laquelle on considère l'angle polaire dans $[0, \pi]$ est pour éviter des redondances dans notre système de coordonnées (on veut créer une bijection entre points de l'espace et coordonnées). En effet, si on considère le point de coordonnées cartésiennes $(1, 0, 0)$, alors il y a en fait deux angles avec l'axe polaire : $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. On décide donc de considérer le plus petit angle. Ce point a donc les coordonnées sphériques $(1, 0, \frac{\pi}{2})$.

┘

Pour passer des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes, on utilise la convention de faire coïncider l'axe polaire et l'axe horizontale des coordonnées sphériques avec l'axe des z et l'axe des x des coordonnées cartésiennes, respectivement. On prend l'axe des y comme ayant angle azimutal $\frac{\pi}{2}$. Alors si p est un point de coordonnées sphériques (r, ϕ, θ) et de coordonnées cartésiennes (x, y, z) alors on a

$$\begin{aligned} x &= r \sin(\theta) \cos(\phi) & \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ y &= r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z &= r \cos(\theta) \end{aligned}$$

En faisant un peu de trigonométrie, il est possible de déduire θ et ϕ de x, y, z . Nous ne donnons pas les détails ici.

Remarque 3.46. Le nom de ces coordonnées vient du fait qu'elles se prêtent très bien à définir des sphères. En effet, une sphere de rayon 1 sont les points de l'espace tels que $r = 1$.

┘

3.5 Produit scalaire

Définition 3.47. Le **produit scalaire** entre deux vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ de $\mathbb{R}^n$ est donné par

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n.$$

┘

Exemple 3.48. Dans $\mathbb{R}^3$, le produit scalaire entre les vecteurs $(1, -2, 3)$ et $(2, -2, 0)$ est donné par :

$$(1, -2, 3) \cdot (2, -2, 0) = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot 0 = 6.$$

┘

Proposition 3.49. Pour tous vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, le produit scalaire vérifie les propriétés suivantes :

1. $(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}') \cdot \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mu \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}$ (linéaire à gauche)
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (symétrique)
3. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ et de plus, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$ (défini positif).

┘

Notons que les deux premières propriétés montrent qu'il y a également linéarité à droite ; on dit alors que le produit scalaire est **bilinéaire**.

On vérifie facilement la relation suivante entre la norme d'un vecteur et son produit scalaire avec lui-même.

Proposition 3.50. Soit $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$

┘

Proposition 3.51 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Pour tout $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^n$, on a

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$

┘

Preuve. Considérons la quantité $(\mathbf{a} + t\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + t\mathbf{b})$, qui est positive. Nous pou-

vons la ré-écrire via la bilinéarité du produit scalaire sous la forme :

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + t\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + t\mathbf{b}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2t \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + t^2 \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\&= \|\mathbf{a}\|^2 + 2t \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + t^2 \|\mathbf{b}\|^2 \\&= \left(t\|\mathbf{b}\| + \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} \right)^2 - \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} \right)^2 + \|\mathbf{a}\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

Prenons maintenant $t = -\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2}$, ce qui annule la première parenthèse, et fournit donc

$$\|\mathbf{a}\|^2 \geq \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} \right)^2$$

d'où (puisque $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \geq 0$)

$$\|\mathbf{a}\| \geq \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{\|\mathbf{b}\|}$$

qui est l'inégalité annoncée. □

Proposition 3.52. La norme $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :

- * $\|\mathbf{a}\| = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$;
- * $\|\lambda\mathbf{a}\| = |\lambda| \|\mathbf{a}\|$;
- * $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$ (inégalité triangulaire).

┘

Preuve. Les deux premières propriétés sont évidentes de la définition de la norme et les propriétés du produit scalaire. La troisième se démontre en développant et en utilisant la linéarité :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\&= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + 2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + 2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \\&= (\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)^2\end{aligned}$$

□

Proposition 3.53. Si $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$, alors

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \cos(\theta)$$

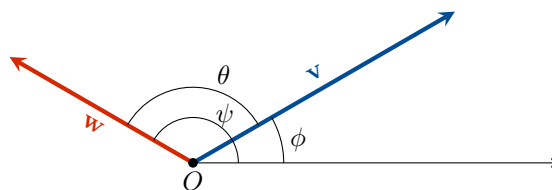


FIGURE 3.15 – Preuve de Proposition 3.53

où θ est l'angle formé par les vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$. ┘

Preuve. Voir Figure 3.15. On écrit les vecteurs en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (\|\mathbf{v}\| \cos(\phi), \|\mathbf{v}\| \sin(\phi)) \\ \mathbf{w} &= (\|\mathbf{w}\| \cos(\psi), \|\mathbf{w}\| \sin(\psi)).\end{aligned}$$

Alors on a

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| (\cos(\phi) \cos(\psi) + \sin(\phi) \sin(\psi)) = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos(\psi - \phi)$$

où $\psi - \phi$ représente bien l'angle entre les deux vecteurs. □

Le résultat précédent motive la définition suivante.

Définition 3.54. Soient $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Alors l'**angle** entre ces deux vecteurs est défini comme étant l'unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|}$$

Remarque 3.55. Le produit scalaire entre deux vecteurs non-nuls s'annule si et seulement si les vecteurs sont orthogonaux. ┘

Preuve. Si les vecteurs ne sont pas nuls, alors leur norme n'est pas nulle, dès lors seul le cosinus peut s'annuler, ce qui n'arrive que pour des angles droits. □

Proposition 3.56. Si $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\mathbf{w}' = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

est le **projeté** ou **projection orthogonale** de $\mathbf{w}$ sur la droite engendrée² par

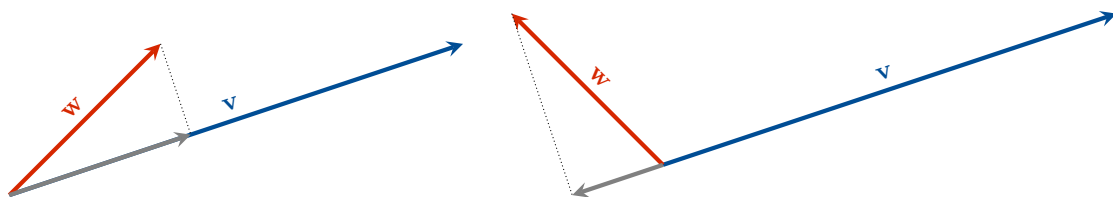


FIGURE 3.16 – Deux illustrations de la projection orthogonale de $\mathbf{w}$ sur la droite engendrée par $\mathbf{v}$.

$\mathbf{v}$.

Preuve. Le fait que $\mathbf{w}'$ est sur la droite engendrée par $\mathbf{v}$ est évident, puisqu'il en est un multiple par construction (rappelez-vous que $\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$ est un réel!).

Quelle est la condition pour que $\mathbf{w}' = \lambda \mathbf{v}$ soit le projeté de $\mathbf{w}$? Il faut que le triangle formé par $\mathbf{w}$, $\mathbf{w}'$ et leur origine soit rectangle en $\mathbf{w}'$. C'est-à-dire, il faut

$$\|\mathbf{w}'\|^2 + \|\mathbf{w} - \mathbf{w}'\|^2 = \|\mathbf{w}\|^2$$

ce qu'on réécrit

$$\lambda^2 \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + \lambda^2 \|\mathbf{v}\|^2 - 2\lambda \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{w}\|^2$$

Donc on peut prendre

$$\lambda = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|^2}$$

ce que nous voulions observer. □

Corollaire 3.57. Si $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont deux vecteurs, leur produit scalaire est donné par :

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}'\|$$

où $\mathbf{w}'$ est le projeté de $\mathbf{w}$ sur $\mathbf{v}$. □

Preuve. Il suffit de calculer le membre de droite grâce au résultat précédent. □

2. C'est-à-dire, la droite de vecteur directeur $\mathbf{v}$ passant par l'origine.

3.6 Produit vectoriel

Nous allons définir un produit entre deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$. Il est appelé “produit vectoriel” car son résultat est un vecteur. La définition que nous allons former n'aura pas de sens dans $\mathbb{R}^n$ pour des valeurs $n \neq 3$.

Définition 3.58. Si $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, on définit leur **produit vectoriel**

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Le produit vectoriel est donc une fonction

$$\cdot \times \cdot : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

┘

Exemple 3.59. On a

$$\begin{aligned} (1, 0, 1) \times (0, -2, 1) &= (0 \cdot 1 - 1 \cdot (-2), 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot (-2) - 0 \cdot 0) \\ &= (2, -1, -2). \end{aligned}$$

┘

Proposition 3.60. Le produit vectoriel vérifie les identités suivantes :

- * $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ et $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$;
- * $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 + |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2$;
- * $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta$;
- * $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (anti-symétrique) ;
- * $(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \beta \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$, et où θ est l'angle formé par les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$.

┘

Preuve. Tous ces points se prouvent à partir de la définition. Les calculs sont laissés comme exercice.

Mentionnons tout de même que dans l'égalité $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta$, le sinus est toujours positif car l'angle θ est, par définition, entre 0 et π . □

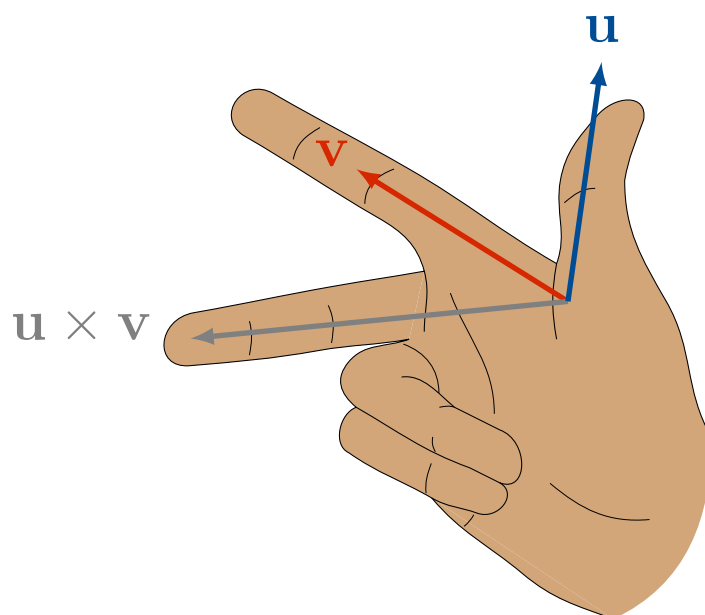


FIGURE 3.17 – Un trièdre orienté positivement selon la règle de la main droite.

Remarque 3.61. Le produit vectoriel est d'importance fondamentale en mécanique classique. Il sert par exemple à définir la notion de moment d'une force, qui sert à mesurer la manière dont cette force fait tourner le système mécanique considéré autour d'un point donné. $\lrcorner$

3.6.1 Trièdres orientés

Définition 3.62. Un trièdre orienté est la donnée d'une séquence de trois vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, tous issus d'un même point $\mathbf{p}$. L'ordre a ici son importance. $\lrcorner$

Considérant votre main droite, si $\mathbf{p}$ représente votre poignet, $\mathbf{u}$ votre pouce et $\mathbf{v}$ votre index, on dira que le trièdre est droit (ou “orienté positivement”) si le vecteur $\mathbf{w}$ est du même côté du plan engendré par les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ que votre majeur. Dans le cas contraire, le trièdre n'est pas droit (parfois “gauche”). Voir Figure 3.17.

Nous imposerons désormais toujours que les axes de coordonnées forment un trièdre droit, c'est-à-dire le trièdre basé en l'origine formé des vecteurs de base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, dans cet ordre (voir Remarque 3.4). De la sorte, nous pouvons énoncer

le résultat suivant :

Proposition 3.63. Le trièdre formé de vecteurs $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ et $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ est un trièdre droit. ┘

3.7 Équations

Dans $\mathbb{R}^n$, il existe deux manières classiques de décrire des sous-ensembles. Les équations paramétriques et les équations cartésiennes.

Définition 3.64. Une ou plusieurs **équations cartésiennes** donnent un ensemble de conditions sur les coordonnées cartésiennes d'un point : (x, y) du plan ou (x, y, z) de l'espace (ou de manière générale sur le point $(p_1, \dots, p_n)$ de $\mathbb{R}^n$). Lorsque le point vérifie la ou les conditions, il est dans l'ensemble ; sinon il n'y est pas. Les coordonnées du point sont appelées les *inconnues* de l'équation (ou des équations) cartésienne(s). On dit parfois que l'ensemble est donné sous forme **implicite**. ┘

Exemple 3.65. Dans le plan, l'équation $x^2 + y^2 = 4$ est une équation cartésienne pour le cercle centré en l'origine de rayon 2. Le point $(0, 2)$ et le point $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont dans cet ensemble, mais $(0, 0)$ ou $(1, 1)$ n'y sont pas, car ils ne sont pas solution de l'équation.

Dans l'espace, la même équation $x^2 + y^2 = 4$ est une équation cartésienne pour le *cylindre* centré autour de l'axe des z et de rayon 2. ┘

Contrairement aux équations cartésiennes, qui partent d'un point (x, y) inconnu et y imposent des conditions pour être dans l'ensemble, les **équations paramétriques** décrivent explicitement chacun des points de l'ensemble en fonction de certains paramètres (qui peuvent varier). Dans $\mathbb{R}^n$, il y a toujours n équations paramétriques : une pour chacune des coordonnées.

Exemple 3.66. Par exemple $x = 2 \cos(t)$ et $y = 2 \sin(t)$ sont des équations paramétriques (de paramètre t) du cercle de rayon 2 centré en l'origine. Ici, le paramètre t doit varier au minimum dans $[0, 2\pi[$ pour pouvoir décrire tout le cercle, mais peut varier dans un ensemble plus grand : le cercle sera alors “parcouru” plusieurs fois, mais cela importe peu. Si t varie dans un ensemble plus petit, l'ensemble décrit sera alors simplement une partie du cercle. ┘

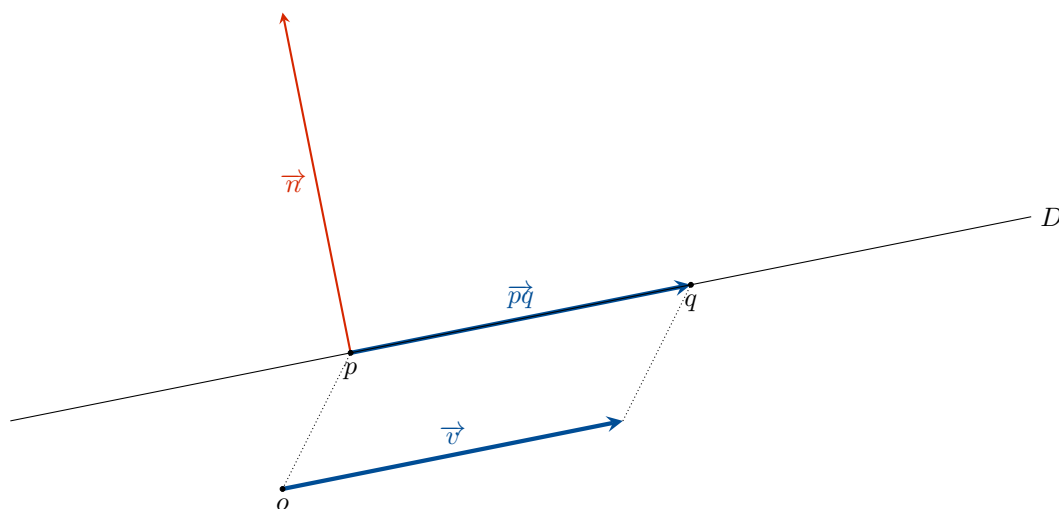


FIGURE 3.18 – Une droite D passant par les points p et q , de vecteur directeur $\vec{v} = \vec{pq}$ et vecteur normal $\vec{n}$.

3.7.1 Droites dans le plan

Toute droite dans $\mathbb{R}^n$ est caractérisée par deux points ou, de manière équivalente, par un point et une direction (la direction étant donné par la différence des deux points). Une droite, dans $\mathbb{R}^n$, est donc un ensemble de la forme

$$\{ \mathbf{p} + t\mathbf{v} \text{ tel que } t \in \mathbb{R} \}$$

où le point $\mathbf{p}$ et le vecteur $\mathbf{v}$ sont des éléments de $\mathbb{R}^n$ donnés, avec $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Alors $\mathbf{p}$ est un point par lequel passe la droite et $\mathbf{v}$ est une direction de cette droite. $\mathbf{v}$ est appelé un **vecteur directeur** de la droite. Voir Figure 3.5. Un **vecteur normal** est un vecteur qui est perpendiculaire aux vecteurs directeurs de la droite.

Remarque 3.67. Le point $\mathbf{p}$ et le vecteur $\mathbf{v}$ ne sont pas uniques : prendre $\mathbf{p} + \mathbf{v}$ au lieu de $\mathbf{p}$ et $3\mathbf{v}$ au lieu de $\mathbf{v}$ donneraient la même droite. ┘

Définition 3.68. Deux droites de $\mathbb{R}^n$, de vecteurs directeurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ respectivement, sont dites **parallèles** s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$. ┘

Concentrons-nous maintenant sur les droites dans le plan. Dans $\mathbb{R}^2$, une droite est donc un l'ensemble

$$\{ (p_1, p_2) + t(u, v) \text{ tel que } t \in \mathbb{R} \}$$

où p_1, p_2, u, v sont des réels fixés. On a donc le suivant.

Proposition 3.69. Une droite passant par (p_1, p_2) et de vecteur directeur (u, v) est l'ensemble de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = p_1 + tu \\ y = p_2 + tv \end{cases}$$

pour une certaine valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$. ┘

Comment trouver l'équation cartésienne ? Il est possible de partir des équations paramétriques et de raisonner algébriquement pour faire disparaître le paramètre t .

Exemple 3.70. Si on considère la droite de vecteur directeur $(1, -1)$ passant par $(0, 2)$, ses équations paramétriques sont données par

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t. \end{cases}$$

Alors on a que $t = x$ et $t = 2 - y$. L'équation cartésienne de la droite est donné par $x = 2 - y$, ou encore $x + y = 2$. ┘

Une autre façon d'appréhender l'équation cartésienne d'une droite est en utilisant un *vecteur normal*.

Considérons une droite passant par $\mathbf{p}$ et perpendiculaire au vecteur $\mathbf{n}$, c'est-à-dire $\mathbf{n}$ est un vecteur normal. Un point $\mathbf{r}$ appartient à la droite si et seulement si $\mathbf{r} - \mathbf{p} \perp \mathbf{n}$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{p}) = 0$. En d'autres termes (en notant $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, $\mathbf{n} = (\alpha, \beta)$) si

$$\alpha(x - p_1) + \beta(y - p_2) = 0.$$

On a donc établi le résultat suivant.

Proposition 3.71. La droite de $\mathbb{R}^2$ de vecteur normal (α, β) , passant par (p_1, p_2) a comme équation cartésienne

$$\alpha(x - p_1) + \beta(y - p_2) = 0$$

┘

Cette équation est donc de la forme $\alpha x + \beta y = \delta$ (avec $\delta = \alpha p_1 + \beta p_2$). Le résultat suivant nous dit que toute équation de cette forme définit une droite.

Corollaire 3.72. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Alors l'ensemble des points (x, y) satisfaisant l'équation

$$\alpha x + \beta y = \delta$$

est une droite de vecteur normal (α, β) .

┘

Preuve. On distingue deux cas.

* Si $\alpha \neq 0$, l'équation est équivalente à

$$\alpha \left(x - \frac{\delta}{\alpha} \right) + \beta y = 0.$$

Par Proposition 3.71, c'est la droite de vecteur normal (α, β) passant par $(\frac{\delta}{\alpha}, 0)$.

* Si $\alpha = 0$, alors $\beta \neq 0$. L'équation est alors équivalente à

$$\beta \left(y - \frac{\delta}{\beta} \right) = 0.$$

C'est la droite de vecteur normal $(0, \beta)$ passant par $(0, \frac{\delta}{\beta})$.

□

Les équations paramétriques et l'équation cartésienne sont alors liés de la façon suivante. Il est facile de voir que si (u, v) est un vecteur directeur d'une droite D , alors $(v, -u)$ est un vecteur normal de D (car $(u, v) \cdot (v, -u) = 0$). Par Proposition 3.71 on peut déduire le suivant.

Proposition 3.73. Soit D la droite de vecteur directeur (u, v) , passant par le point (p_1, p_2) . Alors D a comme équation cartésienne

$$v(x - p_1) - u(y - p_2) = 0.$$

┘

Ce résultat nous permet donc d'établir le lien suivant.

Proposition 3.74. Pour tout $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ avec $(u, v) \neq (0, 0)$,

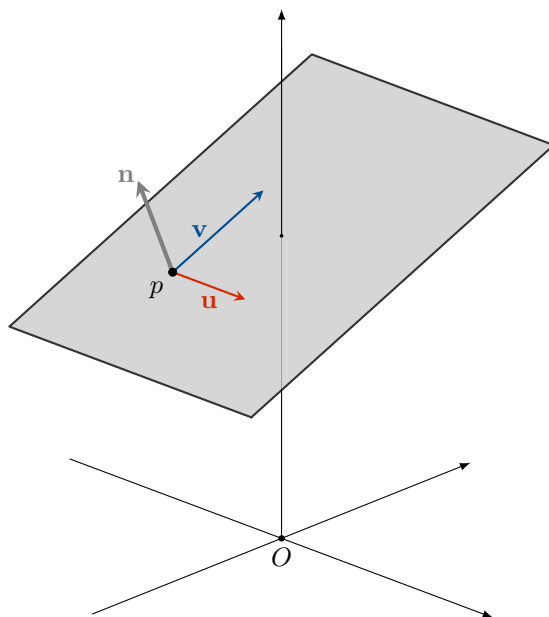


FIGURE 3.19 – Plan passant par p de vecteurs directeurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ et vecteur normal $\mathbf{n}$.

nous avons

$$\{(x, y) \text{ tel que } v(x - p_1) - u(y - p_2) = 0\} = \{(p_1, p_2) + t(u, v) \text{ tel que } t \in \mathbb{R}\}.$$

┘

Exercice. Si $p = (a, b)$ et $q = (c, d)$ sont deux points du plan, montrer que la droite

$$x = a + t(c - a), y = b + t(d - b)$$

passé par ces deux points. Quel est un vecteur directeur $\mathbf{v}$?

┘

3.7.2 Plans dans l'espace

Un plan dans $\mathbb{R}^3$ est donné par un point $\mathbf{p}$ et deux directions : $\mathbf{v}, \mathbf{w}$. Ses équations paramétriques sont alors

$$\{\mathbf{p} + \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w} \text{ tel que } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

avec la condition que $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ ne soient pas multiple l'un de l'autre (sinon on obtient une droite). On appelle $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ **vecteurs directeurs** du plan. Un **vecteur normal** à un plan est un vecteur qui est perpendiculaire à tous ses vecteurs directeurs.

Les équations paramétriques sont explicitement données par

$$\begin{cases} x = p_1 + tu_1 + sv_1 \\ y = p_2 + tu_2 + sv_2 \\ z = p_3 + tu_3 + sv_3 \end{cases}$$

où $t, s \in \mathbb{R}$ sont les deux paramètres de ces équations paramétriques (en d'autres termes : lorsqu'ils varient dans $\mathbb{R}$, ils permettent de décrire tous les points du plan considéré).

Pour trouver l'équation cartésienne de d'un plan à partir des équations paramétriques il est à nouveau possible d'éliminer les paramètres t et s du système d'équations.

Exemple 3.75. Le plan d'équations

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t + s \end{cases}$$

se réécrit sous forme cartésienne : $x = 1$. ┘

Exercice. Le plan d'équations $(x, y, z) = (t, s, s + t - 2)$ se réécrit sous forme cartésienne : $x + y - z = 2$. ┘

On peut aussi trouver l'équation cartésienne en utilisant un vecteur normal. Soit E un plan dans $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{p}$ un point de E et soit $\mathbf{n}$ un vecteur perpendiculaire à ce plan. Un point $\mathbf{r}$ de $\mathbb{R}^3$ appartient à E si et seulement si $\mathbf{r} - \mathbf{p} \perp \mathbf{n}$, c'est-à-dire si $\mathbf{r} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = 0$. À nouveau, en écrivant $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ et $\mathbf{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$, nous réécrivons cette équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3.$$

Proposition 3.76. Le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteur normal (α, β, γ) , passant par (p_1, p_2, p_3)

a comme équation cartésienne

$$\alpha(x - p_1) + \beta(y - p_2) + \gamma(z - p_3) = 0$$

┘

Corollaire 3.77. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$. Alors l'ensemble des points (x, y, z) satisfaisant l'équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

est un plan de vecteur normal (α, β, γ) .

┘

La preuve est analogue à la preuve du Corollaire 3.72.

Les équations paramétriques et l'équation cartésienne sont alors liés de la façon suivante. Si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont des vecteurs directeurs d'un plan, alors par Proposition 3.60, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ est un vecteur normal à ce plan.

Proposition 3.78. Soit P le plan de vecteurs directeurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ passant par $\mathbf{p}$. Alors D a comme équation cartésienne

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot ((x, y, z) - \mathbf{p}) = 0$$

┘

Terminons cette section en définissant la notion de parallélisme entre plans.

Définition 3.79. Deux plans

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

et

$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \delta'$$

sont dites **parallèles** si et seulement si leurs vecteurs normaux sont multiples l'un de l'autre. C'est-à-dire, il existe un $t \in \mathbb{R}$ tel que $(\alpha, \beta, \gamma) = t(\alpha', \beta', \gamma')$.

┘

3.7.3 Droites dans l'espace

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, les équations paramétriques (de paramètre t) sont données par

$$\begin{cases} x = p_1 + tu \\ y = p_2 + tv \\ z = p_3 + tw. \end{cases}$$

Cette fois, en résolvant pour t , il n'est pas possible de se ramener à une seule équation : il restera toujours deux équations cartésiennes. Ceci s'explique bien, car une équation de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ définit un plan, donc on a besoin de deux plans pour définir une droite comme étant l'intersection des deux plans.

Exemple 3.80. Considérons la droite de vecteur directeur $(1, -1, -2)$ et passant par $(1, 0, -2)$:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = -2 - t \end{cases}$$

pour $t \in \mathbb{R}$. Alors on a $t = x - 1$, $t = -y$ et $t = z + 2$. Ceci est équivalent au système

$$\begin{cases} x - 1 = -y \\ -y = z + 1 \end{cases}.$$

Ce sont des équations cartésiennes de la droite. ┘

Une autre façon de faire c'est de choisir deux vecteurs, non colinéaires, et perpendiculaires au vecteur directeur (u, v, w) . On peut toujours prendre $(v, -u, 0)$ et $(0, w, -v)$ (mais il y a une infinité de choix possibles). On trouve alors des équations cartésiennes de la droite de vecteur directeur (u, v, w) passant par (p_1, p_2, p_3) :

$$\begin{cases} v(x - p_1) - u(y - p_2) = 0 \\ w(y - p_2) - v(z - p_3) = 0. \end{cases}$$

C'est-à-dire, la droite est l'ensemble des points (x, y, z) qui satisfait ces deux équations en même temps. C'est l'intersection du plan défini par la première équation

et le plan défini par la deuxième équation.

3.7.4 Équations de cercles

Définition 3.81. Un **cercle** est l'ensemble des points d'un plan à distance (**rayon**) donnée d'un centre. ┘

Par Remarque 3.27, on sait que la distance entre deux points $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ et $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ est donnée par

$$\sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2};$$

dès lors le cercle centré en (x_0, y_0) de rayon r du plan est donné par l'équation

$$\{ (x, y) \text{ tel que } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \}.$$

On peut également donner des équations paramétriques sous la forme :

$$x = x_0 + r \cos(t)$$

$$y = y_0 + r \sin(t)$$

où t est le paramètre. Ici $t \in \mathbb{R}$ ou, plus simplement, $t \in [0, 2\pi[$

3.7.5 Cylindres

L'équation cartésienne d'un cylindre ressemble à celle d'un cercle dans le plan ; par exemple pour un cylindre dont l'axe est la droite parallèle à l'axe des “ z ” et passant par $(x_0, y_0, 0)$:

$$\{ (x, y, z) \text{ tel que } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \}$$

On peut également donner des équations paramétriques sous la forme :

$$x = x_0 + R \cos(t)$$

$$y = y_0 + R \sin(t)$$

$$z = u$$

où t, u sont les paramètres ; $t \in [0, 2\pi[$ et $u \in \mathbb{R}$.

3.7.6 Sphères

De même que pour un cercle dans le plan, la sphère est l'ensemble des points à distance R fixée d'un centre (x_0, y_0, z_0) fixé :

$$\{ (x, y, z) \text{ tel que } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \}.$$

Une version paramétrique classique est

$$x = x_0 + R \cos \varphi \sin \theta$$

$$y = y_0 + R \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = z_0 + R \cos \theta$$

où φ est l'angle dans le plan des coordonnées xy (angle avec $(1, 0, 0)$) et θ est la colatitude (angle avec $(0, 0, 1)$). Les paramètres sont ici $\varphi \in [0, 2\pi[$ et $\theta \in [0, \pi]$.

3.8 Interprétations géométriques

3.8.1 Aires et volumes

Nous savons déjà que le produit scalaire ainsi que le produit vectoriel de deux vecteurs sont liés à la norme ainsi qu'à l'angle entre les deux vecteurs choisis.

Dans le résultat 3.57 page 78, nous avons noté que le produit scalaire d'un vecteur $\mathbf{v}$ avec un vecteur unitaire est égal à la longueur de la projection de $\mathbf{v}$ sur ce vecteur unitaire. Nous allons généraliser aux aires et volumes.

Proposition 3.82. Dans $\mathbb{R}^3$, la norme $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ est égale à l'aire du parallélogramme construit sur $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$. ┘

Preuve. En effet, projetons $\mathbf{a}$ sur $\mathbf{b}$, ce qui donne $\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b}$ comme précédemment. Alors $\mathbf{a} - \mathbf{a}'$ représente la hauteur du parallélogramme considéré, de sorte que son aire est $\|\mathbf{a} - \mathbf{a}'\| \cdot \|\mathbf{b}\|$. Un calcul direct montre que le carré de cette norme vaut

$$\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

ce qui est le carré de la norme du produit vectoriel, comme nous l'avions vu auparavant. $\square$

Enfin, un résultat similaire peut encore se prouver pour les volumes de parallélépipèdes :

Proposition 3.83. Dans $\mathbb{R}^3$, le **produit mixte** $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ représente, en valeur absolue, le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. $\lrcorner$

3.8.2 Angles

Définition 3.84. L'angle entre deux droites est donné par l'angle entre leurs vecteurs directeurs. $\lrcorner$

Remarque 3.85. Dans le plan, on peut également utiliser les vecteurs normaux. $\lrcorner$

Définition 3.86. L'angle entre deux plans de l'espace est donné par l'angle entre leurs vecteurs normaux. $\lrcorner$

Définition 3.87. L'angle entre une droite et un plan de l'espace est donné par l'angle entre cette droite et sa projection orthogonale sur le plan. $\lrcorner$

Remarque 3.88. Deux droites/plans sont alors parallèles, si l'angle entre eux vaut 0 et **perpendiculaires** si l'angle vaut $\frac{\pi}{2}$. $\lrcorner$

3.8.3 Distances

Nous savons que la distance entre deux points $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ est la norme $\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|$. Notons $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ cette quantité.

Définition 3.89. La **distance** entre deux sous ensembles $E, F \subset \mathbb{R}^n$ est donnée par

$$\min\{d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \text{ tel que } \mathbf{p} \in E, \mathbf{q} \in F\}.$$

C'est donc la plus petite distance possible entre deux points quelconques de ces ensembles. Elle peut être nulle, par exemple si $E \cap F$ n'est pas vide.

Proposition 3.90. Considérons un point $\mathbf{p}$ et une droite d , passant par $\mathbf{q}$ et de vecteur directeur $\mathbf{v}$. Alors le point sur d de distance minimale à $\mathbf{p}$ est donné par la

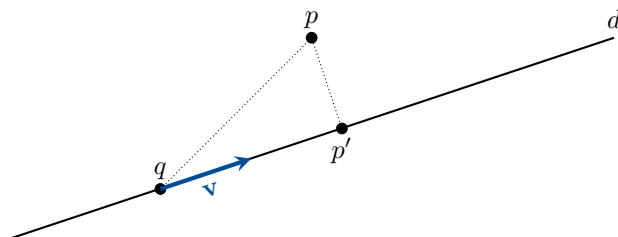


FIGURE 3.20 – La projection orthogonale d'un point p sur une droite d passant par q et de vecteur directeur v .

projection parallèle de p sur d ,

$$\mathbf{p}' := \mathbf{q} + \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}.$$

La distance entre le point $\mathbf{p}$ et d est donc donnée par $\|\mathbf{pp}'\|$ qui est égal à

$$\sqrt{\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|^2 - \frac{((\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{v}\|^2}}.$$

┘

Voir Figure 3.20.

Preuve. Il suit directement de Proposition 3.56 que $\mathbf{p}'$ est la projection orthogonale de $\mathbf{p}$ sur d . Il est clair que c'est le point qui minimise la distance de $\mathbf{p}$ à d , car tout autre point $\mathbf{r}$ sur d forme alors un triangle rectangle $\mathbf{pp}'\mathbf{r}$, et l'hypoténuse d'un triangle est toujours plus long que ses côtés rectangle (par Pythagore).

Vu que $qp'p$ forme un triangle rectangle en p' on a que la distance de p à d est donnée, en utilisant le théorème de Pythagore, par

$$\|\mathbf{pp}'\| = \sqrt{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^2 - \|\mathbf{p}' - \mathbf{q}\|^2}$$

et le résultat suit. □

Proposition 3.91. La distance entre le point $\mathbf{p}$ et le plan de vecteur normal $\mathbf{w}$ passant par $\mathbf{q}$ est donnée par

$$\frac{|\mathbf{w} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q})|}{\|\mathbf{w}\|}.$$

┘

Preuve. Le vecteur

$$\frac{\mathbf{w} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q})}{\|\mathbf{w}\|^2} \mathbf{w}$$

est le projeté de $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ sur la droite normale au plan, dès lors sa longueur est la distance recherchée. □

CHAPITRE 4

Fonctions

La notion de fonction est très générale : elle permet de représenter toute forme d’association ou de transformation. Ceci permet d’unir sous un même drapeau des champs d’intérêt très variés. En contrepartie, il est difficile d’établir des résultats concernant *toutes* les fonctions, car les “comportements” (quoique cela veuille dire) de ces fonctions sont à ce point variés. Nous devons alors nous restreindre à certaines classes de fonction.

Définition 4.1. Pour définir une **fonction** f nous avons besoin de :

1. un ensemble de départ A , appelé le **domaine** de f ;
2. un ensemble d’arrivé B ;
3. une règle qui associe à chaque élément x de A *unique* élément de B , noté $f(x)$.

On écrira alors :

$$f : A \rightarrow B : x \mapsto f(x),$$

ce qui s’interprète comme “la fonction f prends un élément x de l’ensemble A et lui associe l’élément $f(x)$ de l’ensemble B ”. On dira alors que $f(x)$ est l’**image** de x par f , et que x est un **antécédent** de $f(x)$. L’**ensemble image** de f est, comme le nom l’indique, l’ensemble des images d’éléments de A par f :

$$\text{Im}(f) := \{f(x) \in B \mid x \in A\}.$$

┘

A priori, les ensembles de départ et d'arrivé peuvent être n'importe quoi.

Exemple 4.2. Voici quelques exemples de fonctions.

- * Si A est l'ensemble des étudiants et étudiantes de l'ULB et B l'ensemble de filières proposées par notre université, on peut définir une fonction f qui associe à chaque étudiant(e) sa section.
- * Si A est l'ensemble des lettres de l'alphabet et B l'ensemble des nombres naturels, on peut définir une fonction f qui associe à chaque lettre son [code ASCII](#).

┘

Remarque 4.3 (Asymétrie domaine – ensemble image). Remarquons que tout élément de A *doit* avoir une image dans B . Le domaine et l'ensemble de départ sont confondus. Mais l'ensemble image peut être plus petit que l'ensemble d'arrivé. Si on prend l'exemple qui précède : tout étudiant(e) *doit* avoir un matricule, mais pas tout nombre naturel est un matricule d'un étudiant(e).

Il s'agit d'un choix de ce cours, il existe une façon plus générale de définir une fonction, qui distingue entre [fonction et application](#), mais nous n'en parlons pas ici. Dans ce cours, toute fonction est une application. Si vous n'avez pas compris la phrase précédente, ignorez-la.

┘

Exemple 4.4 (Complexité algorithmique). La complexité d'un algorithme décrit la quantité de ressources (temps ou espace) requise par cet algorithme en fonction de la taille de ses données d'entrée. Elle permet d'évaluer l'efficacité d'un algorithme et de comparer différentes approches pour résoudre un problème.

Étant donné un algorithme, on peut définir une fonction de sa complexité comme suit. On définit $\mathcal{C} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{C}(n)$ est la quantité de ressources utilisées par l'algorithme quand il traite une entrée de taille n .

Considérons par exemple l'algorithme suivant, qui vérifie si une valeur `cible` est présent dans une `liste`.

```
1 def recherche_lineaire(liste, cible):
2     for element in liste: # Parcourt chaque élément une fois
3         if element == cible:
4             return True
5     return False
```

Si on donne à cet algorithme une liste de taille n , au pire, l'algorithme devrait vérifier les n entrées de la liste. On écrira donc que $\mathcal{C}(n) = n$. ┘

La fonction suivante peut paraître inutile à première vue, mais sera un outil important dans ce qui suit.

Exemple 4.5 (La fonction identité). Pour n'importe quel ensemble A a fonction $f : A \rightarrow A : x \mapsto x$, la fonction “qui ne fait rien”, est appelé la **fonction identité sur A** . Elle est souvent notée Id_A ou simplement Id si l'ensemble de définition est clair du contexte. ┘

Exemple 4.6 (Les fonctions plancher et plafond). On définit deux fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ de la manière suivante :

- * La fonction **plancher** associe à x le plus grand entier plus petit ou égal à x , dénoté $\lfloor x \rfloor$. Par exemple $\lfloor \pi \rfloor = 3$
 - * la fonction **plafond** associe à x le plus petit entier plus grand ou égal à x , dénoté $\lceil x \rceil$. Par exemple $\lceil -6,002 \rceil = -6$.
- ┘

Dans ce cours, nous allons le plus souvent étudier des fonctions à valeurs réelles.

Définition 4.7. Une fonction $f : A \rightarrow B : x \mapsto f(x)$ est dite **à valeurs réelles** ou simplement **réelle** si $B \subseteq \mathbb{R}$. ┘

Exemple 4.8. * Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -x + 1$. Alors on a par exemple $f(2) = -1$. On dit alors “l'image de 2 par f est -1 ”. Ou encore “2 est un antécédent de -1 ”. L'ensemble image de cette fonction est $\mathbb{R}$.

- * La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ associe à un réel sa valeur absolue.
 - * On peut définir la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. L'ensemble image de cette fonction est $\mathbb{R}^+$, en effet seulement les réels positifs ou nul ont un antécédent par la fonction “carrée”.
 - * Les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ou $f : \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ ne sont pas les mêmes fonctions que la fonction du point précédent. En effet, elles n'ont pas le même ensemble de départ ou d'arrivée.
- ┘

! Attention Écrire par exemple $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^- : x \mapsto x^2$ n'a pas de sens ! En effet, $f(1) = 1 \notin \mathbb{R}^-$. Il faut que *l'ensemble d'arrivée contienne l'ensemble image*. **!**

Remarque 4.9. Bien que pour définir *proprement* une fonction, il faut préciser ensemble de départ et d'arrivée, il est commun que ces informations sont omises et qu'on écrive simplement par exemple

$$\textit{Considérons la fonction } f(x) = x + 3.$$

Ceci arrive souvent dans des situations où les ensembles de définition sont *sous-entendus* ou *pas importants* dans le contexte. ┘

Remarque 4.10. Le fait que nous utilisons la lettre x pour indiquer $x \mapsto f(x)$ est une pure convention. On pourrait très bien écrire

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto -t + 1.$$

Ou encore

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \heartsuit \mapsto -\heartsuit + 1.$$
┘

Exemple 4.11. Si on écrit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$, on n'a pas défini une fonction. En effet, 0 n'a pas d'image de par f dans $\mathbb{R}$. On pourrait remédier à ceci en adaptant la relation :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ou encore en adaptant l'espace de départ :

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x}.$$
┘

Dans l'étude de fonctions réelles, la notion suivante sera souvent pertinente.

Définition 4.12. Les **racines** d'une fonction $f : A \rightarrow B : x \mapsto f(x)$ sont les éléments $t \in A$ tels que $f(t) = 0$. ┘

Exemple 4.13. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x + 1$ possède une seule racine : -1 . ┘

Le saviez-vous? En programmation, un **langage fonctionnel** est un langage qui s'appuie principalement sur le concept de fonctions, à la manière des mathématiques. Si l'on connaît les fonctions mathématiques, le principe reste similaire : une fonction prend une valeur en entrée, effectue un calcul et retourne un résultat. La particularité des langages fonctionnels (tels qu'Haskell, OCaml ou Elixir) est qu'ils placent ces fonctions au cœur de leur fonctionnement.

Plutôt que de modifier des variables ou d'exécuter une suite d'instructions séquentiellement (comme dans des langages impératifs tels que Python ou C), on combine des fonctions qui s'appellent entre elles. Par exemple, au lieu d'utiliser une boucle `for`, on applique une fonction à chaque élément d'une liste. Une autre caractéristique essentielle est que ces fonctions sont souvent pures : comme en mathématiques, une même entrée produira toujours la même sortie, sans effets secondaires imprévisibles.

Ainsi, les langages fonctionnels s'inspirent des mathématiques en structurant le programme autour de fonctions fiables et modulaires. Cette approche les rend particulièrement adaptés à certaines tâches, comme le traitement de données ou les calculs complexes. ┘

4.1 Graphes de fonctions

Quand on parle de fonctions réelles, on peut “dessiner” certaines fonctions.

Définition 4.14. Soit $f : A \rightarrow B : x \mapsto f(x)$ une fonction où on suppose que $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Le **graphe** de f est l'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = y$. Autrement dite

$$\text{Graphe}(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A\}.$$
┘

Exemple 4.15. Le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x$ se représente par

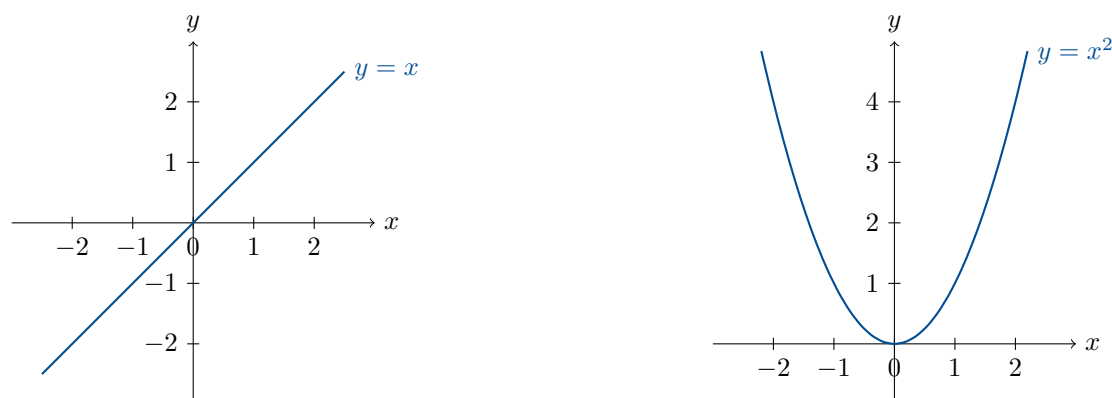


FIGURE 4.1 – Graphe des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x$ (gauche) et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ (droite).

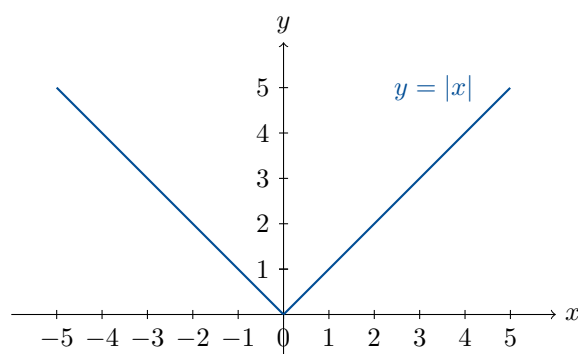


FIGURE 4.2 – Graphe de la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|$.

une droite et le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ se représente par une parabole, voir Figure 4.1. ┘

Exemple 4.16. Pas tous les graphes de fonction ont une allure aussi “lisse” que dans l’exemple précédent. Voir par exemple Figure 4.2 qui contient le graphe de la fonction valeur absolue. Ou encore Figure 4.3 qui contient les graphes de la fonction plancher (voir Exemple 4.6). Note que pour ce dernier on dessine un disque plein pour indiquer que la fin du segment est inclus et un disque vide pour indiquer le contraire. ┘

Cette notion de graphe n’a aucun sens pour, par exemple, une fonction associant à chaque fruit sa couleur. Dessiner des graphes a du sens pour des fonctions dont le domaine est (un sous-ensemble de) $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, mais pas *n’importe*

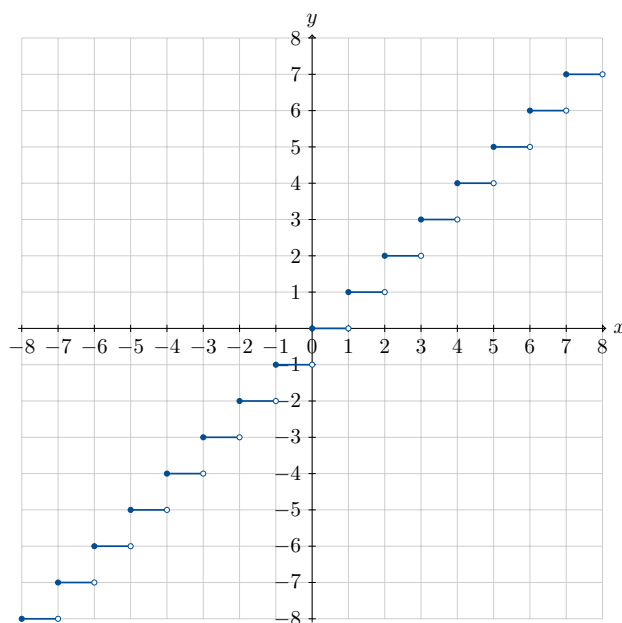


FIGURE 4.3 – Graphe de la fonction plancher.

quelle fonction. Il faut donc se restreindre à cette classe de fonction si nous voulons dessiner des graphes.

Exemple 4.17 (Fonction de Dirichlet). Considérons la fonction suivante :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

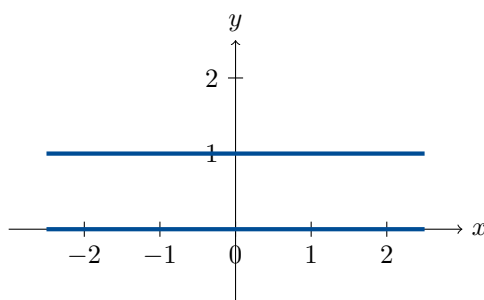


FIGURE 4.4 – Tentative de dessin de graphe pour la fonction de Dirichlet.

Si on essaye de dessiner le graphe de cette fonction on obtient quelque chose comme dans Figure 4.4. Les deux lignes parallèles en $y = 0$ et $y = 1$ semblent solides, mais ne le sont en fait pas ! Dans la ligne du dessus, il manque tous les nombres irrationnels et dans celle du dessous, il manque tous les rationnelles. Mais comme les nombres de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont tellement rapprochés l'un de l'autre, on ne peut faire autrement.

Cette fonction particulière nous servira souvent quand on aura besoin d'un exemple de fonction tordue. ┘

4.2 Opérations sur les fonctions

En partant de fonctions connues, on peut en construire des nouvelles.

Définition 4.18. Si $f : A \rightarrow B$ est une fonction et $A' \subseteq A$, alors f définit une fonction sur A' appelée **restriction** de f à A' et notée $f|_{A'}$. On a donc

$$f|_{A'} : A' \rightarrow B : x \mapsto f(x)$$

La seule différence avec f est donc l'ensemble de départ. ┘

Exemple 4.19. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ et $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$, alors on a $g = f|_{\mathbb{R}^+}$. ┘

Définition 4.20. Étant donné des fonctions $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$, on peut définir la **composée** $g \circ f$ (lire “ g rond f ”) de ces fonctions par

$$g \circ f : A \rightarrow C : x \mapsto g(f(x))$$

On écrira $f^2 := f \circ f$, $f^3 := f \circ f \circ f$, etc. ┘

! Attention L'ordre de composition est important. En général, $f \circ g \neq g \circ f$. **!**

Exemple 4.21. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x + 1$, alors on a

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(f(x)) = x^2 + 1 \\ f \circ g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(g(x)) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1. \end{aligned}$$

┘

Quand l'espace d'arrivé est un sous-ensemble des réels, on peut utiliser les opérations sur les nombres réels pour définir des opérations analogues sur les fonctions.

Définition 4.22. Soient $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles, et c un nombre. Alors on définit les fonctions réelles suivantes, toutes $A \rightarrow \mathbb{R}$ (à l'exception du quotient, qui n'est pas défini quand le dénominateur est nul) :

- * La **somme** $f + g$ est définie par $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, pour $x \in A$.
- * Le **produit par un scalaire** cf est défini par $(cf)(x) := cf(x)$, pour $x \in A$.
- * Le **produit** fg est défini par $(fg)(x) := f(x)g(x)$, pour $x \in A$.
- * Le **quotient** $\frac{f}{g}$ est défini par $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, pour $x \in A$ et $g(x) \neq 0$.

┘

4.3 Quelques classes de fonctions

4.3.1 Fonctions polynomiales

Définition 4.23. Une **fonction polynomiale** est une fonction de qui à x associe un polynôme en x . C'est-à-dire, une fonction de la forme

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i,$$

où $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On appelle n le **degré** de la fonction polynomiale. Les fonctions polynomiales de degré 0 sont appelées des **fonctions constantes** et les fonctions de degré 1 sont appelées des **fonctions linéaires** ou **affines**. ┘

Exemple 4.24. Nous avons déjà rencontré des exemples de fonctions polynomiales.

- * La fonction identité $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x$ est une fonction polynomiale. Il s'agit d'une fonction linéaire.
- * La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est une fonction polynomiale.

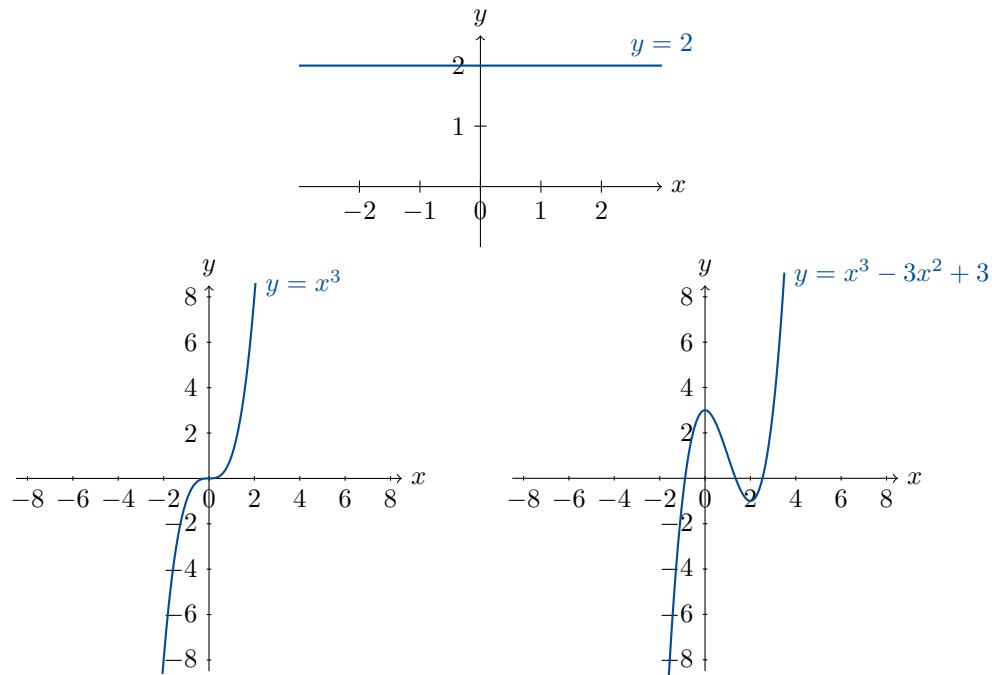


FIGURE 4.5 – Les graphes des fonctions dans Exemple 4.25.

Leurs graphes sont représentés dans Figure 4.1. ┘

Exemple 4.25. Les fonctions suivantes sont aussi des fonctions polynomiales.

* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2$ (c'est une fonction constante)

* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$

* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 3$

Leurs graphes sont représentés dans Figure 4.5. ┘

Le saviez-vous? Un algorithme est dit polynomial si sa complexité est bornée par une fonction polynomiale, ce qui le rend généralement efficace pour des entrées de grande taille. Contrairement aux complexités exponentielles, les algorithmes polynomiaux sont considérés comme tractables en pratique, car leur temps de calcul croît de manière raisonnable. Cette distinction est fondamentale en théorie de la complexité pour classer les problèmes selon leur difficulté. ┘

4.3.2 Fonctions rationnelles

Définition 4.26. Une **fonction rationnelle** est le quotient de deux fonctions polynomiales. C'est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ moins l'ensemble des racines du dénominateur. Si P et Q sont deux fonctions polynomiales, leur quotient R est la fonction rationnelle définie par

$$R : A \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

avec $A := \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } Q(x) \neq 0\}$. ┘

Exemple 4.27. Un exemple simple de fonction rationnelle est la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_0 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$
┘

Exemple 4.28. Un autre exemple plus compliqué est la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^3 - 5x + 7}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$
┘

4.3.3 Fonctions exponentielles

Définition 4.29. Soit b une **base**, c'est-à-dire un nombre réel strictement positif et différent de 1. L'**exponentielle de base b** est la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x &\mapsto b^x. \end{aligned}$$
┘

Exemple 4.30. Dans Figure 4.7 est représenté le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2^x$. ┘

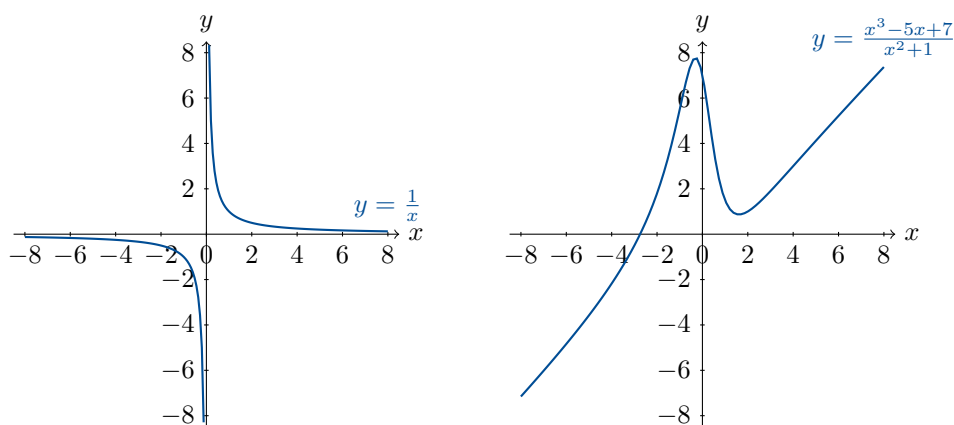


FIGURE 4.6 – Graphes des fonctions rationnelles dans Exemple 4.27 (gauche) et Exemple 4.28 (droite).

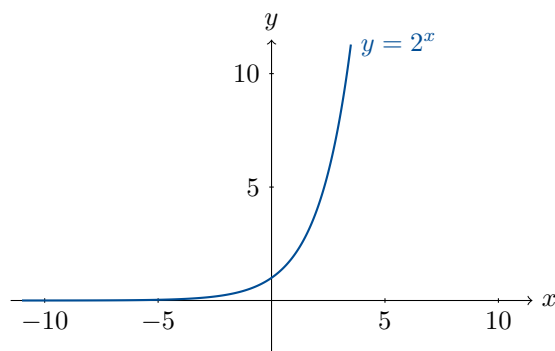


FIGURE 4.7 – La fonction exponentielle $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow x \mapsto 2^x$.

Remarque 4.31. La croissance d’une fonction exponentielle est extrêmement rapide et dépasse largement toute croissance polynomiale. Considérons par exemple les fonctions sur $\mathbb{R}_0^+$ définies par $f(x) := 2^x$ et $g(x) := x^{10}$. Pour des petites valeurs de x , on a que $g(x)$ est beaucoup plus grand que $f(x)$: $f(2) = 4 < g(2) = 1024$. Mais autour de $x = 58,77$ on a $f(x) = g(x)$ et pour $x = 59$ on a déjà $f(59) - g(59) \approx 6,53 \cdot 10^{17}$!

Exemple 4.32. Considérons l’algorithme suivant, pour calculer le n -ième nombre de Fibonacci.

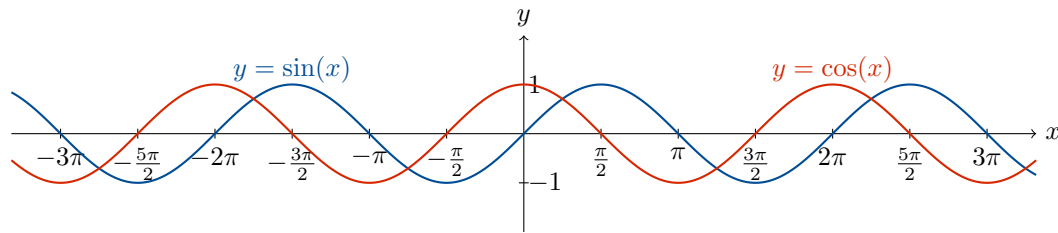


FIGURE 4.8 – Graphes des fonctions trigonométriques sin (bleu) et cos (rouge).

```

1 def fibonacci(n):
2     if n <= 1:
3         return n
4     else:
5         return fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2)

```

Pour une entrée de taille n , la fonction s'appelle elle-même deux fois, qui chacune s'appelle aussi deux fois, etc. Il y aura donc de l'ordre de 2^n opérations. Il s'agit d'un algorithme extrêmement inefficace. ┘

Remarque 4.33 (Le nombre e). Il y a une fonction exponentielle particulière qui aura un rôle spécial dans la branche des mathématiques appelé *l'analyse*. Il s'agit de l'exponentielle en base e où e est la **constante d'Euler**. On a que $e \approx 2,71828182845905$. Plus tard dans ce cursus, il deviendra plus clair pourquoi e et la fonction exponentielle de base e sont si spéciales. ┘

4.3.4 Fonctions trigonométriques

Dans Chapitre 2, nous avons déjà employé le mot “fonction” quand on parlait de *fonctions trigonométriques*. En effet, sin, cos, tan et cot transforment une mesure d'angle, donc un réel, en un réel. On peut formellement définir les fonctions :

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$$

$$\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x).$$

Les graphes de ces fonctions sont représentés dans Figure 4.8.

Pour tan et cot, il ne faut pas oublier d'exclure du domaine les valeurs où ces

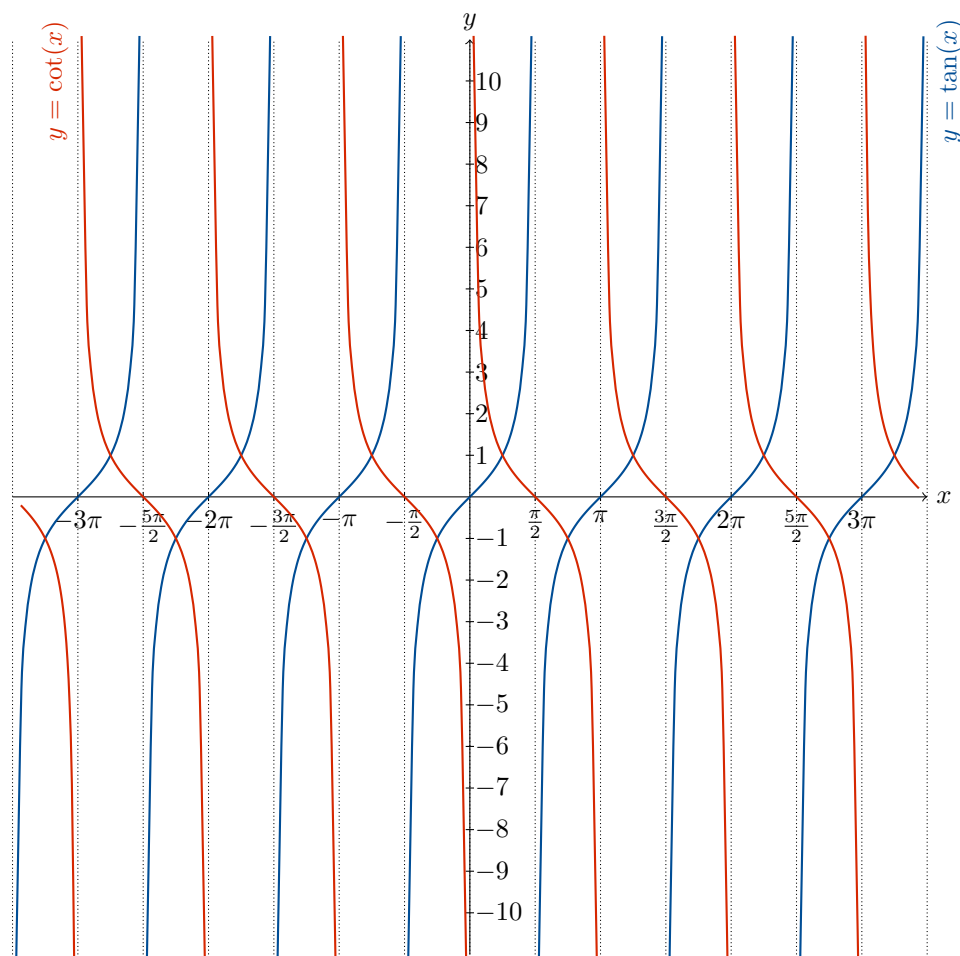


FIGURE 4.9 – Graphes des fonctions trigonométriques $\tan$ (bleu) et $\cot$ (rouge).

fonctions ne sont pas définies.

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \tan(x)$$

$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cot(x).$$

Les graphes de ces fonctions sont représentés dans Figure 4.9.

4.4 Propriétés de fonctions

On voit dans les exemples de fonctions, qu'elles peuvent avoir des allures et propriétés très distinctes. Dans cette section, nous allons discuter de quelques propriétés des fonctions qui sont souvent utiles à étudier.

4.4.1 Croissance et décroissance

Définition 4.34. Soit f une fonction $A \rightarrow B$ où $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Une telle fonction est dite

- * **croissante** si pour tout $x_1, x_2 \in A$ tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- * **strictement croissante** si pour tout $x_1, x_2 \in A$ tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) < f(x_2)$;
- * **décroissante** si pour tout $x_1, x_2 \in A$ tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- * **strictement décroissante** si pour tout $x_1, x_2 \in A$ tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) > f(x_2)$.

└

Exemple 4.35. * La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x$ est strictement croissante.

- * La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -x + 3$ est strictement décroissante. En effet, si $x_1 < x_2$ on a que $-x_1 > -x_2$ et donc $-x_1 + 3 > -x_2 + 3$. C'est-à-dire $f(x_1) > f(x_2)$.
- * La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2^x$ est strictement croissante.
- * La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 3$ est à la fois croissante et décroissante !
- * La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$ n'est ni croissante, ni décroissante. En effet, $0 < \pi < 2\pi$, mais $f(0) > f(\pi)$ et $f(\pi) < f(2\pi)$.

└

! Attention La croissance d'une fonction dépend fortement de son domaine. **!**

Exemple 4.36. * La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ n'est ni croissante ni décroissante.

- * La fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est strictement croissante.

* La fonction $f : \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est strictement décroissante.

┘

Exercice. Donnez un exemple d'une fonction strictement décroissante sur le domaine $\mathbb{R}^+$.

┘

Exemple 4.37. En général, toutes les fonctions de calcul de complexité sont croissantes. En effet, quand la taille de la donnée d'entrée est plus grand, la quantité de ressources augmente!

┘

4.4.2 Parité

Définition 4.38. Soit f une fonction $A \rightarrow B$ où $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Une telle fonction est dite

- * **pair** si pour tout $x \in A$, $-x \in A$ et $f(x) = f(-x)$;
- * **impair** si pour tout $x \in A$, $-x \in A$ et $f(x) = -f(-x)$.

┘

Exemple 4.39. * La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est pair.

- * La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - x^2 + 6$ est pair, car pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 + 6 = x^4 - x^2 + 6 = f(x)$.
- * La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ est impair.
- * La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^9 - 3x^6 - 12$ n'est ni pair ni impair.
- * La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$ est impair, car grâce à Proposition 2.19, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\sin(-x) = -\sin(x)$.
- * La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$ est pair.
- * La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 3^x$ n'est ni pair, ni impair.

┘

Exercice. Donnez d'autres exemples de fonctions paires et impaires.

┘

Remarque 4.40 (Allure du graphe de fonctions paires et impaires). Une fonction est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Une fonction est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine.

┘

Proposition 4.41. Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

- * Si f et g sont paires alors $f + g$ est paire.
- * Si f et g sont impaires alors $f + g$ est impaire.

┘

Preuve. Montrons le premier point. Supposons que f et g sont paires et prenons $x \in A$ tel que $-x \in A$. Alors

$$\begin{aligned} (f + g)(-x) &= f(-x) + g(-x) && \text{par définition de la somme de fonctions} \\ &= f(x) + g(x) && \text{par la parité de } f \text{ et } g \\ &= (f + g)(x) && \text{par définition de la somme de fonctions.} \end{aligned}$$

On a donc montré que $f + g$ est pair. Le deuxième point se montre de la même manière (exercice). □

Remarque 4.42. La somme d'une fonction paire avec une fonction impaire n'est en général ni paire ni impaire. Pouvez-vous fournir des exemples? **exercice** ┘

4.4.3 Périodicité

Définition 4.43. Soit f une fonction $A \rightarrow B$ où $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Soit $T \in \mathbb{R}$. Une telle fonction est dite **périodique de période T** si pour tout $x \in A$ tel que $x + T \in A$, on a $f(x) = f(x + T)$. ┘

Les exemples principaux de fonctions périodiques sont des fonctions composées de fonctions trigonométriques, grâce à Proposition 2.8.

Exemple 4.44. * La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$ est périodique de période 2π . Elle est également périodique de période 4π et 6π .

- * La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x) + \cos(x) + \tan(x) + \cot(x)$ est périodique de période 2π .
- * La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(2x)$ est périodique de période π .

┘

Remarque 4.45. En général, toute fonction périodique de période T est aussi périodique de période $2T$, $3T$, etc. Il est coutume d'indiquer la plus petite période possible, car ceci nous donne plus d'information sur la fonction. ┘

Remarque 4.46 (Allure du graphe d'une fonction périodique). Le graphe d'une fonction périodique de période T a la propriété que si on le *translate* d'une distance T vers la droite ou gauche, le graphe n'aura pas changé. ┘

4.4.4 Injectivité, surjectivité et bijectivité

Définition 4.47. Soit f une fonction $A \rightarrow B$. Elle est dite

- * **injective** si pour tous $x_1, x_2 \in A$ tels que $x_1 \neq x_2$, on a $f(x_1) \neq x_2$. Ou la formulation équivalente : pour tous $x_1, x_2 \in A$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$ on a $x_1 = x_2$. En d'autres mots

tout élément de B est image d'au plus un élément de A ;

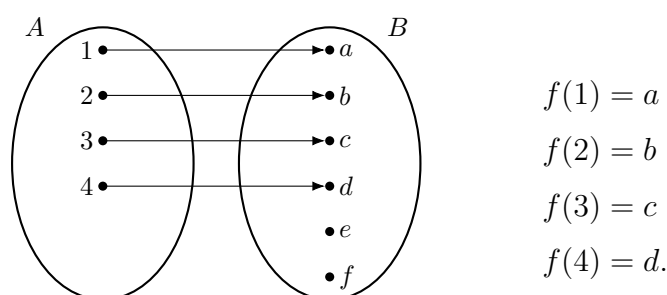
- * **surjective** si son ensemble image est égal à son ensemble d'arrivé. C'est-à-dire que pour tout $y \in B$ il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. En d'autres mots

tout élément de B est image d'au moins un élément de A ;

- * **bijective** si f est injective et surjective. En d'autres mots

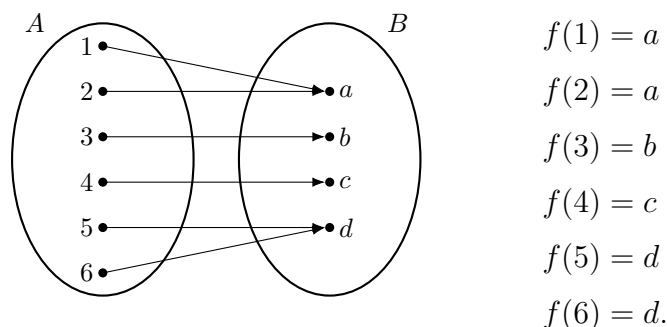
tout élément de B est image d'exactly un élément de A .

Exemple 4.48. Considérons la fonction $f : A \rightarrow B$ avec $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ définie par



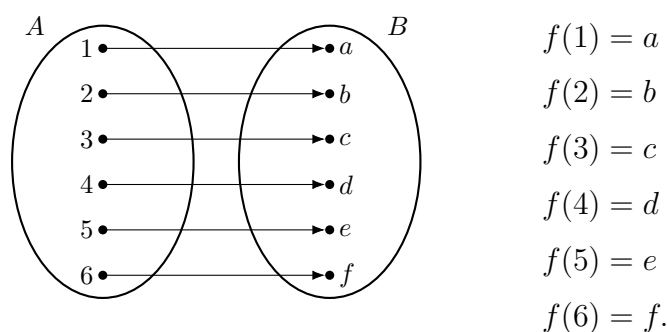
Cette fonction est injective, car aucun élément de B a plus qu'un antécédent. Par contre, cette fonction n'est pas surjective, car $e, f \in B$ n'ont pas d'antécédent. ┘

Exemple 4.49. Considérons la fonction $f : A \rightarrow B$ avec $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{a, b, c, d\}$ définie par



Cette fonction est surjective, car chaque élément de B a au moins un antécédent. Par contre, cette fonction n'est pas injective car, par exemple, $a \in B$ possède deux antécédents par $f : 1$ et 2 . ┘

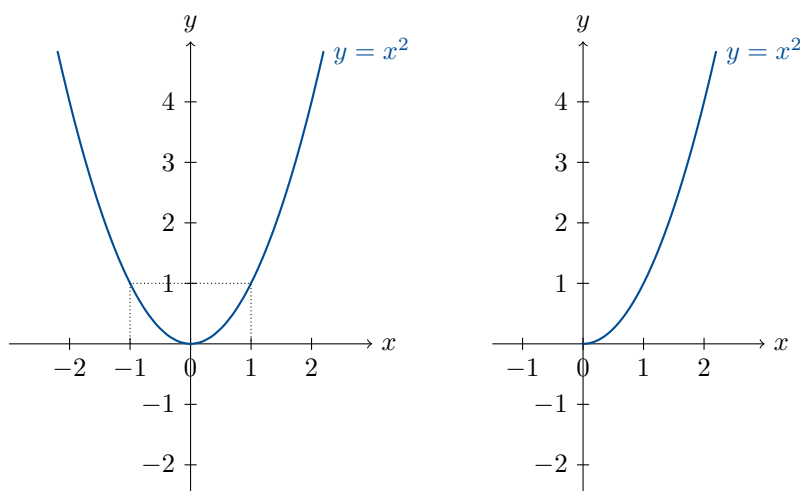
Exemple 4.50. Considérons la fonction $f : A \rightarrow B$ avec $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ définie par



Cette fonction est bijective : chaque élément de B possède exactement un seul antécédent ┘

Exemple 4.51. Soit A l'ensemble des étudiants et étudiantes de l'ULB.

- * Soit B est l'ensemble des sections proposées par notre université et f la fonction $A \rightarrow B$ qui associe chaque étudiant(e) à sa section. Alors f n'est pas injective, car il y a beaucoup d'étudiant(e)s différent(e)s qui sont inscrite dans la même section. Mais a priori (j'espère), il n'y a aucune section sans aucun(e) étudiant(e), donc f est surjective.
- * Soit B est l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$ et f la fonction $A \rightarrow B$ qui associe chaque étudiant(e) à son numéro de matricule. Alors f est injective, car les numéros de matricule sont uniques à chaque étudiant(e). Par contre, f n'est

FIGURE 4.10 – Graphes de fonctions $A \rightarrow B : x \mapsto x^2$.

pas surjective, car il existe des nombres naturels qui sont le matricule d'aucun(e) étudiant(e).

┘

! Attention L'injectivité, surjectivité et bijectivité est très dépendant des ensembles de départ et d'arrivé de la fonction. **!**

Exemple 4.52. Considérons différentes fonctions utilisant la correspondance $x \mapsto x^2$ (voir Figure 4.10).

1. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ n'est pas injective car, $f(-1) = f(1) = 1$. Elle n'est pas surjective, car $-1 \in \mathbb{R}$ et il n'existe aucun $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = -1$.
2. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ n'est pas injective pour la même raison que dans le point précédent. Elle *est* surjective, car pour tout réel positif $y \in \mathbb{R}^+$, il existe un réel $x = \sqrt{y}$ tel que $x^2 = y$.
3. La fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ *est* injective, car deux réels positifs distincts auront toujours des carrés distincts. Elle n'est pas surjective pour la même raison dans le point 1.
4. La fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ est bijective!

┘

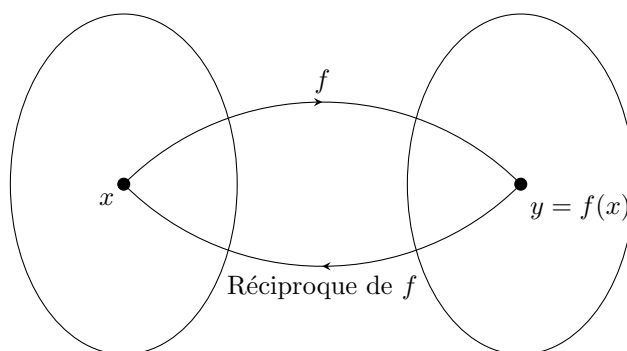


FIGURE 4.11 – Schéma illustrant la définition d’une fonction réciproque.

Exemple 4.53. * La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^x$ est injective, mais pas surjective.

- * La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto e^x$ est bijective.
- * La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ est bijective.
- * La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$ n’est ni injective, ni surjective.
- * La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] : x \mapsto \cos(x)$ n’est pas injective, mais elle est surjective.
- * La fonction $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] : x \mapsto \cos(x)$ est bijective.

┘

4.5 Fonctions réciproques

Si une fonction représente une action ou une transformation (par exemple “ajouter 5”), on peut se demander quel est l’action qui permet de revenir au point de départ (ici, “soustraire 5”) ? Quel est le chemin de retour ?

Il s’avère qu’il n’est pas toujours possible de bien définir un tel “chemin de retour”. En effet, si notre fonction est $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ et on se demande de quel élément x on est parti pour avoir $x^2 = 1$, il y a plusieurs réponses possibles : 1 ou -1 .

Définition 4.54. Une fonction $f : A \rightarrow B$ est dite **inversible** s’il existe une fonction $g : B \rightarrow A$ telle que

Pour tout $x \in A$, on a $g(f(x)) = x$

Pour tout $y \in B$, on a $f(g(y)) = y$.

En d'autres mots, $g \circ f = \text{Id}_A$ et $f \circ g = \text{Id}_B$. On appellera alors g l'**inverse** ou la **fonction réciproque** de f et on notera $g = f^{-1}$. ┘

Exemple 4.55. Comme évoqué au-dessus, si

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x + 5$$

alors on a

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto y - 5$$

est l'inverse de f . En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(f(x)) = g(x+5) = x+5-5 = x$.

Et pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $f(g(y)) = f(y-5) = y-5+5 = y$. ┘

! Attention (Ne pas confonde f^{-1} et $\frac{1}{f}$) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x + 5$, on a que

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto y - 5$$

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}.$$

L'exposant -1 porte sur la *fonction* f . Ceci n'est pas à confondre avec

$$\frac{1}{f} : \mathbb{R} \setminus \{-5\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{f}(x) = (f(x))^{-1} = \frac{1}{x+5}$$

$$f \circ \frac{1}{f} : \mathbb{R} \setminus \{5\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1.$$

Ici, l'exposant -1 s'applique à $f(x)$, qui est un nombre réel. !

Le suivant suit directement de la définition des fonctions réciproques.

Proposition 4.56. Si f est la réciproque de g alors g est la réciproque de f . C'est-à-dire $(f^{-1})^{-1} = f$. ┘

Proposition 4.57. Une fonction $f : A \rightarrow B$ est inversible si et seulement si elle est bijective. ┘

Preuve. Supposons d'abord que f est inversible. Montrons que f est injective. Soient $x_1, x_2 \in A$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors on peut appliquer f^{-1} à cette identité pour obtenir $f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2))$. En simplifiant, on trouve $x_1 = x_2$.

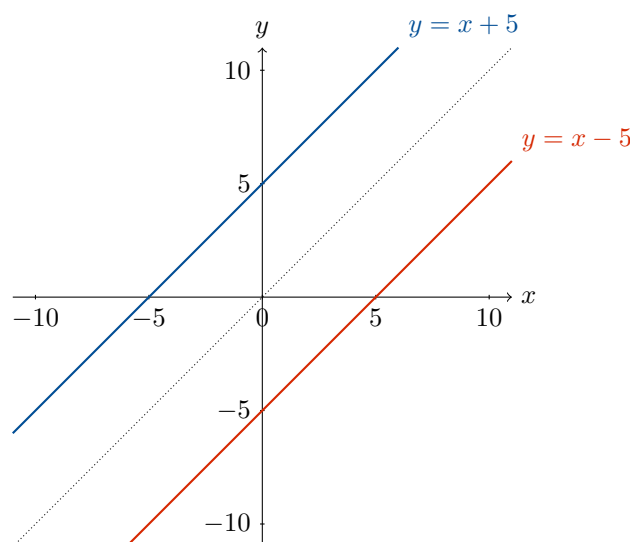


FIGURE 4.12 – La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x + 5$ (bleu) et sa fonction réciproque $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x - 5$ (rouge).

Montons maintenant que f est surjective. Soit $y \in B$ alors si on prend $x = f^{-1}(y)$, on a que $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$. On a donc montré que tout y a un antécédent par f et que f est surjective.

Ensuite, supposons que f est bijective. Alors, pour tout $y \in B$, il existe un unique $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Définissons une fonction $g : B \rightarrow A$ qui à tout $y \in B$ associe cet unique élément $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Alors, par construction, g est l'inverse de f . $\square$

Remarque 4.58 (Graphe de la fonction réciproque). On peut voir la fonction réciproque de f comme la même association d'éléments, mais où les rôles de domaine et image sont échangés. Graphiquement, ceci se traduit en une inversion de l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. C'est-à-dire, le graphe de la fonction réciproque de f s'obtient à partir du graphe de f en effectuant une symétrie par rapport à la diagonale $x = y$. $\lrcorner$

Voir Figure 4.12 pour les graphes associés à Exemple 4.12. D'autres exemples suivront dans la suite de cette section.

Dans la suite de cette section on discutera des fonctions réciproques de certaines classes de fonctions considérées au-dessus.

4.5.1 Fonctions racines

Considérons, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction polynomiale simple

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n.$$

Quelle est la fonction réciproque? On commence par observer que cette fonction n'est bijective que si n est impair. En effet, si n est pair, la fonction n'est pas injective, car par exemple $f(-1) = f(1)$. Quand n est pair on peut adapter les ensembles de définition pour obtenir une fonction bijective :

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^n.$$

On se rappelle Section 1.4.5 et on trouve l'outil adéquat pour les fonctions réciproques : les racines n -ièmes.

Si n est impair, la fonction réciproque de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n$ est donnée par

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \sqrt[n]{y}.$$

Si n est pair, la fonction réciproque de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^n$ est donnée par

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : y \mapsto \sqrt[n]{y}.$$

Voir Figure 4.13.

4.5.2 Fonctions logarithmiques

Quelle sont les fonctions réciproques des fonctions exponentielles? Pour un $b \in \mathbb{R}_0^+$, considérons la fonction bijective

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto b^x.$$

Cette fonction a bien une fonction réciproque qui est donnée par

$$f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \log_b(y).$$

En effet, par les propriétés énoncées dans Section 1.4.6, on a bien que $b^{\log_b(y)} = y$ et $\log_b(b^x) = x$.

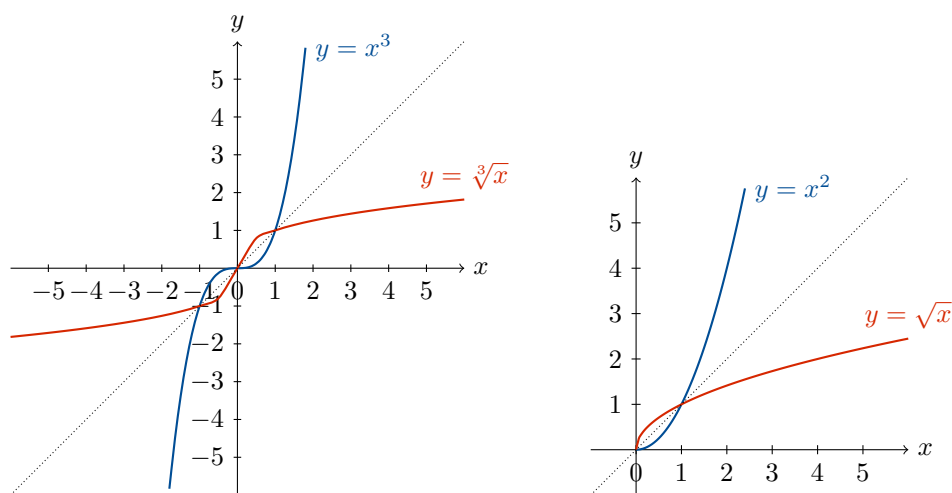


FIGURE 4.13 – Gauche : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ (bleu) et sa réciproque (rouge). Droite : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ (bleu) et sa réciproque (rouge).

Définition 4.59. Le **logarithme naturel** est le logarithme de base e (voir Remarque 4.33). C'est la fonction réciproque de la fonction exponentielle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto e^x$. Elle se dénote $\ln$. ┘

Dans Figure 4.14, on voit les graphes de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto e^x$ et sa réciproque $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x)$.

4.5.3 Fonctions trigonométriques réciproques

Les fonctions trigonométriques comme définies dans Section 4.3.4 ne sont clairement pas bijectives. Cependant, il est possible de restreindre un peu leurs ensembles de définition pour obtenir des fonctions bijectives :

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\rightarrow [-1, 1] : x \mapsto \sin(x) \\ [0, \pi] &\rightarrow [-1, 1] : x \mapsto \cos(x) \\ \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \tan(x). \end{aligned}$$

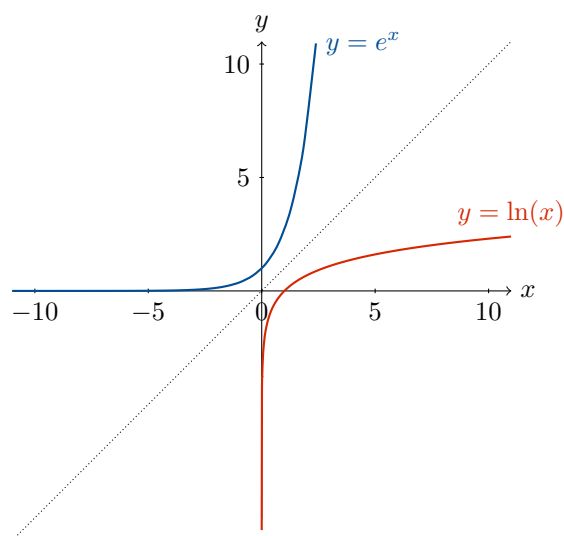


FIGURE 4.14 – La fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto e^x$ (bleu) et sa réciproque (rouge).

Nous avons déjà rencontré leurs fonctions réciproques respectives (sans utiliser ce terme) dans la Section 2.3 :

$$[-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : y \mapsto \arcsin(y)$$

$$[-1, 1] \rightarrow [0, \pi] : y \mapsto \arccos(y)$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : y \mapsto \arctan(y).$$

Les graphes de ces fonctions et leurs réciproques se trouvent dans Figure 4.15.

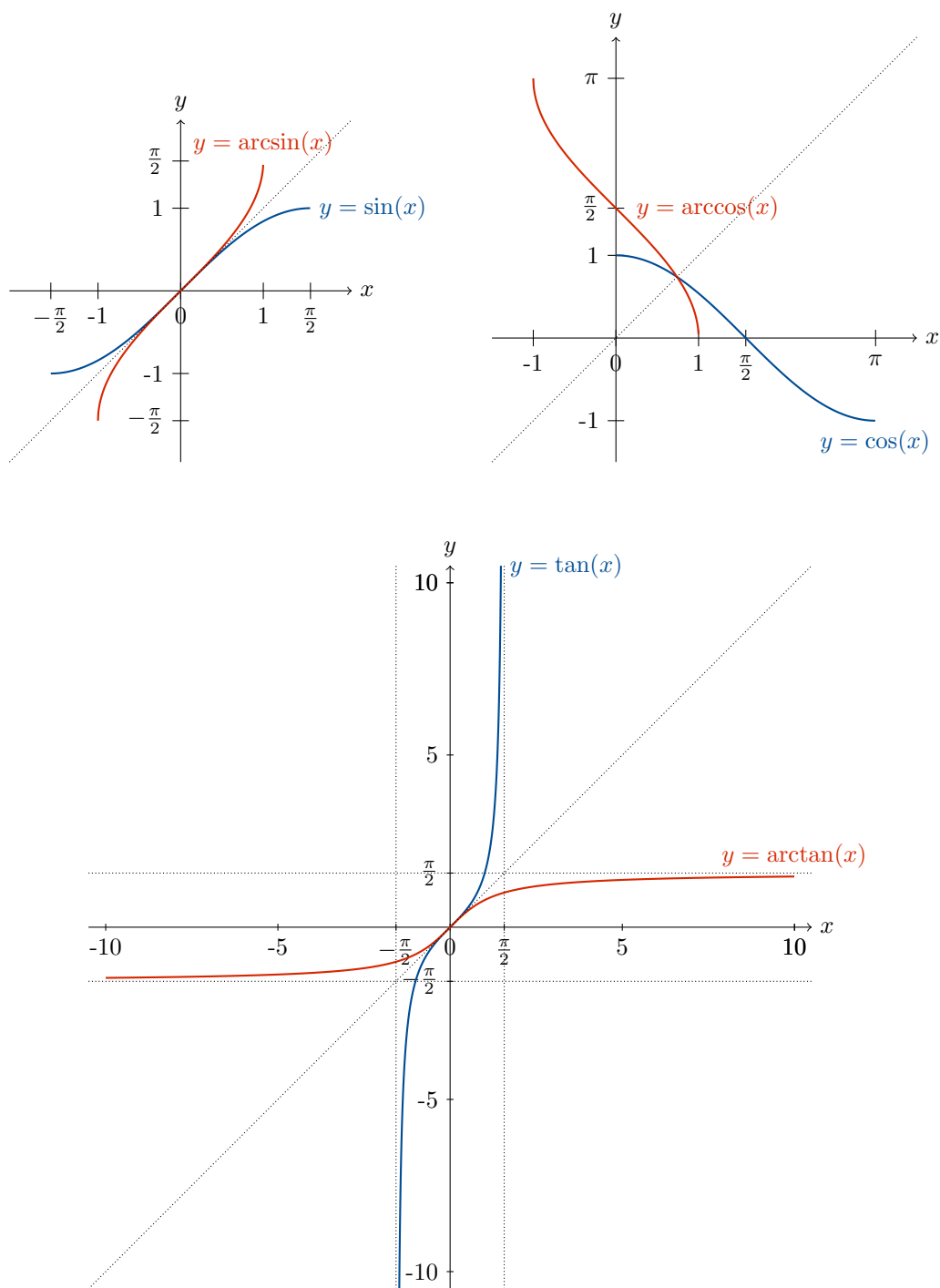


FIGURE 4.15 – Fonctions trigonométriques bijectives et leurs fonctions réciproques

CHAPITRE 5

Dérivées: interprétation géométrique et calcul

La dérivation est omniprésente en sciences : elle donne une formalisation de la *variation* d'une fonction “en un point”. Si la fonction représente une position, la dérivée représente une vitesse.

À présent, nous allons nous concentrer sur les aspects géométriques et calculatoire de la dérivation. La définition formelle de la dérivée sera traitée en plus de détails dans MATHF114.

5.1 Une définition naïve de la dérivée

Commençons par rappeler la notion suivante.

Définition 5.1. Considérons la droite D du plan passant par les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) . Supposons que $x_1 \neq x_2$. En particulier, les deux points sont distincts. Alors la **pente** de D est le nombre

$$m := \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

c'est-à-dire le quotient de la différence des ordonnées par la différence des abscisses. En d'autres mots, si on imagine un point mobile p qui se déplaçant le long de la droite D . La pente mesure la quantité dont p monte (ou descend, si la pente est

négative) verticalement quand p avance d'une unité horizontalement. ┘

Proposition 5.2. Si D est une droite de pente m alors D est l'ensemble de points satisfaisant l'équation

$$y = mx + d$$

pour un certain $d \in \mathbb{R}$. ┘

Preuve. Prenons deux points distincts sur (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sur D . On sait que $y = mx + d$ est bien une équation qui décrit une droite (voir Section 3.7.1). Étant donné qu'il n'y a qu'une seule droite qui passe par deux points distincts, il suffit de montrer que (x_1, y_1) et (x_2, y_2) satisfont l'équation pour un certain $d \in \mathbb{R}$. Par définition de m (Définition 5.1), on sait que $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Prenons alors

$$d = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1.$$

Alors on vérifie facilement que (x_1, y_1) et (x_2, y_2) satisfont l'équation $y = mx + d$:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 \\ y_2 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_2 + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x_2 - x_1) + y_1. \end{aligned}$$

□

Le concept de pente est intimement lié au concept de dérivée.

Définition 5.3 (Dérivée d'une fonction en un point). Soit une fonction $f : A \rightarrow B$ où $A, B \subseteq \mathbb{R}$ et prenons $a \in A$ à l'intérieur¹ de A . Alors la **dérivée de f en a** , si elle existe, est la pente de la droite tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$. On note cette valeur $f'(a)$. ┘

Assurons-nous que cette notion de droite tangente est claire.

Définition 5.4. La **droite tangente** à une courbe *en un point* est la droite qui "touche" la courbe au plus près au voisinage de ce point. La courbe et sa tangente forment alors un angle nul en ce point. ┘

Voir Figure 5.2 pour quelques exemples de droites tangentes au graphe d'une

1. Un point $a \in A \subseteq \mathbb{R}$ est dit à l'**intérieur** de a , si a ne se trouve pas sur le bord de A . C'est-à-dire, on peut un peu l'éloigner de a , sans sortir de A . Formellement : il existe $\delta > 0$ tel que $]a - \delta, a + \delta[\subseteq A$. Par exemple, les points intérieurs de $[0, 1]$ sont $]0, 1[$.

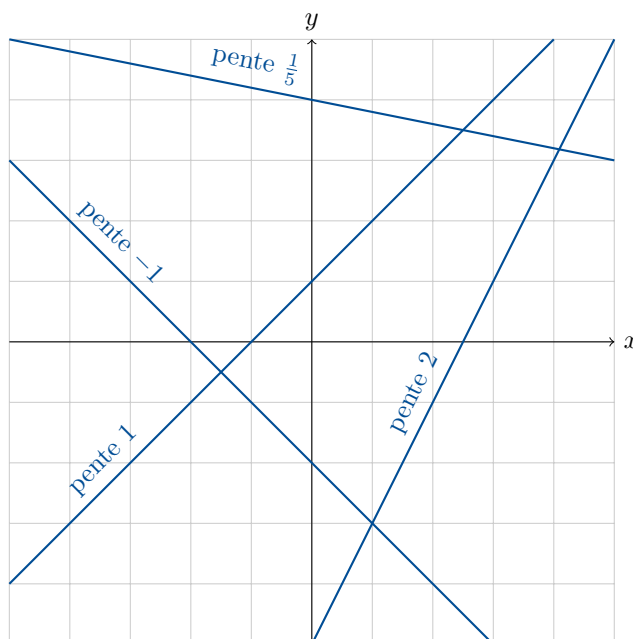


FIGURE 5.1 – Différentes pentes

fonction f en $(a, f(a))$, pour différentes valeurs de a . La *dérivée* de f en a sera alors à chaque fois donnée par la pente de la droite.

Remarque 5.5 (La droite tangente comme “approximation linéaire”). La terre est sphérique. Mais de notre point de vue, elle paraît plate. C’est parce que la terre est tellement énorme et nous sommes tellement proche d’elle. Appliquons cette analogie au graphe d’une fonction dans le plan. Si ce graphe est suffisamment “lisse” et on se rapproche de très très près d’un point du graphe, on dirait qu’on regarde une droite. Le graphe et sa droite tangente deviennent indistinguables. On dit que la droite tangente est une “approximation linéaire” de la fonction en un point. C’est-à-dire que, tout près de a , le graphe de f ressemble au graphe de la droite tangente :

$$f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a) \quad \text{pour } x \approx a.$$

┘

Remarque 5.6. Dans ce cours, nous ne parlons pas de façon précise des conditions d’existence de la dérivée. Une fonction qui remplira ces conditions en un point a

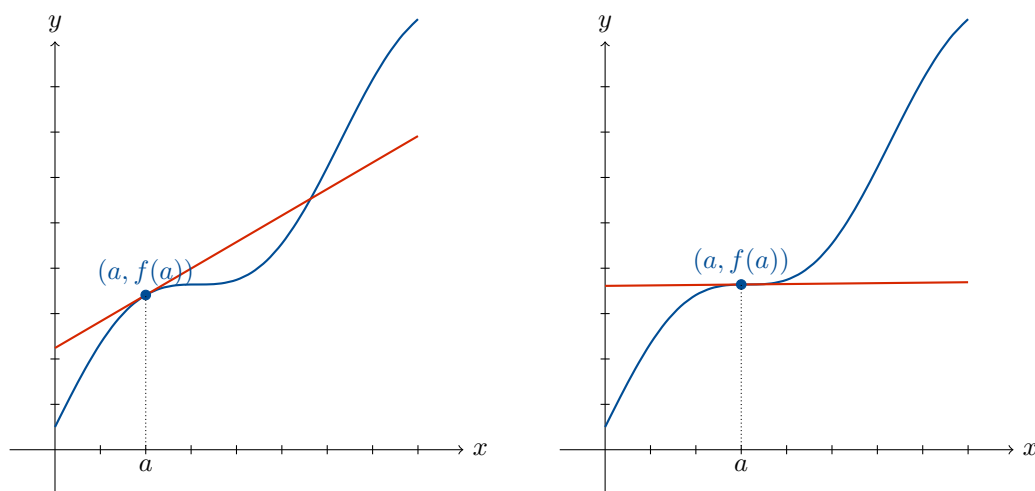


FIGURE 5.2 – Les droites tangentes au graphe d’une fonction en $(a, f(a))$, pour différentes valeurs de a .

sera appelé **dérivable en a** . Si une fonction n’est pas dérivable en a , il va être impossible de tracer une droite tangente au graphe au point $(a, f(a))$. Un exemple d’une fonction qui n’est pas dérivable en $a = 0$ est $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|$. On peut voir dans Figure 4.2 qu’en $(0, 0)$, le graphe de cette fonction forme un angle droit. En ce point on ne peut tracer une droite tangente. ┘

Notation 5.7. D’autres notations sont utilisées pour la dérivée d’une fonction f au point a : on note $f'(a)$ également

$$\frac{df}{dx}(a)$$

ce qui signifie littéralement “la dérivée de f par rapport à x en a ”. Si on pose $y = f(x)$ alors on note $f'(a)$ également

$$y'(a) \quad \text{ou encore} \quad \frac{dy}{dx}(a)$$

La notation $\frac{d}{dx}$ est couramment employée en physique. ┘

Proposition 5.8. Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ et $f : A \rightarrow B$ une fonction dérivable en $a \in A$. Alors, si D est la droite tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$, elle satisfait l’équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

┘

Preuve. Par définition de la dérivée au point a (Définition 5.3), $f'(a)$ est la pente de D . Par Proposition 5.2, il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que D est d'équation $y = f'(a)x + d$. En utilisant que $(a, f(a))$ est un élément de D et doit donc satisfaire cette équation on trouve que $d = f(a) - f'(a)a$. L'équation devient donc

$$y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)(x - a) + f(a),$$

comme énoncé. □

Jusqu'à présent, nous avons toujours parlé de dérivé d'une fonction *en un point*. Donc pour les points où f est dérivable, l'opération "dérivée" nous donne une valeur réelle. Ce qui nous mène à la prochaine définition.

Définition 5.9 (Fonction dérivée). Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction réelle d'une variable réelle ($A, B \subseteq \mathbb{R}$). Appelons C l'ensemble des points de A où f est dérivable. Alors $C \subseteq A$ est le domaine de définition de la fonction

$$f' : C \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f'(x)$$

appelée **fonction dérivée** ou simplement la **dérivée** de f . Remarquons que C est un sous-ensemble de A (éventuellement égal à celui-ci), mais l'ensemble image de la dérivée f' n'a a priori aucun lien avec B . ┘

Remarque 5.10. Si f désigne une fonction, f' désigne sa fonction dérivée. ┘

La fonction dérivée est une nouvelle fonction, dont on peut prendre la dérivée!

Définition 5.11. Si f est dérivable dans un intervalle ouvert $]a, b[$, et si sa dérivée f' est aussi dérivable dans $]a, b[$, alors on définit la **dérivée seconde**, notée f'' par

$$f''(x) = (f')'(x); \quad x \in]a, b[$$

Si f'' admet une dérivée dans $]a, b[$, on l'appelle **dérivée troisième**, notée f''' ou f^3 et ainsi de suite, c'est-à-dire

$$f^{n+1} = (f^n)'$$

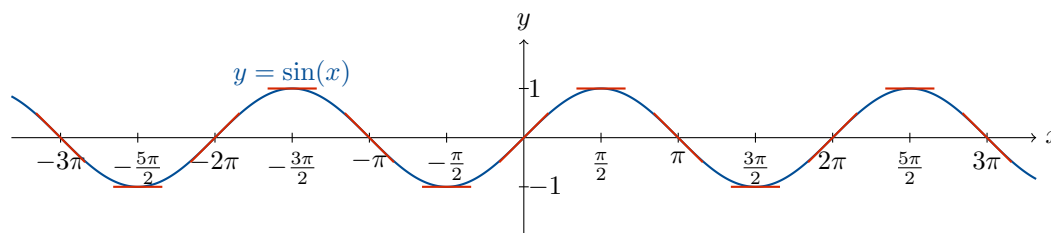


FIGURE 5.3 – Droites tangentes au graphe de la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$.

si f^n est dérivable dans $]a, b[$, avec $n \in \mathbb{N}$. ┘

Sans plus tarder, donnons quelques exemples de dérivées.

5.2 Dérivées de quelques classes de fonctions

La première classe de fonction pour laquelle il est facile de déterminer la dérivée à partir de la Définition 5.3 sont les fonctions affines (c'est-à-dire, les fonctions dont le graphe est une droite).

Proposition 5.12. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto mx + d$ pour certains $m, d \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $f'(a) = m$. En d'autres mots, la fonction dérivée de f est donnée par la fonction $f'(x) = m$. ┘

Preuve. Le graphe de f est une droite de pente m . En tout point, la droite tangente à une droite est la droite elle-même. Donc en tout point, la dérivée vaut m . □

Exemple 5.13 (Dérivée de fonctions constantes). Un cas particulier de la proposition suivante sont les *fonctions constantes* : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto d$. On trouve donc que si f est une fonction constante $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. ┘

Tournons notre attention à présent vers des fonctions moins triviales, rencontrées dans Section 4.3.

Considérons d'abord les fonctions trigonométriques. Nous admettons le résultat suivant sans preuve.

Proposition 5.14. On a que

- * la fonction dérivée de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$ est $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$;
- * la fonction dérivée de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$ est $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -\sin(x)$.

┘

La preuve de ce fait est loin d'être évidente, mais nous pouvons quand même établir un peu d'intuition géométrique : considérons le graphe de la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$ dans Figure 5.3. On voit qu'en $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$ la tangente est horizontale, c'est-à-dire sa pente, donc la dérivée en x vaut 0. Entre $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$ la pente de la tangente est positive, puis elle est négative jusqu'en $x = \frac{3\pi}{2}$, où elle est à nouveau nulle. On voit donc que le signe de la pente a bien le même comportement que $\cos(x)$.

Exercice. Pouvez-vous faire le même genre d'observations pour le graphe de la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$?

┘

Qu'en est-il des fonctions exponentielles ? On en considère une en particulier : l'exponentielle en base e . Le résultat suivant est également admis sans preuve. Il illustre une des raisons pourquoi l'exponentielle en base e est une fonction tellement particulière.

Proposition 5.15. La fonction dérivée de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^x$ est $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^x$.

┘

Regardons si ce résultat a l'air crédible sur le graphe. Dans Figure 5.4, on voit que quand x tend vers $-\infty$, la valeur de e^x est de plus en plus proche de 0 et que la tangente au graphe devient presque horizontale. En $x = 0$ la valeur de $e^x = 1$ et on voit que la droite tangente semble en effet avoir une pente égale à 1. Quand x tend vers $+\infty$, la valeur de e^x et la pente de la tangente tendent vers $+\infty$.

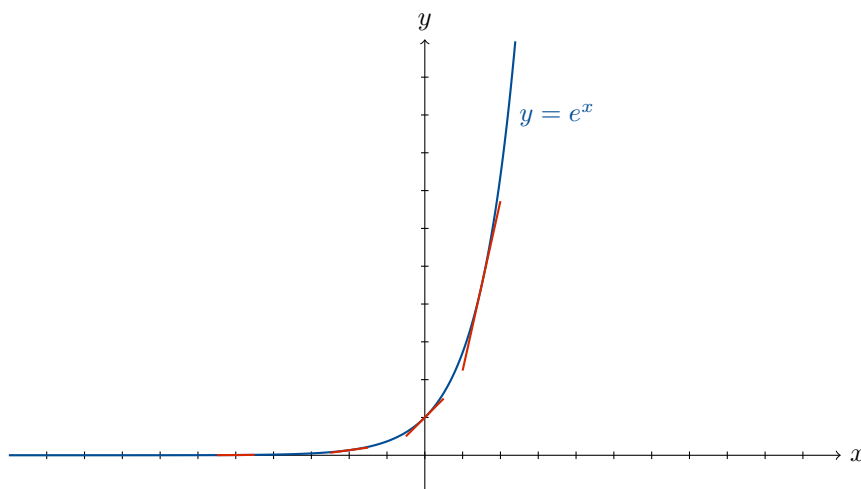
5.3 Dérivées et opérations

Comme on a vu dans le chapitre précédent, en partant de fonctions connues, on peut en construire pleines d'autres en utilisant quelques opérations.

5.3.1 Somme, produit, quotient

Proposition 5.16. Soient f et g des fonctions dérivables au point a , et $c \in \mathbb{R}$ une constante. Alors $f + g$, cf et fg sont des fonctions dérivables en a et

$$* (f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

FIGURE 5.4 – Droites tangentes au graphe de la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^x$.

$$* (cf)'(a) = cf'(a)$$

$$* (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \text{ (Règle de Leibniz).}$$

De plus, si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable au point a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

┘

! Attention La dérivée du produit n'est donc pas le produit des dérivées, et la dérivée d'un quotient n'est pas le quotient des dérivées. **!**

Exemple 5.17. $* (x + \sin(x))' = 1 + \cos(x)$

$$* (x \sin(x))' = \sin(x) + x \cos(x)$$

$$* (4e^x)' = 4e^x$$

$$* (e^x \cos(x))' = e^x \cos(x) - e^x (\sin(x))$$

┘

Comme nous n'avons pas vu la définition rigoureuse d'une dérivée, nous ne pouvons fournir une preuve rigoureuse de Proposition 5.16. Contentons-nous alors d'une justification intuitive en utilisant Remarque 5.5. En partant de cette re-

marque, considérons deux fonctions f et g et écrivons :

$$\begin{cases} f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a) \\ g(x) \approx g'(a)(x-a) + g(a) \end{cases} \quad \text{pour } x \approx a$$

En additionnant les deux équations, on est amené à conclure

$$f(x) + g(x) \approx (f'(a) + g'(a))(x-a) + f(a) + g(a) \quad \text{pour } x \approx a$$

et donc que $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, car si $h(x) \approx m(x-a) + h(a)$ pour $x \approx a$ pour une fonction h et un nombre m , alors nécessairement $m = h'(a)$.

On peut aussi multiplier les deux équations pour trouver, pour $x \approx a$

$$f(x)g(x) \approx (f'(a)g(a) + g'(a)f(a))(x-a) + f(a)g(a) + f'(a)g'(a)(x-a)^2,$$

ce qui donne

$$f(x)g(x) \approx (f'(a)g(a) + g'(a)f(a))(x-a) + f(a)g(a) \quad \text{pour } x \approx a,$$

car $(x-a)^2$ est négligeable par rapport aux deux premiers termes quand $x \approx a$. (On cherche une approximation de $f(x)g(x)$ par une fonction de degré 1.) En regardant le coefficient de $(x-a)$, on trouve la dérivée du produit fg en a . On peut aussi faire le même genre de raisonnement pour le quotient $\frac{f}{g}$ (**exercice**).

Exemple 5.18. On peut calculer

$$\begin{aligned} (\tan(x))' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' && \text{par la définition de } \tan \\ &= \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} && \text{par Proposition 5.16} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} && \text{par Proposition 2.10} \end{aligned}$$

┘

Exercice. Montrez de la même manière que $(\cot(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$.

┘

Exemple 5.19. Considérons $f(x) = x$. Alors on a que $(f \cdot f)(x) = x^2$. En appliquant

Proposition 5.12, on sait que $f'(x) = 1$. Par Proposition 5.16 on sait que

$$(x^2)' = (f \cdot f)'(x) = f'(x)f(x) + f(x)f'(x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$

On peut continuer ce raisonnement :

$$\begin{aligned}(x^0)' &= 0 \\ (x^1)' &= 1 \\ (x^2)' &= (x \cdot x)' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x \\ (x^3)' &= (x^2 \cdot x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2 \\ &\vdots \\ (x^n)' &= nx^{n-1}\end{aligned}$$

┘

Exemple 5.20. Soit $g(x) = x$. Considérons $\frac{1}{g}(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ qui est en fait la fonction $\frac{f}{g}$ où f est la fonction constante 1. On a

$$\begin{aligned}(x^{-1})' &= \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{(x)^2} \\ &= \frac{-1}{x^2} = -x^{-2}.\end{aligned}$$

En répétant ce raisonnement (**exercice**) on peut montrer que pour tout entier négatif n on a également que $(x^n)' = nx^{n-1}$. ┘

En réalité, l'observation des Exemples 5.19 et 5.20 tient pour toute puissance réelle ! Nous admettons le suivant sans preuve.

Proposition 5.21. La fonction dérivée de $x \mapsto x^a$ pour $a \in \mathbb{R}$ est $x \mapsto ax^{a-1}$. ┘

5.3.2 Composition

Proposition 5.22. Soient f et g des fonctions telles que f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

┘

Exemple 5.23. Prenons par exemple $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x^2$. Alors $g \circ f(x) = \sin^2(x)$. On a que $f'(x) = \cos(x)$ et $g'(x) = 2x$, donc

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = 2 \sin(x) \cos(x).$$

L'ordre de composition est importante ! On a $f \circ g(x) = \sin(x^2)$ et

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x.$$

┘

Appliquons la même technique intuitive que plus haut et voyons ce qu'on obtient pour la fonction composée $g \circ f$. Dans ce cas, on a

$$f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a) \quad \text{pour } x \approx a \quad \text{et}$$

$$g(y) \approx g'(f(a))(y - f(a)) + f(g(a)) \quad \text{pour } y \approx f(a)$$

En remplaçant y par $f(x)$ dans le membre de gauche, et par l'approximation de $f(x)$ dans le membre de droite on trouve

$$g(f(x)) \approx g'(f(a))(f'(a)(x - a) + \underbrace{f(a) - f(a)}_{=0}) + f(g(a)) \quad \text{pour } x \approx a$$

Le coefficient de $(x - a)$ est $g'(f(a))f'(a)$, ce qui explique la formule donnant la dérivée d'une composée : en composant les approximations de f autour de a et de g autour de $f(a)$ par des fonctions linéaires on trouve une approximation de $g \circ f$ autour de a par une fonction linéaire. Le coefficient de $(x - a)$ dans cette fonction linéaire est la dérivée de $g \circ f$ en a : $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

Exemple 5.24. * $e^{\sin(x)} = e^{\sin(x)} \cos(x)$

- * $\left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right)' = ((\cos(x))^{-2})' = -2 \cos(x)^{-3}(-\sin(x)) = \frac{2}{\cos^3(x)}$
- * $(\tan(x^2))' = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}$
- * $(e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$.

┘

Le saviez-vous? Une autre manière d'appréhender la composée de fonctions est de penser à des variables réelles, disons x , y et t , qui sont liées les unes aux autres. Par exemple, il se pourrait que y soit fonction de x et que x soit fonction de t . Notons cela $y = y(x)$ et $x = x(t)$. Alors, à travers x , la variable y est une fonction de t . Donc cela a un sens de dériver y par rapport à t . Si t_0 est le point où on dérive et $x_0 = x(t_0)$ alors la formule donnée ci-dessus se réécrit

$$\frac{dy}{dt}(t_0) = \frac{dy}{dx}(x_0) \frac{dx}{dt}(t_0)$$

ou encore, plus simplement (mais attention aux points où on dérive !)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

Notez que dans l'écriture ci-dessus, les dx se "simplifient". Ceci est à prendre avec un grain de sel : on a en aucun cas défini les quantités dx , dy et dt *isolément* ! Par contre, cette manière de voir les choses donne un moyen infaillible pour retenir la règle de dérivation d'une fonction composée.

La notation $\frac{d}{dx}$ fut introduite par Leibniz. Son incroyable facilité d'usage – notamment pour le calcul des dérivées de fonctions composées, comme on vient de le voir – contribua pour beaucoup au succès de la notion de dérivée. ┘

5.3.3 Fonction réciproque

Proposition 5.25. Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction réelle bijective dérivable en a telle que $f'(a) \neq 0$. Alors, la réciproque est dérivable en $f(a)$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

┘

Preuve. Nous ne donnons pas la preuve pour la première assertion. Si on suppose

que f^{-1} est dérivable en $f(a)$ on peut prouver la deuxième assertion comme suit.

Dérivons les deux côtés de l'égalité suivante, en utilisant Proposition 5.22

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

On trouve

$$(f^{-1})'(f(a))f'(a) = 1,$$

et le résultat suit. □

Cette formule d'apparence compliquée permet en fait de calculer la dérivée de la réciproque à partir de la dérivée de la fonction de départ.

Exemple 5.26. Considérons la fonction bijective $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$. Sa fonction inverse est donnée par $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$. Elle est dérivable sur son domaine et donc

$$(f^{-1})'(f(x)) = (f^{-1})'(x^2) = \frac{1}{2x}.$$

Posons maintenant $y = f(x) = x^2$ (où $x \in \mathbb{R}^+$), et on obtient

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}.$$

On retrouve donc un cas particulier de Proposition 5.21 ┘

Exemple 5.27. La fonction $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x)$ est la fonction inverse de la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto e^x$. Cette dernière est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée n'est jamais nulle. Par Proposition 5.25, on a donc que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\ln'(e^x) = \frac{1}{e^x}.$$

En particulier, ceci est vrai pour $x = \ln(y)$, pourvu que $y \in \mathbb{R}_0^+$. On a alors

$$\ln'(y) = \frac{1}{y}.$$

Exemple 5.28. Les fonctions arcsin, arccos et arctan sont les réciproques de fonc- ┘

tions trigonométriques. En appliquant Proposition 5.25, on trouve que

$$(\arcsin)'(\sin(x)) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}},$$

où on a utilisé que pour tout angle $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on a $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$. En prenant $x = \arcsin(y)$, on trouve que

$$(\arcsin)'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

De façon similaire, en utilisant que pour tout $\theta \in [0, \pi]$ on a $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ et en posant $x = \arccos(y)$ on déduit que

$$(\arccos)'(y) = (\arccos)'(\cos(x)) = \frac{1}{-\sin(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Enfin, la dérivée de la fonction $\tan$ peut s'écrire $1 + \tan^2$ (exercice), donc, en posant $x = \arctan(y)$ on déduit que

$$(\arctan)'(y) = \arctan'(\tan(x)) = \cos^2(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

┘

5.4 Quelques calculs

Exemple 5.29 (Dérivées des fonctions exponentielles). Soit $a \in \mathbb{R}_0^+$ et $a \neq 1$. On veut calculer la dérivée de la fonction exponentielle $f(x) = a^x$. En utilisant Proposition 1.87 on peut réécrire

$$f(x) = a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln(a)}.$$

Maintenant, on utilise Proposition 5.15, Proposition 5.16 et Proposition 5.22 pour conclure que

$$f'(x) = e^{x \ln(a)} \ln(a) = a^x \ln(a).$$

┘

Exemple 5.30 (Dérivées de fonctions logarithmiques). Soit $a \in \mathbb{R}_0^+$ et $a \neq 1$. On veut calculer la dérivée de la fonction logarithmique $f(x) = \log_a(x)$. En utilisant Proposition 1.87 on peut réécrire

$$f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Maintenant, on utilise Exemple 5.27, Proposition 5.16 pour conclure que

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln(a)}.$$

┘

Exercice. Re-prouvez le résultat obtenu dans Exemple 5.30 en utilisant Proposition 5.25. ┘

Exercice. Montrez que $(\cot(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$. ┘

5.5 Tableau récapitulatif de fonctions dérivées

Ci-dessous, un tableau récapitulatif des fonctions dérivées simples rencontrées dans ce chapitre.

Fonction $f(x)$	Fonction dérivée $f'(x)$
$mx + d$ où $m, d \in \mathbb{R}$	m
x^a où $a \in \mathbb{R}$	ax^{a-1}
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
a^x où $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$	$a^x \ln(a)$
$\log_a(x)$ où $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$	$\frac{1}{x \ln(a)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\arctan(x) \quad \Bigg| \quad \frac{1}{1+x^2}.$$

! Attention Il est important de connaître le tableau ci-dessus entièrement par cœur. **!**

5.6 Analyser le comportement d'une fonction à l'aide de ses dérivées

En étudiant les dérivées premières et secondes d'une fonction, on peut déduire des informations sur le comportement de la fonction.

5.6.1 Croissance

Commençons par une observation simple : le signe de la fonction dérivée nous donne de l'information sur la croissance de la fonction. En effet, si la dérivée est positive, c'est-à-dire la pente de la droite tangente est positive, on voit que la fonction “évolue vers le haut” quand l'abscisse augmente. Nous admettons le résultat suivant sans preuve.

Proposition 5.31 (Lien entre signe de la dérivée et croissance). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]a, b[$. On a que

- * si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement croissante ;
- * si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement décroissante ;
- * si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est constante.

┘

5.6.2 Extrema

Ensuite, on s'intéresse maxima et minima (locaux) d'une fonction. C'est-à-dire, des valeurs c dans le domaine tels que pour des x près de c , $f(c)$ est maximale (ou minimale) parmi les valeurs de $f(x)$.

Définition 5.32. Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ avec $A \subseteq \mathbb{R}$ une fonction et $c \in A$. On dit que $f(c)$ est un :

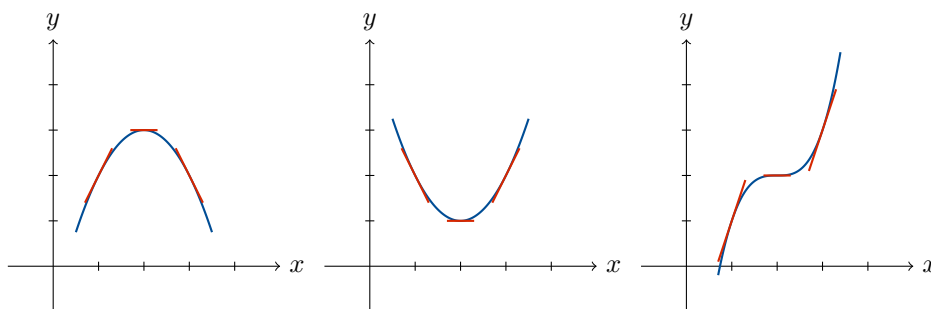


FIGURE 5.5 – Illustration de la Proposition 5.34

- * **maximum local** s'il existe un intervalle ouvert I contenant c tel que $\forall x \in A \cap I, f(x) \leq f(c)$;
- * **minimum local** s'il existe un intervalle ouvert I contenant c tel que $\forall x \in A \cap I, f(x) \geq f(c)$;
- * **extremum local** si c'est un maximum local ou un minimum local.

Un extremum est global si on peut prendre $I = A$ ci-dessus. ┘

On se rend compte que les points où la droite tangente est horizontale vont jouer un rôle important dans l'étude des extrema.

Définition 5.33. Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction réelle à valeurs réelle. Les **points critiques** de f sont les points $a \in A$ tels que $f'(a) = 0$ ou f n'est pas dérivable en a . ┘

Trois cas de figures se distinguent, illustrés dans Figure 5.5.

Proposition 5.34. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $c \in I$ tel que $f'(c) = 0$.

- * Si le signe de f' passe de positif à négatif en c , alors $f(c)$ est un *maximum local* de f .
- * Si le signe de f' passe de négatif à positif en c , alors $f(c)$ est un *minimum local* de f .
- * Si le signe de f' ne change pas en c , alors $f(c)$ n'est pas un *extremum local* de f . ┘

Nous ne traitons pas la preuve de ce résultat dans ce cours.

Remarque 5.35. La définition de point critique de f comprend aussi les valeurs du domaine où f n'est pas dérivable. En effet, ce sont aussi des points candidats pour être un extremum local.

Par exemple si on prend $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ (voir Figure 4.2), alors f a un minimum global en $x = 0$, où la fonction n'est pas dérivable.

Attention, il est possible que f n'est pas dérivable en un point sans que ce point soit pour autant un extremum local. Pouvez-vous dessiner le graphe d'un exemple d'une telle fonction ? ┘

5.6.3 Concavité

Pour terminer, donnons un critère pour la *concavité* du graphe d'une fonction.

Définition 5.36. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et dérivable à l'intérieur de celui-ci. On dit que f est

- * **concave vers le haut** sur I si f' est croissante sur I . Alors les droites tangentes au graphe se trouvent *en dessous* du graphe ;
 - * **concave vers le bas** sur I si f' est décroissante sur I . Alors les droites tangentes au graphe se trouvent *au-dessus* du graphe.
- ┘

Considérons les graphes à gauche et au milieu dans Figure 5.5. Le graphe gauche est concave vers le bas et celui du milieu est concave vers le haut. En combinant cette définition avec Proposition 5.31 on peut établir le suivant.

Proposition 5.37. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et deux fois dérivable à l'intérieur de celui-ci. Alors

- * Si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in I$ alors f est concave vers le haut sur I ;
 - * Si $f''(x) < 0$ pour tout $x \in I$ alors f est concave vers le bas sur I .
- ┘

CHAPITRE 6

Primitives

Trouver une primitive, c'est trouver une fonction à partir de sa dérivée. C'est donc par exemple, trouver la distance parcourue en ne connaissant que la fonction vitesse.

Définition 6.1. Une **primitive** ou **intégrale indéfinie** de f est une fonction F dérivable sur le domaine de f telle que :

$$F'(x) = f(x)$$

┘

Exemple 6.2. * x^2 est une primitive de $2x$

* $\sin(x)$ est une primitive de $\cos(x)$

* $e^x + 3$ est une primitive de e^x .

┘

Remarque 6.3. Si F est une primitive de f alors $F+C$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire, est aussi une primitive de f (voir Exemple 5.13). Ceci montre donc que la notion de primitive n'est pas unique.

┘

Une propriété remarquable et extrêmement importante des primitives est le résultat suivant.

Proposition 6.4. Si F et G sont deux primitives de f sur un même intervalle ouvert I , alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $G(x) = F(x) + C$ pour tout x dans I .

┘

Preuve. La fonction $h := G - F$ a une dérivée nulle sur I . Par Proposition 5.31, on peut conclure que $G - F$ est une fonction constante. $\square$

Les constantes apparaissant de la sorte s'appellent parfois **constante d'intégration**. Dès lors, pour une fonction f définie sur un intervalle, il n'y a peut-être pas une seule primitive, mais quand on en connaît une, disons F , on les connaît toutes : il s'agit de l'ensemble $\{F + C \text{ tel que } C \in \mathbb{R}\}$.

Notation 6.5. Si F est une primitive de f , on notera

$$\int f(x)dx = F(x) \quad \left(\text{ou parfois : } \int f = F \right)$$

ou, lorsqu'on cherche **toutes** les primitives :

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \left(\text{ou parfois : } \int f = F + C \right)$$

Ici, le dx à la fin de l'expression est juste une notation pour exprimer qu'on prend la primitive de la fonction qui est définie en x . Comme d'habitude, x n'a rien de spéciale : on peut très bien définir une fonction $f(y) = y^2$ alors on écrira $\int f(y)dy = \frac{y^3}{3} + C$. $\lrcorner$

Trouver une primitive d'une fonction est l'opération inverse de la dérivation. On a le schéma suivant pour une fonction f et sa primitive F :

$$F + C \xrightarrow{(\)'} f \quad f \xrightarrow{\int} F + C$$

Remarque 6.6. Si f est définie sur un domaine plus compliqué qu'un intervalle alors chaque "morceau" du domaine a sa propre constante d'intégration. $\lrcorner$

Exemple 6.7. On peut montrer que les primitives de la fonction

$$f : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$$

sont toutes les fonctions $F : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$F(x) = \begin{cases} \ln(x) + C_1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On écrit en général plutôt $F(x) = \ln|x| + C$, ce qui n'est pas tout à fait vrai puisqu'on manque des possibilités (la constante peut être différente sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}^-$), mais cela suffit à la plupart des applications concrètes. ┘

Remarque 6.8. Rechercher les primitives d'une fonction donnée $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, c'est résoudre une équation du type

$$y'(x) = f(x) \quad x \in I$$

où y est une *fonction inconnue*, et f est la fonction donnée. C'est notre premier exemple d'**équation différentielle** : une équation dont l'inconnue n'est pas un nombre, mais une fonction, et qui fait intervenir la dérivée de cette fonction. ┘

Exemple 6.9. La fonction $f(x) = x^2$ admet $F(x) = \frac{x^3}{3}$ comme primitive, car

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$$

Donc on peut écrire

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

ce qui est simplement une façon d'écrire qu'on a là *toutes* les primitives de $f(x) = x^2$. ┘

Remarque 6.10. Dans la plupart des cas, nous chercherons les primitives d'une *fonction élémentaire* (c'est-à-dire obtenue en combinant des fonctions exponentielles, logarithmiques, racine n -ième, trigonométriques et trigonométriques inverses en effectuant des sommes, produits, quotients et compositions). Bien que dans nos exemples, les primitives obtenues sont *encore* des fonctions élémentaires, c'est loin d'être toujours le cas. On peut démontrer (mais pas dans le cadre de ce cours) que les primitives d'une fonction élémentaire "prise au hasard" ne sont presque sûrement jamais élémentaires. ┘

Exemple 6.11. L'intégrale indéfinie

$$\int e^{-x^2} dx$$

n'est *pas* une fonction élémentaire. Pourtant, les primitives existent. ┘

6.1 Intégration immédiate

Nous allons maintenant passer en revue une série de techniques d'intégration. Dans les cas les plus simples, on voit “directement” une fonction F dont la dérivée est la fonction f donnée. On obtient alors toutes les primitives de f . C'est ce qu'on appelle l'**intégration immédiate**.

En réécrivant les formules de dérivation vues précédemment (voir Section 5.5), on obtient les formules d'intégration immédiate suivantes.

$$\begin{aligned}
 \int x^r dx &= \frac{x^{r+1}}{r+1} + C & r \neq -1, x \in \mathbb{R}_0^+ \\
 \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C & x \in \mathbb{R}_0 \\
 \int (\sin(x)) dx &= -\cos(x) + C & x \in \mathbb{R} \\
 \int (\cos(x)) dx &= \sin(x) + C & x \in \mathbb{R} \\
 \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx &= \tan(x) + C & x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\
 \int \frac{1}{\sin^2(x)} dx &= -\cot(x) + C & x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\
 \int e^x dx &= e^x + C & x \in \mathbb{R} \\
 \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln(a)} + C & a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R} \\
 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin(x) + C & x \in [-1, 1] \\
 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\arccos(x) + C & x \in [-1, 1] \\
 \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan(x) + C & x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

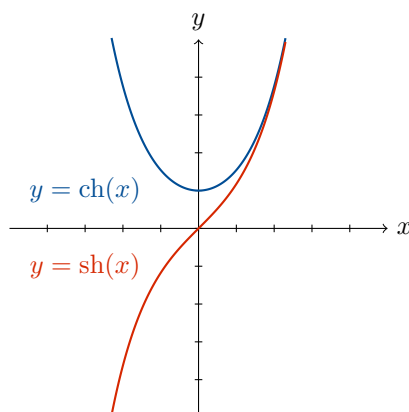


FIGURE 6.1 – Les graphes des fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique

Remarque 6.12. Dans tous ces exemples, on a écrit une seule constante d'intégration C , même dans les cas où il y a plusieurs constantes d'intégration (une par “morceau” du domaine). ┘

6.1.1 Sinus et cosinus hyperboliques

Il existe deux fonctions élémentaires qui se révèlent utiles dans le calcul de primitives.

Définition 6.13. La fonction **cosinus hyperbolique** est définie par

$$\text{ch} : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty[: x \mapsto \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

et la fonction **sinus hyperbolique**

$$\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

┘

Ces fonctions ont les propriétés suivantes, qui sont faciles à vérifier.

Proposition 6.14. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- * $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$
- * $\text{ch}(-x) = \text{ch } x$, c'est-à-dire ch est une fonction paire
- * $\text{sh}(-x) = -\text{sh } x$, c'est-à-dire sh est une fonction impaire

$$* (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh}(x)$$

$$* (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch}(x)$$

┘

Exercice. Montrer les faits suivants :

1. ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$,
2. sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et
3. ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

En déduire que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et ch (restreinte à $\mathbb{R}^+$) une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[1, +\infty[$.

┘

Définition 6.15. Les fonctions cosinus et sinus hyperbolique ont des fonctions réciproques :

$$\operatorname{argch} : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto \operatorname{argch} x$$

et

$$\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{argsh} x.$$

┘

La preuve de la proposition suivante est laissée comme exercice. L'argument est analogue à celui donné dans Exemple 5.28.

Proposition 6.16. On a les fonctions dérivées suivantes :

$$* \operatorname{argch}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \text{ pour } x \in]1, +\infty[$$

$$* \operatorname{argch}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

┘

On peut déduire les formules d'intégration immédiate suivantes.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{ch} x dx &= \operatorname{sh} x + C & x \in \mathbb{R} \\ \int \operatorname{sh} x dx &= \operatorname{ch} x + C & x \in \mathbb{R} \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx &= \operatorname{argch} x + C & x \in]1, \infty[\\ \int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx &= \operatorname{argsh} x + C & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice. Montrer que

* Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

* Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\operatorname{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

┘

6.2 Intégration et opérations

Proposition 6.17 (Linéarité de l'intégration). Supposons que f et g sont des fonctions admettant des primitives F et G . Alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int (a f + b g) = a \int f + b \int g.$$

┘

Preuve. On a que $F' = f$ et $G' = g$. Donc,

$$(a F + b G)' = a F' + b G' = a f + b g.$$

□

Exemple 6.18. Calculons la primitive suivante.

$$\begin{aligned} \int (x^2 + x^3 + \sqrt{x}) dx &= \int x^2 dx + \int x^3 dx + \int \sqrt{x} dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^{3/2}}{3/2} + C \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C \end{aligned}$$

On a utilisé Proposition 6.17 et l'intégration immédiate.

┘

Exemple 6.19. Considérons la fonction polynomiale P définie par

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sont des constantes. Par intégration immédiate,

$$\begin{aligned}\int dx &= x + C \\ \int x dx &= \frac{x^2}{2} + C \\ &\vdots \\ \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\end{aligned}$$

D'où, par linéarité,

$$\begin{aligned}\int P(x) dx &= \int (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) dx \\ &= a_0 \int dx + a_1 \int x dx + a_2 \int x^2 dx + \dots + a_n \int x^n dx \\ &= a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\end{aligned}$$

┐

Exercice. Si $a \in \mathbb{R}$ est une constante, déterminer

$$\int a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n dx.$$

┐

Exemple 6.20. On calcule facilement

$$\begin{aligned}\int \left(e^x - \frac{1}{x} \right) dx &= \int e^x dx - \int \frac{1}{x} dx \\ &= e^x - \ln |x| + C\end{aligned}\quad (x \in \mathbb{R}_0)$$

┐

6.3 Intégration par changement de variable

Rappelons que si f et g sont dérivables, alors $g \circ f$ l'est également et

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Donc

$$\int g'(f(x))f'(x)dx = g(f(x)) + C.$$

Si on écrit $h = g'$, de sorte que $g = \int h$, on peut alors écrire la formule suivante.

Proposition 6.21 (Changement de variable). Soient f et h des fonctions continûment¹dérivable, alors

$$\int h(f(x)) \cdot f'(x)dx = \left(\int h(u)du \right) \Big|_{u=f(x)},$$

où la notation utilisée à droite signifie qu'après l'intégration, on remplace tous les u 's par l'expression $f(x)$. ┘

Exemple 6.22. Si on veut calculer la primitive $\int e^{x^2} 2x dx$, alors on peut considérer $f(x) = x^2$ et $h(u) = e^u$. Alors on a que $h(f(x))f'(x) = e^{x^2} 2x$. On peut donc écrire que

$$\int h(u)du = \int e^u du = e^u + C$$

En utilisant Proposition 6.21 on trouve que

$$\begin{aligned} \int e^{x^2} 2x \, dx &= \int h(f(x))f'(x)dx \\ &= \left(\int h(u)du \right) \Big|_{u=f(x)} = (e^u + C) \Big|_{u=x^2} = e^{x^2} + C. \end{aligned}$$

En effet, on peut vérifier que $(e^{x^2})' = e^{x^2} 2x$. ┘

Remarque 6.23. On peut utiliser le *moyen mnémotechnique* suivant : si $u = f(x)$ alors

$$\frac{du}{dx} = f'(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$$

1. Nous n'avons pas défini la notion de *continûment dérivable*. Il s'agit d'une hypothèse nécessaire dans cette proposition pour que l'expression ait un sens, mais vous ne devez pas connaître ces détails. Pour les curieux : une fonction est dite *continûment dérivable* si elle est dérivable et sa fonction dérivée est continue.

Attention, cette seconde égalité n'a aucun sens ! La notation " $\frac{d}{dx}$ " signifie "la dérivée par rapport à x ", et " $\int dx$ ", la primitive de la fonction définie en x . Écrire " dx " en isolation, n'a aucun sens mathématique. C'est une astuce mnémotechnique à garder pour les feuilles de brouillon. ┘

! Attention Ne jamais mélanger ancienne et nouvelle variable au sein de l'intégrale ! Si l'ancienne variable s'appelle x et la nouvelle s'appelle u : dx apparaissait au début, il *doit* être remplacé par *une* occurrence de du . Il ne peut y avoir de du au carré (ou dans une autre fonction), de du au dénominateur, ou de " du ajouté à autre chose". !

Exemple 6.24. Illustrons Remarque 6.23 avec un exemple.

$$\int 3x^2(x^3 + 5)^9 dx$$

On remarque qu'en posant $u = x^3 + 5$, on obtient $\frac{du}{dx} = 3x^2$. Et donc

$$\int 3x^2(x^3 + 5)^9 dx = \int \underbrace{(x^3 + 5)^9}_{=u^9} \cdot \underbrace{3x^2 dx}_{=du} = \int u^9 du$$

De $\int u^9 du = \frac{u^{10}}{10} + C$, on arrive à

$$\int 3x^2(x^3 + 5)^9 dx = \frac{(x^3 + 5)^{10}}{10} + C.$$

On vérifiera qu'en dérivant le membre de droite, on obtient bien l'intégrande dans le membre de gauche. ┘

Exemple 6.25. Pour calculer

$$\int \sin^4 x \cos x dx$$

on pose $u = \sin x$, et comme $\frac{du}{dx} = \cos(x)$, on obtient

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Notons qu'il faut souvent transformer l'intégrande avant de pouvoir effectuer

un changement de variable.

Exemple 6.26. Dans cet exemple, nous montrons comment la formule peut s'utiliser "à l'envers". On considère le calcul suivant :

$$\int \frac{u^3}{\sqrt{1+u^2}} du$$

et l'on pose $u = \tan(t)$ (ce qui semble compliquer les choses plutôt que de les simplifier !) de sorte que $\frac{du}{dt} = \frac{1}{\cos^2(t)}$ et l'intégrale devient, en utilisant l'égalité $1 + \tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$,

$$\int \frac{\tan^3(t)}{\sqrt{1+\tan^2(t)}} (1 + \tan^2(t)) dt = \int \frac{\sin^3(t)}{\cos^4(t)} dt.$$

Ce nouveau calcul de primitive semble à peine plus simple, mais une astuce classique consiste à transformer des sinus en cosinus (voir ci-dessous). Voyons cela en posant à présent $v = \cos(t)$, ce qui donne $\frac{dv}{dt} = -\sin(t)$ vu que $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$, l'intégrale devient alors :

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2(t)}{\cos^4(t)} \sin(t) dt &= \int \frac{v^2 - 1}{v^4} dv \\ &= \frac{-1}{v} + \frac{1}{3v^3}. \end{aligned}$$

On veut maintenant transformer toutes les occurrences de v en u . Pour cela, on se rappelle que $v = \cos(t) = \sqrt{\cos^2(t)} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(t)}} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$

$$\frac{-1}{v} + \frac{1}{3v^3} = \frac{1}{v} \left(\frac{1}{3v^2} - 1 \right) = \sqrt{1+u^2} \left(\frac{u^2 - 2}{3} \right).$$

┘

Exemple 6.27. L'exemple précédent pouvait se résoudre également comme suit :

$$\begin{aligned}
 \int \frac{u^3}{\sqrt{1+u^2}} du &= \int \left(\frac{u(u^2+1)}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \right) du \\
 &= \int \left(\sqrt{u^2+1} - \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \right) u du \\
 &= \frac{1}{2} \int \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right) dz \\
 &= \frac{1}{3} \sqrt{z^3} - \sqrt{z} \\
 &= \frac{1}{3} \sqrt{(1+u^2)^3} - \sqrt{1+u^2}.
 \end{aligned}$$

où l'on a posé $z = u^2 + 1$ de sorte que $\frac{dz}{du} = 2u$. ┘

Remarque 6.28. Il n'y a pas de "bonne manière" de résoudre un calcul de primitive : l'important est d'obtenir une expression dont la dérivée correspond à l'expression dont on part. Par exemple, $-\arccos(x)$ et $\arcsin(x)$ sont deux primitives de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. ┘

6.4 Intégration par parties

Tout comme pour les techniques précédentes, le point de départ est une règle de dérivation. Si f et g sont deux fonctions dérivables, la formule de Leibniz (ou règle de dérivation d'un produit) nous dit

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{donc} \quad f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - f(x)g'(x)$$

En intégrant, on trouve la formule suivante.

Proposition 6.29 (Formule d'intégration par parties). Soient f et g des fonctions continûment dérivables. Alors

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$
┘

Ici, la difficulté est de pouvoir reconnaître quand la fonction à intégrer peut s'écrire sous la forme d'un produit $f'(x)g(x)$. Ce qu'on veut, c'est intégrer un des

facteurs et dériver l'autre, de telle manière à obtenir une intégrale indéfinie plus simple.

Exemple 6.30. Pour calculer

$$\int x \cos x dx$$

posons

$$g(x) = x, \quad f'(x) = \cos x$$

et donc

$$g'(x) = 1, \quad f(x) = \sin x$$

de sorte que le calcul devient

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= (\sin x)x - \int (\sin x)1 dx \\ &= x \sin x - (-\cos x) + C \\ &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

Remarquons qu'on aurait très bien pu intégrer x et dériver $\cos x$, au lieu de dériver x et intégrer $\cos x$. Mais on aurait obtenu

$$\int x \cos x dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \int \frac{x^2}{2} \cos x dx$$

ce qui est en fait plus complexe que l'intégrale de départ et semble donc une voie sans issue. ┘

Remarque 6.31. Cet exemple montre que le choix de $f'(x)$ et $g(x)$ est crucial dans une intégration par parties, et que si un premier essai s'est soldé par un échec, on a tout intérêt à faire un second essai en inversant les rôles de $f'(x)$ et $g(x)$. ┘

Exemple 6.32. Calculer

$$\int \ln x dx$$

Remarquons que $\ln x$ est défini pour $x > 0$ donc l'intervalle où on travaille est $I =]0, \infty[$. Dans le cas qui nous occupe, l'intégrande n'est pas un produit de deux

fonctions mais bien une seule fonction. Bien sûr, on peut toujours écrire

$$\int \ln x dx = \int 1 \ln x dx$$

Ce qui donne l'idée de prendre

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln x, & f'(x) &= 1 \\ g'(x) &= \frac{1}{x}, & f(x) &= x \end{aligned}$$

Alors

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

pour $x \in]0, \infty[$. ┘

6.5 Décomposition en fractions simples

Rappelons qu'une fonction rationnelle est une fonction du type $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes. Un résultat surprenant est que l'intégrale indéfinie d'une telle fonction,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

est *toujours* une fonction élémentaire (mais pas toujours une fonction rationnelle!). Ceci se démontre grâce à une technique d'intégration appelée **décomposition en fractions simples**. Cette technique ayant d'autres applications que le calcul de primitives, nous verrons en détails comment l'appliquer.

6.5.1 Fraction simple

Définition 6.33. Une **fraction simple** est une fonction rationnelle dont le dénominateur est une puissance d'un polynôme irréductible (voir Définition 1.107) de degré n (n vaut 1 ou 2) et dont le numérateur a un degré strictement inférieur à n . ┘

Remarque 6.34. En d'autres termes, les fractions simples sont de la forme :

$$\frac{A}{(Bx + C)^k} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax + B}{(Cx^2 + Dx + E)^k}$$

avec $D^2 - 4CE < 0$, pour certaines constantes réelles A, B, C, D, E et un entier $k > 0$ ┘

Exemple 6.35. Voici quelques fractions simples :

$$\frac{27}{(-3x + 1)^3} \qquad \frac{2x - 4}{(2x^2 + 2x + 4)^4}.$$
┘

Remarque 6.36. On peut toujours ramener une fraction simple à l'une des formes suivantes :

$$\frac{u}{(x - a)^k} \quad \text{ou} \quad \frac{ux + v}{((x - b)^2 + c^2)^k}$$

pour certaines constantes réelles u, v, a, b , un réel $c > 0$ et un entier $k > 0$.

Exemple 6.37. Voici quelques fractions simples :

$$\frac{27}{(-3x + 1)^3} \qquad \frac{2x - 4}{(2x^2 + 2x + 4)^4}.$$
┘

Exemple 6.38. On a

$$\begin{aligned} \frac{27}{(-3x + 1)^3} &= \frac{-1}{\left(x - \frac{1}{3}\right)^3} \\ \frac{2x - 4}{(2x^2 + 2x + 4)^4} &= \frac{\frac{1}{8}x - \frac{1}{4}}{(x^2 + x + 2)^4} = \frac{\frac{1}{8}x - \frac{1}{4}}{\left((x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}\right)^4}. \end{aligned}$$
┘

L'intérêt des fractions simples pour l'intégration est le suivant.

1. Il est relativement simple de trouver la primitive de toute fraction simple.
2. Toute fonction rationnelle se décompose comme une somme de polynômes et fractions simples.

Remarque 6.39. Nous avons déjà vues toutes les techniques nécessaires pour trouver la primitive d'une fraction simple *sauf* une fraction simple de la forme

$$\frac{Ax + B}{(Cx^2 + Dx + E)^k}$$

pour un $k \geq 2$. Ce cas de figure ne se produira pas dans les exercices. ┘

Voici des exemples qui illustrent comment trouver des primitives de fractions simples.

Exemple 6.40. Si on veut calculer

$$I = \int \frac{1}{(x-1)^5} dx,$$

On pose $u = x - 1$, alors $\frac{du}{dx} = 1$ et vu que

$$I = \int \frac{1}{u^5} du = \frac{u^{-4}}{-4} + C,$$

on trouve que

$$I = \int \frac{1}{(x-1)^5} dx = \frac{-1}{4(x-1)^4} + C$$
┘

Exemple 6.41. Si on veut calculer

$$I = \int \frac{3x-1}{x^2+4x+6} dx,$$

on commence par se débarrasser du terme de degré un dans le numérateur en faisant la transformation

$$I = \int \frac{3x-1}{(x+2)^2+2} dx.$$

On pose alors $u = x + 2$ et on trouve

$$I = \int \frac{3u-7}{u^2+2} du.$$

Par la Proposition 6.17 on a que $I = 3J - 7K$ où

$$J = \int \frac{u}{u^2+2} du \qquad K = \int \frac{1}{u^2+2} du.$$

Calculons ces primitives séparément. Pour J on pose $t = u^2 + 2$, donc $\frac{dt}{du} = 2u$. On obtient que

$$J = \int \frac{1}{t} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{\ln|t|}{2}.$$

En remplaçant t par u et puis u par x on trouve que

$$J = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 4x + 6|.$$

Maintenant on transforme K pour trouver

$$K = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} du,$$

ce qui nous permet de poser $v = \frac{u}{\sqrt{2}}$ pour tomber sur une expression connue

$$K = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{v^2 + 1} dv = \arctan(v) = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right).$$

On peut donc conclure que

$$I = \frac{1}{2} \left(3 \ln|x^2 + 4x + 6| - 7\sqrt{2} \arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) \right) + C.$$

┘

On peut donc relativement facilement trouver les primitives de fractions simples. Précisons maintenant ce qu'on veut dire par *toute fonction rationnelle se décompose comme une somme de polynômes et fractions simples*.

Proposition 6.42. Toute fonction rationnelle est la somme

1. d'un polynôme (éventuellement constant, voire nul), et
2. de fractions simples dont le dénominateur divise celui de la fonction rationnelle.

De plus, cette décomposition est unique.

┘

En pratique, pour obtenir cette décomposition en fraction simple d'une fonction rationnelle, il faudra

1. si nécessaire, appliquer l'algorithme de division Euclidienne pour obtenir la somme d'un polynôme avec une nouvelle fonction rationnelle, dont le numé-

rateur est de degré inférieur à celui du dénominateur ;

2. factoriser le dénominateur en ses composantes irréductibles ;
3. écrire toutes les fractions simples possibles pouvant intervenir dans la décomposition et déterminer les constantes.

Illustrons cette procédure à l'aide de quelques exemples.

Exemple 6.43. On veut calculer la primitive suivante.

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx$$

La fonction à intégrer est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, qui est la réunion de trois intervalles ouverts. En factorisant le dénominateur, nous pouvons réécrire notre intégrande :

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$$

On cherche maintenant à décomposer l'intégrande comme somme de fractions simples :

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$$

où A et B sont des constantes à déterminer. On comprend immédiatement l'intérêt d'une telle décomposition. Si on parvient à trouver $A, B \in \mathbb{R}$ comme ci-dessus, alors

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1-x^2} dx &= \int \frac{1}{(1-x)(1+x)} dx \\ &= \int \left(\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \right) dx \\ &= A \int \frac{1}{1-x} dx + B \int \frac{1}{1+x} dx \\ &= -A \ln |1-x| + B \ln |1+x| + C \end{aligned}$$

Dans un sens, le calcul de notre intégrale indéfinie repose entièrement sur le calcul des constantes A et B de la décomposition. Voyons comment les déterminer.

Repartons de l'équation

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$$

que nous voulons satisfaire, et réexprimons le membre de droite :

$$\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A(1+x) + B(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{A+B+(A-B)x}{(1-x)(1+x)}$$

cette expression doit être égale à

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)}$$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, et donc en particulier il faut

$$A+B+(A-B)x = 1$$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ (et par continuité : pour tout $x \in \mathbb{R}$ sans restriction.) Ceci revient à demander

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=0 \end{cases}$$

(on identifie les coefficients des puissances de x qui se correspondent). Ce système de deux équations à deux inconnues possède une et une seule solution, $A=B=\frac{1}{2}$. On a pu déterminer les constantes A et B qui rendent la décomposition possible. En conclusion, on trouve

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln|1-x| + \frac{1}{2} \ln|1+x| + C = \ln \sqrt{\frac{|1+x|}{|1-x|}} + C$$

pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Bien sûr, il est prudent de vérifier en re-dérivant ! ┘

Exemple 6.44. Considérons la fonction rationnelle

$$\frac{3x^5 + 2x^2 - 3}{-x^3 + 4x}.$$

On applique l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{r}
 3x^5 \quad \quad + 2x^2 \quad \quad - 3 \quad \left| \begin{array}{l} -x^3 + 4x \\ -3x^2 - 12 \end{array} \right. \\
 \underline{-3x^5 + 12x^3} \\
 12x^3 + 2x^2 \\
 \underline{-12x^3 + 48x} \\
 2x^2 + 48x - 3
 \end{array}$$

On trouve donc que

$$3x^5 + 2x^2 - 3 = (-3x^2 - 12)(-x^3 + 4x) + 2x^2 + 48x - 3.$$

Donc

$$\frac{3x^5 + 2x^2 - 3}{-x^3 + 4x} = -3x^2 - 12 + \frac{2x^2 + 48x - 3}{-x^3 + 4x}.$$

Maintenant, il faut décomposer le dénominateur $-x^3 + 4x$ en facteurs irréductibles.

On a clairement que

$$-x^3 + 4x = -x(x-2)(x+2).$$

On cherche donc à réécrire

$$\frac{2x^2 + 48x - 3}{-x^3 + 4x} = \frac{2x^2 + 48x - 3}{-x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{-x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$$

pour certaines valeurs de $A, B, C \in \mathbb{R}$. En mettant sur le même dénominateur on a

$$\begin{aligned}
 \frac{2x^2 + 48x - 3}{-x(x-2)(x+2)} &= \frac{A(x-2)(x+2) + B(-x)(x+2) + C(-x)(x-2)}{-x(x-2)(x+2)} \\
 &= \frac{(A-B-C)x^2 - 2(B-C)x - 4A}{-x(x-2)(x+2)}.
 \end{aligned}$$

En comparant les coefficients de polynômes du numérateur, on a que

$$\begin{cases} 2 = A - B - C \\ 48 = -2(B - C) \\ -3 = -4A \end{cases} .$$

On trouve qu'on doit avoir

$$A = \frac{3}{4} \qquad B = \frac{-101}{8} \qquad C = \frac{91}{8}.$$

Ce qui nous permet de conclure que

$$\frac{3x^5 + 2x^2 - 3}{-x^3 + 4x} = -3x^2 - 12 - \frac{3}{4x} - \frac{-101}{8x - 16} + \frac{91}{8x + 16}.$$

On a donc transformé cette fonction rationnelle en quelque chose dont on peut trouver facilement la primitive (**exercice**). ┘

CHAPITRE 7

Nombres complexes

7.1 Motivations

Rappelons que le plan muni de coordonnées cartésiennes est en bijection avec $\mathbb{R}^2$. C'est-à-dire qu'à chaque point du plan on associe exactement une paire de coordonnées cartésiennes, et réciproquement à chaque paire de coordonnées (un élément de $\mathbb{R}^2$) on associe un point du plan.

Rappelons (voir Section 3.4.1) encore qu'à un point de coordonnées (x, y) on peut également associer les coordonnées polaires (ρ, θ) où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ représente la distance par rapport à l'origine, et θ représente l'angle (orienté) entre le demi-axe des abscisses positives et la demi-droite issue de l'origine passant par (x, y) . Le lien entre les deux types de coordonnées est donné par

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Considérons l'**homothétie** de centre $(0, 0)$ et de rapport k . C'est-à-dire la fonction qui se décrit en coordonnées cartésiennes par

$$(x, y) \mapsto (kx, ky).$$

En coordonnées polaires, elle s'écrit $(\rho, \theta) \mapsto (k\rho, \theta)$ lorsque $k > 0$, et elle s'écrit $(\rho, \theta) \mapsto (-k\rho, \theta + \pi)$ lorsque $k < 0$.

Si on considère maintenant la rotation de centre $(0, 0)$ et d'angle φ , elle s'écrit naturellement en coordonnées polaires : $(\rho, \theta) \mapsto (\rho, \theta + \varphi)$. Pour obtenir sa version cartésienne $(x, y) \mapsto (x', y')$, il suffit d'écrire les coordonnées cartésiennes du point d'arrivée et de développer grâce aux formules trigonométriques :

$$\begin{aligned}(x', y') &= (\rho \cos(\theta + \varphi), \rho \sin(\theta + \varphi)) \\ &= (\rho \cos(\theta) \cos(\varphi) - \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) + \rho \sin(\theta) \cos(\varphi)) \\ &= (x \cos(\varphi) - y \sin(\varphi), x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi))\end{aligned}$$

L'application $(x, y) \mapsto (x \cos(\varphi) - y \sin(\varphi), x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi))$ représente donc la rotation d'angle φ en coordonnées cartésiennes.

Définissons un “produit complexe” sur les points de $\mathbb{R}^2$:

$$(a, b)(x, y) = (ax - by, ay + bx).$$

Cette formule est particulièrement intéressante, car lorsque $(a, b) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, la multiplication par (a, b) revient à faire la rotation d'angle φ ; et lorsque $(a, b) = (k, 0)$, cela revient à l'homothétie de rapport k .

Afin d'alléger la notation, nous allons noter $a+bi$ au lieu de (a, b) . En particulier le couple $(a, 0)$ est simplement noté $a + 0i$ ou a , tandis que le couple $(0, 1)$ est simplement noté i . Nous ré-écrivons alors la formule du produit complexe sous la forme suivante :

$$(a + ib)(x + iy) = ax - by + i(ay + bx)$$

Dorénavant, ces éléments seront appelés “nombres complexes”.

Remarque 7.1. Ceci laisse craindre une certaine ambiguïté : si a est un nombre réel, faut-il voir a comme un nombre réel ou comme le nombre complexe $a + 0i$?

Heureusement, que a soit vu comme un réel ou un complexe, le résultat est toujours le même. Par exemple en écrivant le produit complexe $(a + 0i)(c + 0i)$, la réponse est $ac + 0i$. En d'autres termes le produit complexe étend le produit réel, ce qui justifie la notation. ┘

7.2 Définitions

Résumons ce que nous avons introduit jusqu'à présent.

Définition 7.2. L'ensemble des **nombres complexes** est l'ensemble noté

$$\mathbb{C} = \{ a + bi \text{ tel que } a, b \in \mathbb{R} \}.$$

Si $z = a + bi$ est un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors a est sa **partie réelle**, dénotée $\operatorname{Re} z$ et b sa **partie imaginaire**, dénotée $\operatorname{Im} z$. ┘

En d'autres termes, lorsque nous dirons "Soit z un nombre complexe, ..." nous supposons donc nous donner $z = a + bi$ pour certains réels a, b .

Proposition 7.3. Deux nombres complexes $a + bi$ et $c + di$ sont égaux si et seulement si $a = c$ et $b = d$. ┘

Preuve. Ceci découle du fait que $a + ib$ n'est autre que (a, b) . Dès lors l'égalité $a + bi = c + di$ se réécrit $(a, b) = (c, d)$ d'où le résultat. □

Définition 7.4. Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelé un nombre **imaginaire pur**. ┘

Remarque 7.5. Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est constitué d'un seul nombre réel. Le produit de deux tels réels est encore un nombre réel. Ceci permet d'écrire $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$: l'ensemble des nombres réels est vu comme le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ correspondant aux nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle. ┘

Définition 7.6. Nous avons introduit les nombres complexes comme des points du plan, avec une multiplication complexe héritée des formules pour les homothéties et rotations. Dans cette vision, on appelle ce plan le **plan de Gauß**. La plupart des opérations sur les nombres complexes auront leur interprétation géométrique dans ce plan. ┘

7.3 Opérations

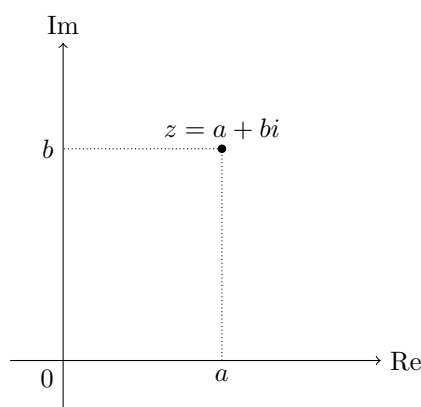


FIGURE 7.1 – Illustration de nombres complexes dans le plan de Gauß

7.3.1 Somme

Définition 7.7. La **somme** de deux nombres complexes $z = a + bi$ et $z' = c + di$ est le nombre complexe noté

$$z + z' := (a + c) + (b + d)i.$$

En d'autres termes : la somme de deux nombres complexes s'obtient en additionnant les parties réelles et les parties imaginaires. ┘

Remarque 7.8. Notons que la définition ci-dessus est cohérente avec la définition des couples de réels : $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$. ┘

L'addition des nombres complexes a les propriétés suivantes.

Proposition 7.9. Pour tout $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ on a que

- * $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$ (associativité);
- * $z + z' = z' + z$ (commutativité);
- * $z + 0 = z$ (existence d'un neutre : 0);
- * Il existe $-z \in \mathbb{C}$ tel que $z + (-z) = 0$ (existence d'un opposé).

De plus, si $z = a + bi$, alors on a $\boxed{-z = -a - ib}$. ┘

Remarque 7.10. Notons que la propriété d'associativité permet de ne pas s'inquiéter de l'ordre dans lequel on réalise les opérations, tout comme pour les nombres réels : $(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$ ou $2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$. ┘

Preuve. Prouvons la commutativité : soit $z = a + ib$ et $z' = c + id$. Alors

$$z + z' = (a + c) + i(b + d) \quad \text{et} \quad z' + z = (c + a) + i(d + b)$$

qui sont bien identiques, puisque l'addition des réels est elle-même commutative.

Les autres propriétés peuvent se prouver similairement. □

Exemple 7.11. * $(1 + i) + (2 + i) = 3 + 2i$

* $(-1 + i) + (3 - i) = 2$

* $-1 + 2i + 1 + 2i = 4i$

┘

7.3.2 Produit

Définition 7.12. Le produit sur $\mathbb{C}$ est défini par :

$$(a + ib)(x + iy) := ax - by + i(ay + bx).$$

┘

En particulier,

$$i^2 = (0 + i)(0 + i) = (0 - 1) + 0i = -1.$$

Ceci est évidemment une relation fondamentale : il s'agit d'un nombre dont le carré est strictement négatif, ce qui n'a aucun sens dans les nombres réels. C'est pour ça qu'on considère que les nombres complexes sont un ensemble qui *étend strictement* les nombres réels.

Exemple 7.13. * $12(2 + i) = 24 + 12i$

* $(2 - i)(4 + i) = 9 - 2i$

* $(1 + i)(1 + i) = 2i$

* $(1 + i)(1 - i) = 2$

┘

Le produit des nombres complexes a les propriétés suivantes.

Proposition 7.14. Pour tout $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ on a

- * $(zz')z'' = z(z'z'')$ (associativité);
- * $zz' = z'z$ (commutativité);
- * $1z = z$ (existence d'un neutre : 1);
- * $z(z' + z'') = zz' + zz''$ (distributivité par rapport à l'addition);
- * il existe $z^{-1} \in \mathbb{C}$ tel que $zz^{-1} = 1$ (existence d'un inverse).

De plus, si $z = a + ib$, alors on a $z^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$. ┘

Preuve. Faisons, pour l'exemple, la commutativité : notons $z = a + ib$ et $z' = x + iy$ et calculons

$$(a + ib)(x + iy) = ax - by + i(ay + bx)$$

tandis que

$$(x + iy)(a + ib) = xa - yb + i(ya + xb).$$

Les membres de droite sont égaux (car la multiplication réelle est elle-même commutative) dès lors nous avons le résultat.

Les autres propriétés se prouvent similairement. Pour l'existence de l'inverse, il suffit de vérifier que la formule donnée pour z^{-1} donne le résultat escompté. Le lecteur est également invité à consulter la Section 7.3.5 à ce sujet. □

Remarque 7.15. En particulier, vue la propriété de distributivité, on peut “oublier” la formule du produit complexe et se contenter de distribuer et d'utiliser la règle $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} (a + ib)(x + iy) &= ax + aiy + ibx + ibiy \\ &= ax + i(ay + bx) + byi^2 \\ &= ax - by + i(ay + bx). \end{aligned}$$

┘

7.3.3 Conjugaison

Les notions de somme et produit de nombres complexes étendent des opérations similaires sur les nombres réels. L'opération de conjugaison est quant à elle complètement nouvelle.

Définition 7.16. Si $z = a + ib$ est un nombre complexe, on définit son **conjugué** par

$$\bar{z} = a - ib.$$

Exemple 7.17. * $\overline{2+i} = 2-i$

* $\overline{2-i} = 2+i$

* $\overline{3+2i(1-5i)} = \overline{3+2i-10i^2} = \overline{13+2i} = 13-2i$

Proposition 7.18. La conjugaison complexe vérifie, pour tout $z \in \mathbb{C}$

* $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$

* $z = \overline{\bar{z}}$ (involutivité)

* $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$

* $\overline{z^2} = \bar{z}^2$, $\overline{z^3} = \bar{z}^3$, etc.

Preuve. Notons $z = a + ib$ et $z' = x + iy$ et prouvons la première propriété :

$$\begin{aligned} \overline{z+z'} &= \overline{(a+ib) + (x+iy)} \\ &= \overline{a+x+i(b+y)} \\ &= a+x-i(b+y) \\ &= a-ib+x-iy \\ &= \bar{z} + \bar{z'}. \end{aligned}$$

Pour la deuxième de ces propriétés : si $z = a + ib$, alors $\bar{z} = a - ib$, et donc $\overline{\bar{z}} = a - i(-b) = a + ib$.

Pour la troisième, nous avons d'une part :

$$\overline{(a+ib)(x+iy)} = \overline{ax-by+i(ay+bx)} = ax-by-i(ay+bx)$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}\overline{a + ibx + iy} &= (a - ib)(x - iy) \\ &= ax - (-b)(-y) + i(a(-y) + (-b)x) \\ &= ax - by - i(ay + bx)\end{aligned}$$

ce qui montre l'égalité.

La dernière de ces propriétés est une application de la précédente en prenant $z' = z$, puis $z' = z^2$, etc. □

7.3.4 Module

La conjugaison complexe a une propriété que nous n'avons pas encore mentionnée : si $z = a + ib$, alors

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$$

Le produit d'un nombre complexe avec son conjugué est donc un nombre réel positif, et ce réel est nul si et seulement si z est le nombre complexe nul (c'est-à-dire $a = b = 0$).

Définition 7.19. Le **module** de $z = a + bi$ est le nombre réel noté $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$. ┘

En conséquence de quoi, le module d'un nombre complexe est toujours positif. Géométriquement, il s'agit précisément de la norme du vecteur (a, b) , c'est-à-dire la distance entre l'origine et le nombre complexe z vu comme point du plan (voir Figure 7.1).

Exemple 7.20. * $|-4i| = 4$

* $|1 + i| = \sqrt{2}$

* $|1 - 2i| = \sqrt{5}$ ┘

Proposition 7.21. Les propriétés suivantes sont vérifiées pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$:

* $|zz'| = |z| |z'|$

* $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

$$* \quad |z| \geq 0$$

$$* \quad |z| = 0 \iff z = 0$$

┘

Preuve. La première propriété se vérifie par un calcul (à ne pas confondre avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz!) : notons $z = a + ib$ et $z' = c + id$

$$zz' = ac - bd + i(ad + bc)$$

dès lors

$$|zz'|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd$$

et par ailleurs

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \quad |z'|^2 = c^2 + d^2 \quad |z||z'| = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

ce qui est bien la même chose.

La deuxième propriété est l'inégalité triangulaire (puisque le module, géométriquement, est la norme du vecteur correspondant!).

Les deux dernières propriétés ont déjà été justifiées précédemment. □

Remarque 7.22. En particulier, si z est réel (c'est-à-dire, sa partie imaginaire est nulle), le module de z est simplement la valeur absolue. Ceci explique pourquoi la notation $|\cdot|$ est la même pour la valeur absolue et le module. ┘

7.3.5 Inverse

Nous avons déjà vu (Proposition 7.14) que si $z = a + ib$, alors $\frac{a-ib}{a^2+b^2}$ est son inverse. Cet inverse est généralement noté z^{-1} ou $\frac{1}{z}$. La formule est vraie, comme nous pouvons le vérifier en calculant le produit, mais elle semble compliquée.

Cette formule découle en fait de celle définissant le module : puisque

$$z\bar{z} = a^2 + b^2$$

nous en déduisons

$$z \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2} = 1$$

ce qui justifie la formule pour l'inverse :

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$$

qui n'est autre que ce que nous avons donné. Nous pourrions écrire également :

$$\boxed{z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}}$$

ce qui est très simple à mémoriser.

7.3.6 Exponentiation

Nous avons les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}(a + ib)^2 &= a^2 - b^2 + 2iab \\ (a + bi)^3 &= a^3 - 3ab^2 + i(3ba^2 - b^3) \\ &\vdots\end{aligned}$$

Les formules, même si elles deviennent rapidement complexes à retenir, découlent seulement de la distributivité.

7.3.7 Argument

Nous avons déjà vu que le module d'un nombre complexe z est la distance entre le point du plan représenté par z et l'origine (le nombre complexe nul). Ceci appelle une autre définition.

Définition 7.23. L'**argument** d'un nombre complexe z est l'angle polaire de z vu comme un point du plan. ┘

On note généralement $\arg z$ cet angle, mais nous savons que la mesure de cet angle n'est défini qu'à un multiple entier de 2π près ! L'argument du nombre complexe nul n'est pas défini. La mesure de cet angle, de la même manière que pour les coordonnées polaires, est choisie généralement entre 0 et 2π : c'est sa **détermination principale**, cependant il arrivera souvent d'utiliser des angles entre $-\pi$ et π .

Exemple 7.24. La détermination principale des arguments de certains nombres complexes :

- * $\arg i = \frac{\pi}{2}$;
- * $\arg r = 0$ si r est un réel positif ;
- * $\arg r = \pi$ si r est un réel strictement négatif.
- * $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$;

┘

Exemple 7.25. Le nombre complexe $z = \cos \theta + i \sin \theta$ a pour argument θ .

┘

Proposition 7.26. Pour des complexes z et z' nous avons (à un multiple entier de 2π près) :

$$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad (\text{cas particulier : } \arg(-z) = \pi + \arg z)$$

┘

De façon générale, l'argument de z se détermine via les formules

$$\frac{a}{|z|} = \cos(\arg(z)) \quad \frac{b}{|z|} = \sin(\arg(z))$$

ou encore par la formule

$$\frac{b}{a} = \tan(\arg(z)) \quad \text{en vérifiant le quadrant.}$$

La vérification du quadrant vient de ce que la tangente ne détermine l'angle qu'à π près, mais que le signe de a et b permettent de lever cette indétermination.

7.4 Forme polaire ou trigonométrique

Dans le plan de Gauß, un complexe z représente un point. Ce point admet des coordonnées cartésiennes : la partie réelle et la partie imaginaire de z . Il admet également des coordonnées polaires : le module et l'argument de z . Le module est généralement noté ρ et l'argument est souvent noté θ ; ils permettent de déterminer

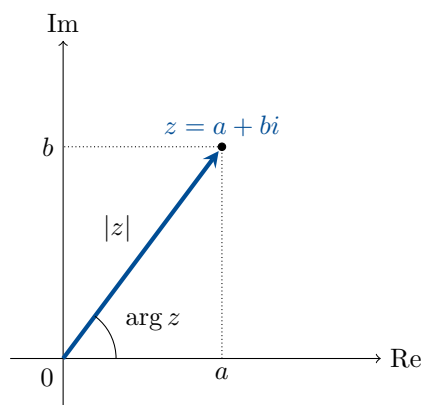


FIGURE 7.2 – Forme polaire d'un complexe

univoquement ce complexe grâce à la formule

$$z = a + bi = \rho (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

où $\rho = |z|$ et $\theta = \arg z$, et $a, b \in \mathbb{R}$.

- * La notation $a + ib$ est généralement appelée **forme normale** ou **forme cartésienne**,
- * et la seconde est la **forme polaire** ou **forme trigonométrique**, ou encore (voir ci-dessous) **forme exponentielle**.

Notation 7.27. Une *notation* courante et très commode est d'écrire z sous la forme d'une exponentielle complexe, $z = \rho \exp(i\theta)$, où par définition

$$\exp(i\theta) := \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

Cette notation est appelée **formule d'Euler**. ┘

Remarque 7.28. Avec cette définition, la *notation* $z = \rho \exp(i\theta)$ garde un sens si ρ est négatif, mais alors $|z| = -\rho$ et $\arg z = \theta + \pi$ ┘

D'après ce que nous avons vu dans l'introduction (le produit complexe correspond à des rotations et dilatations), la forme polaire d'un complexe est pratique pour calculer des produits et des puissances de nombres complexes.

Proposition 7.29. Si $z = \rho \exp(i\theta)$ et $z' = \rho' \exp(i\theta')$ sont deux nombres complexes, et n un entier, on a :

1. $\bar{z} = \rho \exp(-i\theta)$;
2. $\frac{1}{\rho \exp(i\theta)} = \frac{1}{\rho} \exp(-i\theta)$;
3. $(\rho \exp(i\theta))(\rho' \exp(i\theta')) = \rho\rho' \exp(i(\theta + \theta'))$;
4. $(\rho \exp(i\theta))^n = \rho^n \exp(in\theta)$.

┘

La dernière formule prend parfois le nom de “**Formule de De Moivre**”. On comprend l’intérêt de la notation exponentielle, puisque les opérations décrites deviennent de simples applications des règles sur les exposants.

Preuve. Vérifions la formule du produit (troisième propriété) :

$$\begin{aligned}
 (\rho \exp(i\theta))(\rho' \exp(i\theta')) &= \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))\rho'(\cos(\theta') + i \sin(\theta')) \\
 &= \rho\rho'(\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') \\
 &\quad + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta'))) \\
 &= \rho\rho'(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')) \\
 &= \rho\rho' \exp(i(\theta + \theta')).
 \end{aligned}$$

Montrons également la formule de De Moivre. À cette fin, nous utilisons le raisonnement par induction : avant tout, il est évident que cette formule est vraie pour $n = 1$. Supposons maintenant la formule vraie pour $n = k$, où k est un entier fixé. Montrons que sous cette hypothèse de récurrence la formule reste vraie pour $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
 (\rho \exp(i\theta))^{k+1} &= (\rho \exp(i\theta))(\rho \exp(i\theta))^k \\
 &= (\rho \exp(i\theta))(\rho^k \exp(ik\theta)) \\
 &= (\rho\rho^k \exp(i(\theta + k\theta))) \\
 &= \rho^{k+1} \exp(i(k+1)\theta)
 \end{aligned}$$

ce que nous voulions démontrer.

Pour montrer que la formule est vraie pour **tous** les entiers, il suffirait de vérifier une nouvelle étape d’induction : “si la formule est vraie pour $n = k$, alors elle est vraie pour $n = k + 1$ ”. Ceci permettrait –mais nous ne le faisons pas– de procéder à

une induction “dans l’autre sens”, permettant de montrer les cas $n = 0, -1, -2, \dots$ successivement. □

Exemple 7.30. Voyons quelques formes polaires :

$$\begin{aligned} 1 &= \exp(i0) \\ i &= \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \\ -1 &= \exp(i\pi) \\ 1 + \sqrt{3}i &= 2 \exp\left(i\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

└

7.4.1 Fonctions trigonométriques

Par définition des parties réelles et imaginaires, nous avons :

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$$

et par la définition du conjugué, nous avons :

$$\bar{z} = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$$

Nous en déduisons, par addition et soustraction :

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z \qquad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$$

Les fonctions trigonométriques cosinus et sinus peuvent donc être ré-écrites de la manière suivante :

$$\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} \qquad \sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$$

car $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$ dans notre notation.

7.4.2 Exponentielle complexe

Nous avons introduit la notation $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De manière plus générale, si $z = a + ib$ est un nombre complexe, nous pouvons

définir :

$$\exp z = \exp(a + ib) = \exp(a) \exp(ib)$$

Cette nouvelle application $\exp \cdot : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \exp z$ vérifie l'identité $\exp z \exp z' = \exp(z + z')$ pour tous complexes z, z' .

7.5 Racine n^e d'un complexe

Rappelons que lorsque r est un nombre réel, on note $\sqrt{r}$ l'unique nombre positif dont le carré vaut r . Évidemment, $-\sqrt{r}$ est également un nombre dont le carré est r , mais la définition du symbole $\sqrt{}$ est sans ambiguïté.

Dans le cadre des nombres complexes, par contre, il n'existe pas de notion "agréable" de positivité. Dès lors, on ne parlera jamais de *la* racine d'un nombre complexe, mais *des* racines.

Définition 7.31. Soit un entier $n \geq 1$ et z un complexe. On appelle **racine n^e** de z tout nombre complexe w tel que $w^n = z$. ┘

Pour les déterminer, nous avons la propriété suivante.

Proposition 7.32. Si z est donné sous forme polaire $\rho \exp(i\theta)$ ($\rho \geq 0$), alors les racines n^e de z sont les nombres $w_0, \dots, w_{n-1}$ définis par

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \exp\left(i \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad \text{où } k = 0, \dots, n-1$$

En particulier, si $z \neq 0$, il y a exactement n racines n^e de z . ┘

Preuve. Il y a deux choses à démontrer : d'une part que w_k est bien une racine n^e de z , et d'autre part qu'il n'y en a pas d'autres.

Pour la première partie, il est simple de vérifier que $w_k^n = \rho \exp(i(\theta + 2k\pi)) = z$ puisque

$$\exp(i(\theta + 2k\pi)) = \cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta) + i \sin(\theta) = \exp(i\theta).$$

Pour la seconde partie, considérons $w = r \exp(i\varphi)$ une racine n^e de z . Alors $w^n = z$, et en particulier $r^n = |w^n| = |z| = \rho$. Ceci montre déjà que $r = \sqrt[n]{\rho}$. Par ailleurs, puisque $w^n = z$ et $\rho = r^n$, il faut également $\exp(in\varphi) = \exp(i\theta)$.

C'est-à-dire :

$$\cos(n\varphi) = \cos(\theta) \quad \sin(n\varphi) = \sin(\theta)$$

Or deux angles ne peuvent avoir même sinus et même cosinus que si ils sont égaux à 2π près : dès lors,

$$n\varphi = \theta + 2k\pi \text{ pour un certain } k \in \mathbb{Z}.$$

d'où $\varphi = \frac{\theta+2k\pi}{n}$ comme annoncé. Reste à vérifier qu'il suffit de prendre $k = 0, \dots, n-1$. Pour cela, remarquons simplement l'égalité :

$$\begin{aligned} w_{k+n} &= \sqrt[n]{\rho} \exp\left(i \frac{\theta + 2(k+n)\pi}{n}\right) \\ &= \sqrt[n]{\rho} \exp\left(i \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} + 2\pi\right)\right) \\ &= \sqrt[n]{\rho} \exp\left(i \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) = w_k \end{aligned}$$

c'est-à-dire que pour toute valeur de k , w_k se trouve déjà parmi $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$. □

7.5.1 Racines de l'unité

Un cas particulier est $z = 1$. Dans ce cas, ses racines n^e sont :

$$w_k = \exp\left(i \frac{2k\pi}{n}\right) \quad \text{où } k = 0, \dots, n-1$$

et nous pouvons les représenter géométriquement, voir Figure 7.4.

7.6 Interprétations géométriques

Chaque opération s'interprète géométriquement, soit sous forme cartésienne, soit sous forme polaire.

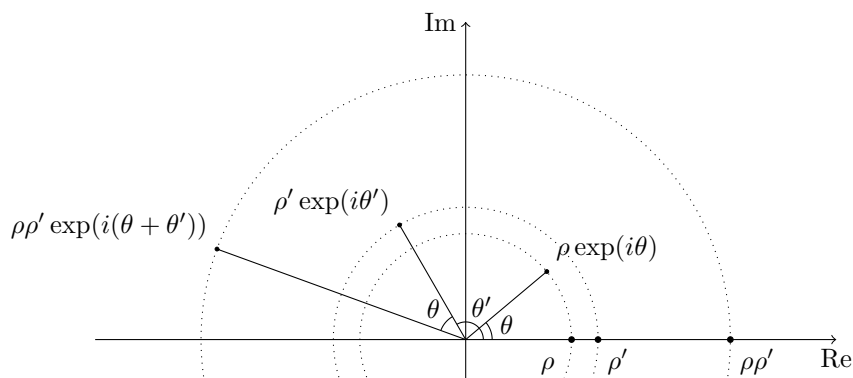


FIGURE 7.3 – Multiplication de deux nombres complexes sous forme polaire.

Somme

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. L'application $z \mapsto z_0 + z$ correspond à une translation.

Produit

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ s'écrivant $z_0 = \rho \exp(i\theta)$. L'application $z \mapsto z_0 z$ correspond à une transformation résultant de :

- * une homothétie de rapport ρ , et
- * une rotation d'angle θ .

Voir Figure 7.3.

Parties réelles et imaginaires

Les parties réelles et imaginaires d'un nombre complexes correspondent aux projections sur l'axe réel (horizontal) et l'axe imaginaire (vertical) respectivement. Voir Figure 7.1.

Conjugaison

La conjugaison $z \mapsto \bar{z}$ correspond à la symétrie orthogonale par rapport à l'axe réel (horizontal).

Module

Le module de z correspond à la distance entre l'origine et le point z considéré, voir Figure 7.2. En particulier, un cercle centré en z_0 de rayon r est décrit par

$$\{ z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - z_0| = r \}$$

le disque ouvert correspondant est

$$\{ z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - z_0| < r \}.$$

Argument

L'argument de z a déjà été décrit géométriquement : c'est l'angle entre le demi-axe réel positif et la demi-droite issue de l'origine passant par z . Voir Figure 7.2.

Inverse

L'application $z \mapsto z^{-1}$ est la composée d'une symétrie et d'une homothétie d'après la formule $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. La formule sous forme polaire est probablement plus parlante : $z^{-1} = \frac{1}{\rho} \exp(-i\theta)$ si $z = \rho \exp(i\theta)$.

Exponentiation

Les applications du type $z \mapsto z^n$ ne se décrivent pas de manière simple comme transformation du plan (il ne s'agit pas d'une rotation), mais l'image de z peut néanmoins se décrire d'après la forme trigonométrique : $(\rho \exp(i\theta))^2 = \rho^2 \exp(2i\theta)$, c'est-à-dire que l'angle est doublé et le module pris au carré. De même pour les autres valeurs de n .

Le cas particulier où $\rho = |z| = 1$ est le plus simple à imaginer : il s'agit simplement de doubler (ou tripler, etc. selon la valeur de n) l'angle du nombre complexe z considéré.

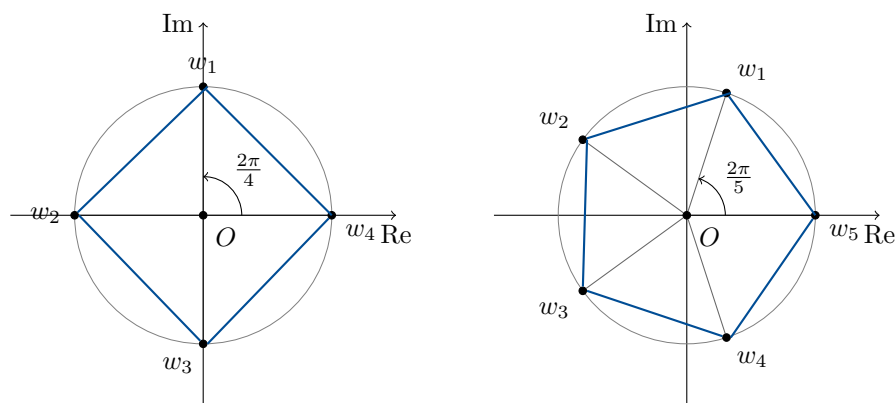


FIGURE 7.4 – Racines quatrièmes et cinquièmes de l'unité.

Racines n -ièmes

Cette opération est d'une certaine manière réciproque de la précédente, sauf qu'il y a plusieurs réponses possibles. On ne peut pas parler de "l'application $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ ".

Quand on dessine les **racines n -ièmes de l'unité**, c'est-à-dire du nombre complexe 1, ils se trouvent tous sur le cercle de rayon 1 et forment les sommets d'un polygone régulier à n cotés, voir Figure 7.4.

7.7 Équations

Dès lors que nous avons de "nouveaux nombres" nous pouvons résoudre des équations qui les impliquent.

7.7.1 Premier degré

Les équations polynomiales du premier degré offrent peu d'intérêt nouveau : considérons l'équation d'inconnue z suivante :

$$az + b = 0$$

où $a, b \in \mathbb{C}$ sont des constantes données. Alors sa solution est $z = -\frac{b}{a}$, car les règles d'addition de multiplication par les complexes sont identiques aux règles sur

les réels.

7.7.2 Second degré

Considérons l'équation

$$az^2 + bz + c = 0$$

alors, exactement comme dans le cas réel, nous transformons cette équation en :

$$a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = 0$$

avec pour différence qu'il n'est pas nécessaire de discuter le signe de $b^2 - 4ac$, puisque les solutions sont toujours données par :

$$z = \frac{-b \pm \omega}{2a}$$

où ω est une racinée carrée de $b^2 - 4ac$ (c'est-à-dire $\omega^2 = b^2 - 4ac$).

Remarque 7.33. Si $b^2 - 4ac = 0$, alors ceci ne produit qu'une seule racine, dite "racine double" ou "de multiplicité 2". Si nous admettons qu'une telle racine compte effectivement pour deux (on dira qu'on les compte "avec leur multiplicité"), alors tout polynôme de degré 2 admet toujours exactement 2 racines. ┘

7.7.3 Degrés supérieurs

Si $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ est un polynôme de degré n à coefficients complexes, alors nous avons :

Définition 7.34. Une racine r de P est de **multiplicité** m si on peut écrire $P(z) = (z - r)^m Q(z)$, où Q est un polynôme (forcément de degré $n - m$) dont r n'est pas une racine. ┘

Théorème 7.35. Tout polynôme de degré n admet exactement n racines complexes (comptées avec leur multiplicité). ┘

Liste de notations et symboles

$:=$	égale par définition
$\approx$	approximativement égal
$\mathbb{N}$	l'ensemble des nombres naturels
$\mathbb{Z}$	l'ensemble des nombres entiers
$\mathbb{Q}$	l'ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^+$	$[0, \infty[$
$\mathbb{R}^-$	$] \infty, 0]$
$\mathbb{R}_0^+$	$]0, \infty[$
$\mathbb{R}_0^-$	$] \infty, 0[$
$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\cap$	intersection
$\cup$	union
$\setminus$	“sauf”, utilisé entre deux ensembles pour indiquer leur différence
π	pi, la demi-circonférence d'un cercle de rayon 1 ; $\approx 3,141$
$ x $	valeur absolue de x
e	la constante d'Euler ; $\approx 2,718$
$\ln$	logarithme naturel, de base e
$\log_a$	logarithme de base a
ch	cosinus hyperbolique
sh	sinus hyperbolique

ANNEXE B

Figures supplémentaires

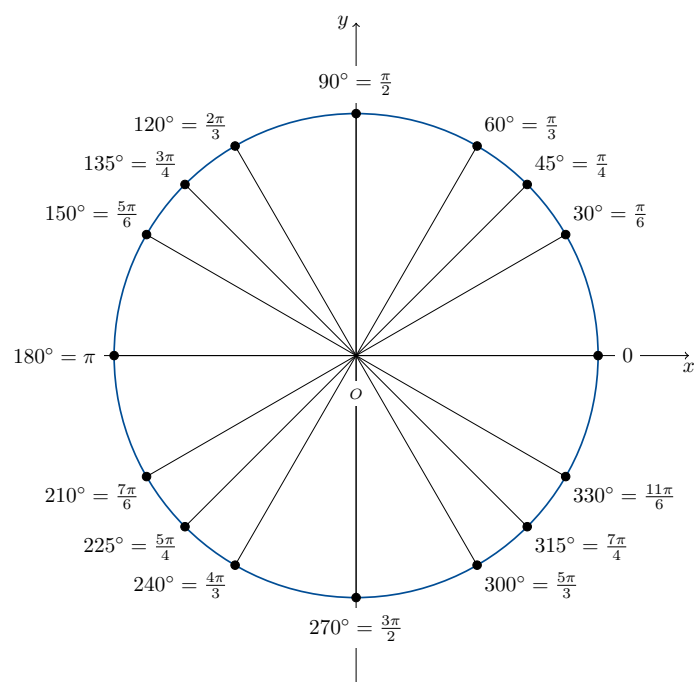


FIGURE B.1 – Angles communs positifs.

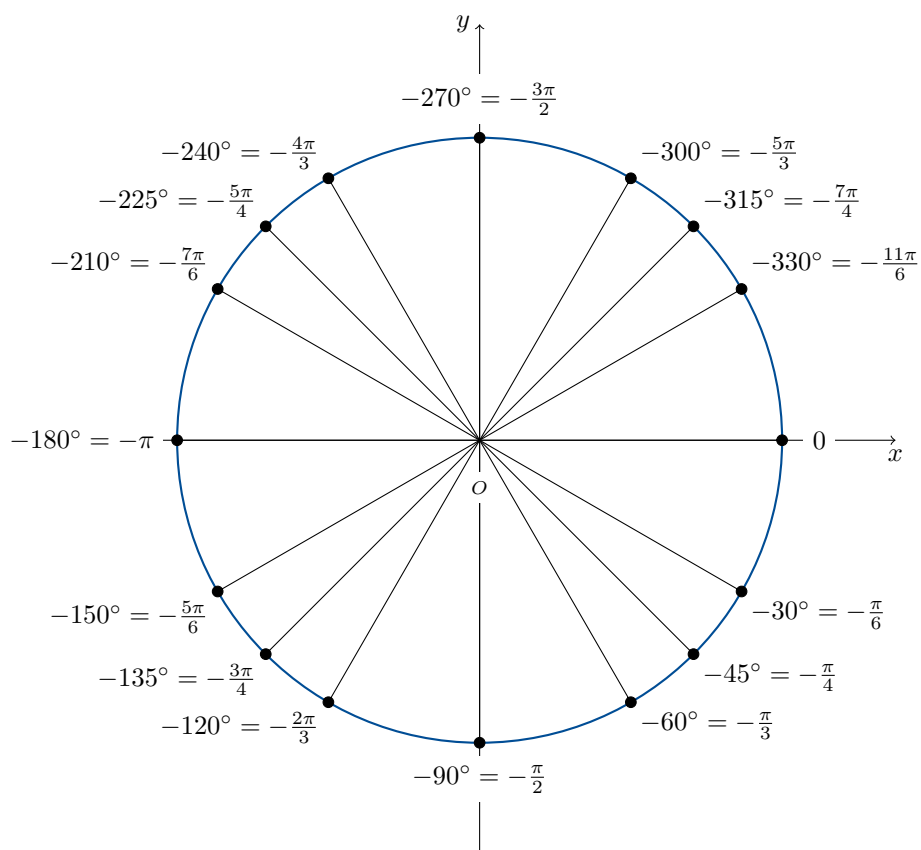


FIGURE B.2 – Angles communs négatifs.

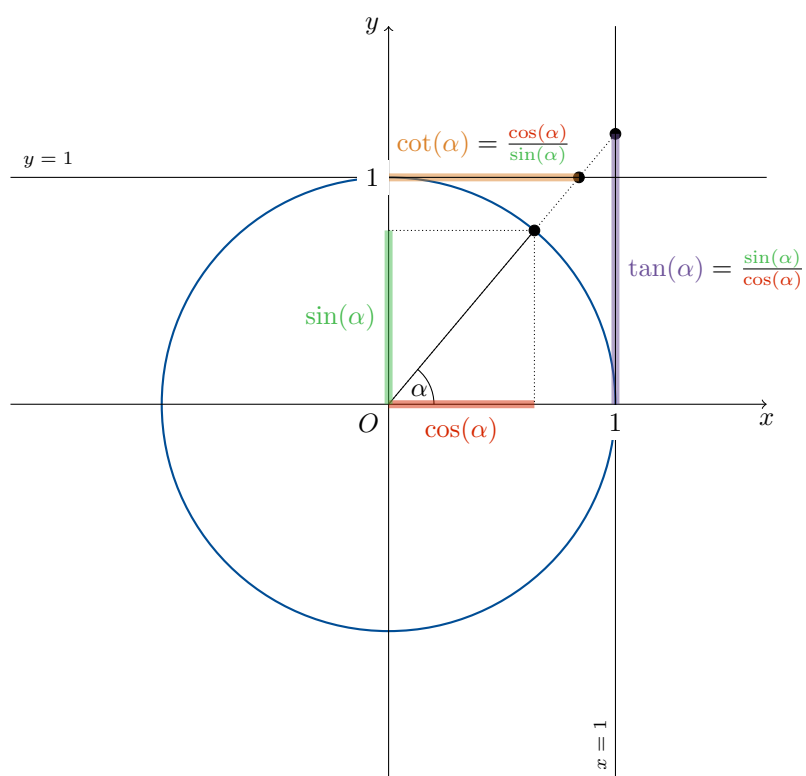


FIGURE B.3 – Les nombres trigonométriques

Index

- abscisses, 35, 59
- affine, fonction, 102
- aire, 34
 - latérale, 34
- Al-Kashi, 53
- angle
 - détermination principale, 39
 - mesure, 39
 - orienté, 41
 - point image, 41
- antécédent, 94
- arccos, 47
- arcsin, 46
- arctan, 47
- argument (d'un complexe), 169
- base, 21, 68
- bijective, 111
- borne
 - inférieure, 12
 - supérieure, 12
- cardinalité, 6
- cartésien, 70
 - repère, 35, 59
- cartésien, produit, 8
- cercle, 89
- cercle trigonométrique, 41
- composantes, 61
- composé, 101
- concave vers le bas, 138
- concave vers le haut, 138
- concavité, 138
- conjugée complexe, 166
- constante d'Euler, 106
- coordonnées, 70
- coordonnées cartésiennes, 70
- cosinus, 42
 - lois des, 53
- cosinus hyperbolique, 143
- cotangente, 43
- croissant, 108
- De Moivre, formule de, 172
- degré, 30, 38, 102
- différence d'ensemble, 8
- Dirichlet, fonction de, 100
- distance, 64
- domaine, 94
- droite tangente, 122
- décroissant, 108
- dérivée

- en un point, 122
- développement décimal périodique, 3
- élément, 5
- ensemble, 5
- ensemble image, 94
- ensemble vide, 6
- entier, 2
- Euler, constante, 106
- Euler, formule de, 171
- exponentielle, 21
- exposant, 21
- fonction, 94
 - affine, 102
 - constante, 102
 - identité, 96
 - impaire, 109
 - inverse, 114
 - linéaire, 102
 - paire, 109
 - réciproque, 114
 - réelle, 96
 - à valeurs réelles, 96
- forme exponentielle d'un complexe, 171
- forme trigonométrique d'un complexe, 171
- fraction, 2
- Gauß, plan de, 162
- graphe, 98
- image, 94
- imaginaire pur, 162
- impair, fonction, 109
- infini, 2, 12, 29
- inférieur, 10
- injective, 111
- intersection, 8
- intervalle, 12
- intégration immédiate, 142
- intérieur, 122
- inverse, fonction, 114
- irrationnel, 4
- linéaire, fonction, 102
- logarithme naturel, 118
- Loi des sinus, 53
- lois des cosinus, 53
- longueur, 33
- module, 167
- moyenne arithmétique, 18
- naturels, 1
- nombre
 - entier, **voir** entier
 - naturel, 1
 - rationnel, 2
 - réel, 4
- norme, 64
- ordonnés, 35, 59
- origine, 35, 59
- pair, fonction, 109
- partie imaginaire, 162
- partie réelle, 162
- pente, 121
- plafond, 96
- plancher, 96

polynomiale, 102
polyôme, 30
pourcent, 13
primitive, 139
produit cartésien, 8
produit vectoriel, 79
projection, 77
propre, 7
puissance, 21
Pythagore, théorème de, 35

racine
 carrée, 23
 n-ième, 24
racine de fonction, 98
radian, 38
rationnel, 2
rem :racine-nieme-impair, 24
repère, 35, 59
repère cartésien, 35, 59
restriction, 101
réciproque, fonction, 114
réel, 4
réunion, 8

sinus, 42
 lois des, 53
sinus hyperbolique, 143
solution, 28
sous-ensemble, 7, 8
 propre, 7
 strict, 7
strict, 7
strictement inférieur, 10

strictement croissant, 108
strictement décroissant, 108
strictement supérieur, 10
supérieur, 10
surface latérale, 34
surjective, 111
symbole de sommation, 15

tangente, 43
Thalès, théorème de, 36

union, 8

valeur absolue, 19
vecteur, 61
vecteur directeur, 82
vecteur libre, 61
vectoriel, 79
vide, 6
volume, 34

équation, 28
 paramétriques, 81
équations
 cartésiennes, 81
équipollent, 63