

Chapitre 2: Trigonométrie

MATHF117

La notion d'angle

Le radian

Angles orientés et cercle trigonométrique

Fonctions trigonométriques

Retrouver un angle en partant du sinus

Angles associés

Fonctions trigonométriques dans les triangles

Triangles rectangles

Triangles quelconques

Formules de sommes d'angles

D'autres identités remarquables

La notion d'angle

Le radian

Angles orientés et cercle trigonométrique

La trigonométrie est l'étude des triangles.

Les liens entre

- ▶ la mesure des côtés
- ▶ et la mesure des angles.

Question

Comment mesurer les angles ?

Angle comme fractions de tours complets

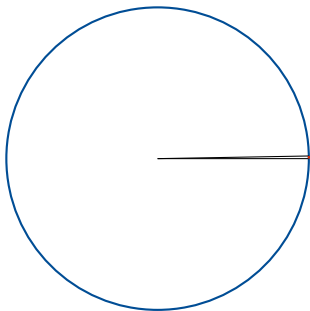
Intuitivement, un angle exprime une fraction de “faire un tour complet”

On *fixe* deux unités : le **degré** et le **radian**.

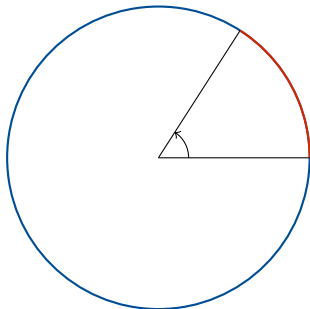
	quart de tour	demi tour	tour complet	deux tours
degrés	90°	180°	360°	720°
radians	$\frac{\pi}{2}\text{rad}$	πrad	$2\pi\text{rad}$	$4\pi\text{rad}$

Radian vs degré

Un degré



Un radian



! Attention

Notre unité par défaut est le *radian*.

Détermination principale

Définition

La **mesure** d'un angle est un réel α entre 0 et 360 (en degrés), ou un réel entre 0 et 2π (en radians), indiquant la proportion d'un tour complet. Un tel réel s'appelle la **détermination principale** de l'angle considéré.

Remarque

Les angles

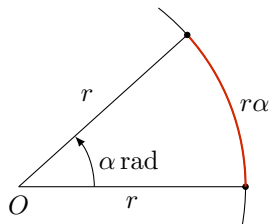
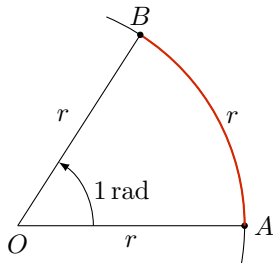
- ▶ π (un demi de tour)
- ▶ $2\pi + \pi = 3\pi$ (un tour et demi)

sont “équivalents”. Ils ont la même détermination principale.

Interprétation géométrique du radian

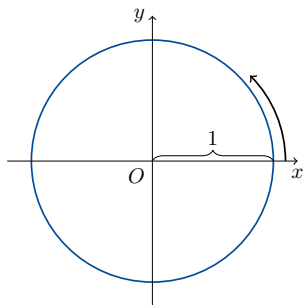
angle mesure 1 radian $\Rightarrow$ arc de cercle de rayon r intercepté par l'angle est de longueur r .

angle mesure α radians $\Rightarrow$ arc de cercle de rayon r intercepté par l'angle est de longueur $r\alpha$.



Donc angle de $2\pi \Rightarrow$ circonférence de $2\pi r$!

Cercle trigonométrique



Définition

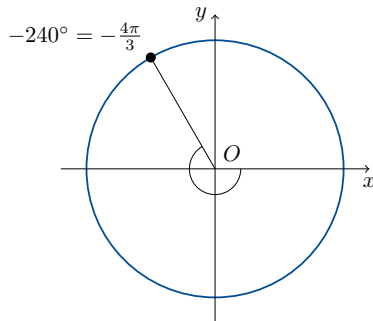
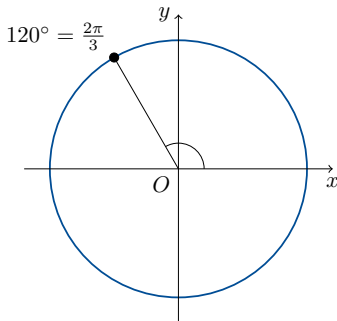
Dans un repère orthonormé, le **cercle trigonométrique** est

- ▶ de centre O est l'origine du repère
- ▶ de rayon vaut 1
- ▶ orienté positivement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

L'**orientation** du cercle va nous permettre de distinguer de tourner "dans un sens" ou dans "l'autre sens"

Angles orientés sur le cercle trigonométrique

On représente des **angles orientés** dans le cercle trigonométrique

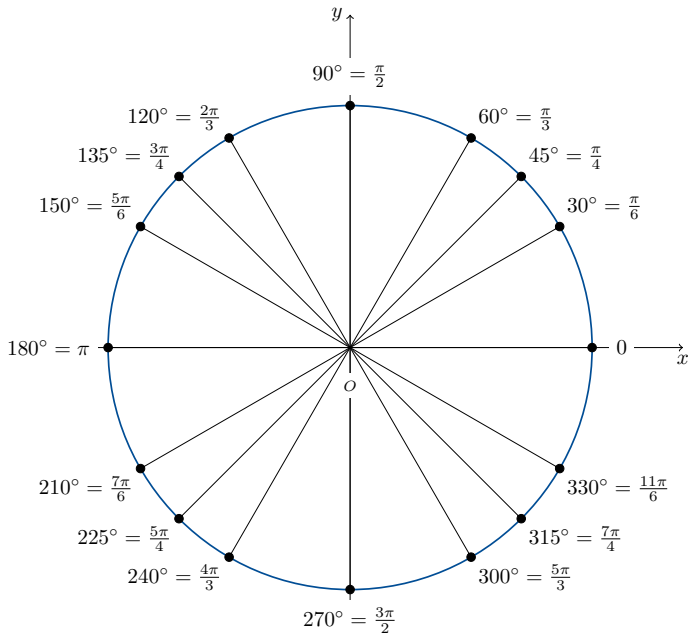


Le point sur le cercle est appelé le **point image** de l'angle.

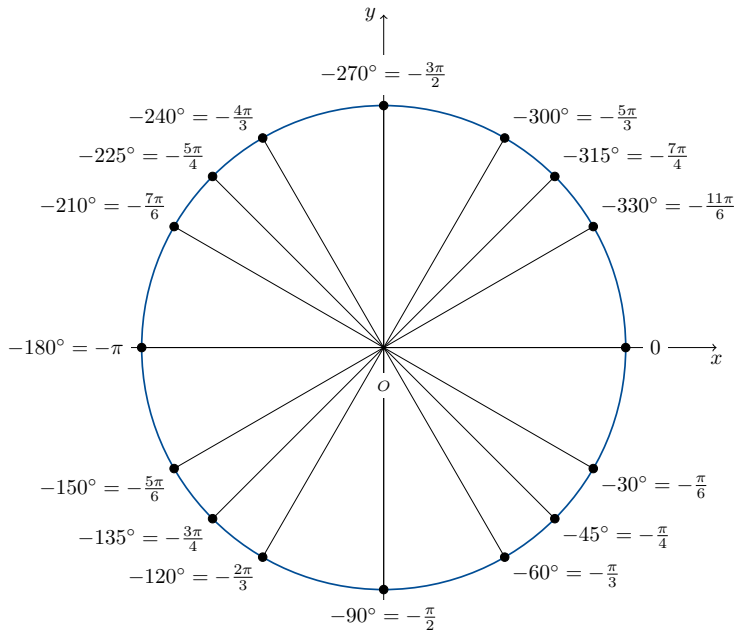
Proposition

Deux angles orientés α et β ont le même point image si et seulement il existe un nombre entier k tel que $\alpha = \beta + k \cdot 2\pi$.

Angles communs positifs



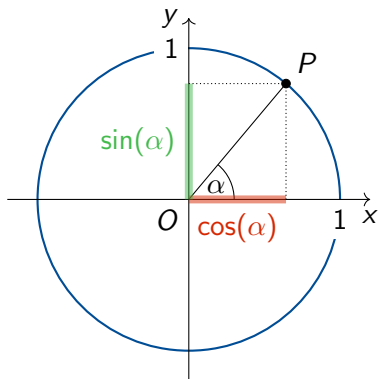
Angles communs négatifs



Fonctions trigonométriques

Sinus, cosinus, tangente et cotangente

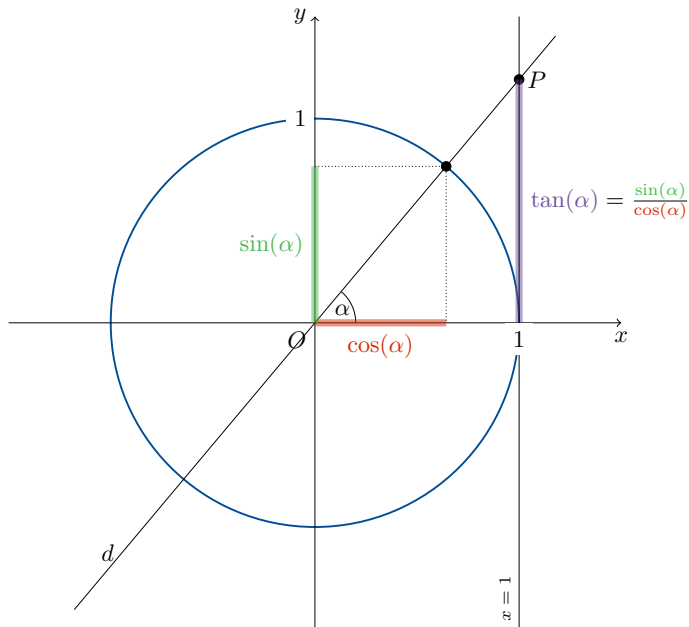
Soit α un angle de point image P sur le cercle trigonométrique.



Définition

- ▶ Le **cosinus** de α , $\cos(\alpha)$ est l'*abscisse* de P .
- ▶ Le **sinus** de α , $\sin(\alpha)$ est l'*ordonnée* de P .
- ▶ Si $\cos(\alpha) \neq 0$, la **tangente** de α , est $\tan(\alpha) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.
- ▶ Si $\sin(\alpha) \neq 0$, la **cotangente** de α est $\cot(\alpha) := \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$.

Interprétation géométrique de la tangente



Interprétation géométrique de la cotangente

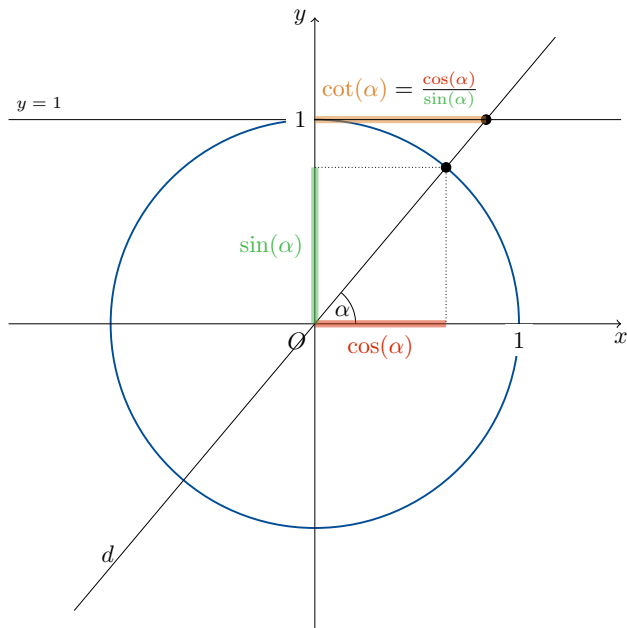


Tableau de valeurs particulières

angle	sin	cos	tan	cot
0	$\sqrt{0}/2 = 0$	1	0	$\nexists$
$\pi/6$	$\sqrt{1}/2 = 1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/2$	$\sqrt{4}/2 = 1$	0	$\nexists$	0

! Attention

Ce tableau est à connaître par cœur.

Propriétés de base des fonctions trigonométriques

Proposition

Pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ et angle $\alpha \in \mathbb{R}$ on a

$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 2\pi)$$

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k \cdot 2\pi)$$

$$\tan(\alpha) = \tan(\alpha + k \cdot 2\pi)$$

$$\cot(\alpha) = \cot(\alpha + k \cdot 2\pi)$$

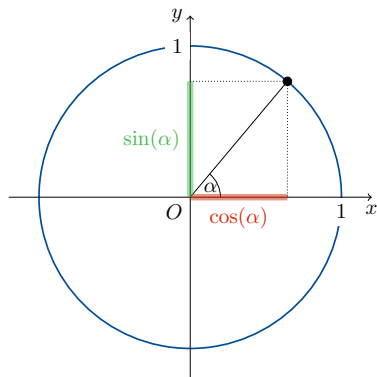
Proposition

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un angle alors

$$-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$$

$$-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$$

Relation fondamentale trigonométrique



Proposition

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Convention

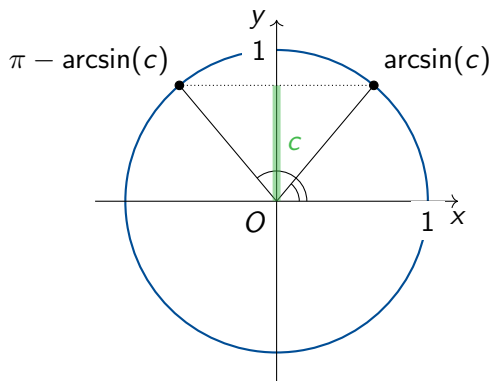
$$\sin^2(\alpha) = \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha) = (\sin(\alpha))^2.$$

Retrouver un angle en partant du sinus

arcsin

Question

Pour quel angle α a-t-on $\sin(\alpha) = c$?



Définition

Soit $c \in [-1, 1]$, alors on définit $\arcsin(c)$ comme étant l'unique réel α entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ tel que $\sin(\alpha) = c$.

Question

Pour quel angle α a-t-on $\sin(\alpha) = c$?

Réponse

$$\alpha = \arcsin(c) + k \cdot 2\pi \text{ ou } \alpha = \pi - \arcsin(c) + k \cdot 2\pi$$

pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

arccos et arctan

Définition

Soit $c \in [-1, 1]$, alors on définit $\arccos(c)$ comme étant l'unique réel α entre 0 et π tel que $\cos(\alpha) = c$.

Si $\cos(\alpha) = c$, alors

$$\alpha = \arccos(c) + k \cdot 2\pi \text{ ou } \alpha = -\arccos(c) + k \cdot 2\pi$$

pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

Définition

Soit $c \in \mathbb{R}$, alors on définit $\arctan(c)$ comme étant l'unique réel α entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ tel que $\tan(\alpha) = c$.

Si $\tan(\alpha) = c$, alors

$$\alpha = \arctan(c) + k \cdot 2\pi \text{ ou } \alpha = \pi + \arctan(c) + k \cdot 2\pi$$

pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

Angles associés

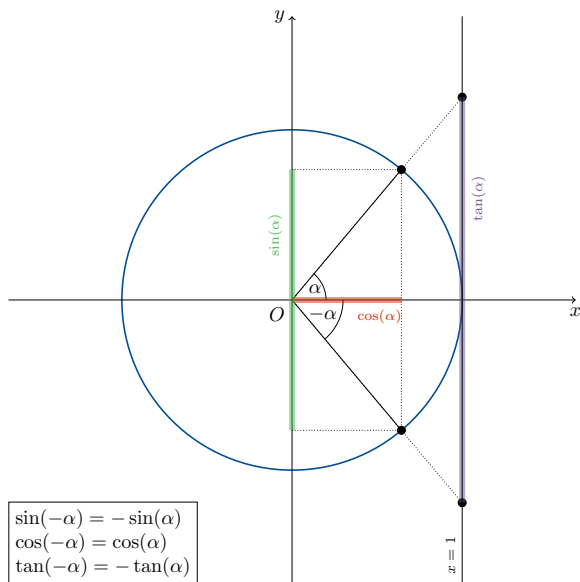
Angles associés

On peut se servir de symétries géométriques pour trouver des relations entre différentes fonctions trigonométriques.

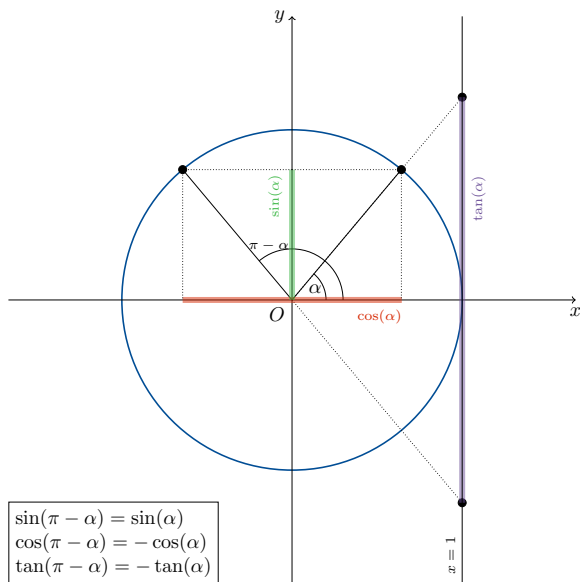
! Attention

Toutes les relations qu'on va énoncer sont à connaître, mais ne les apprenez pas par cœur !

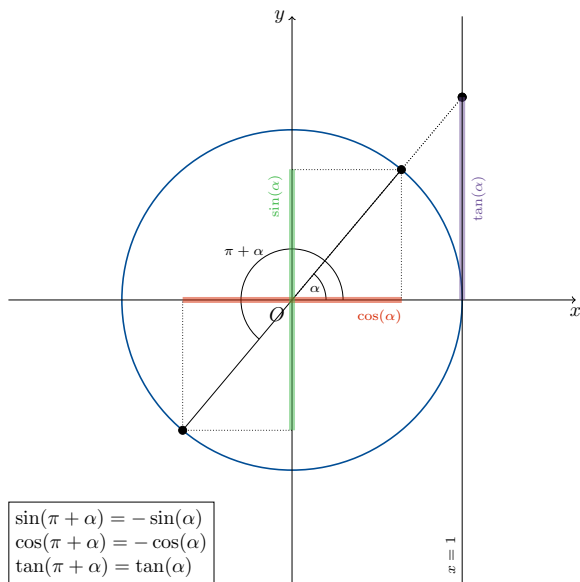
Symétrie par rapport à l'axe des abscisses



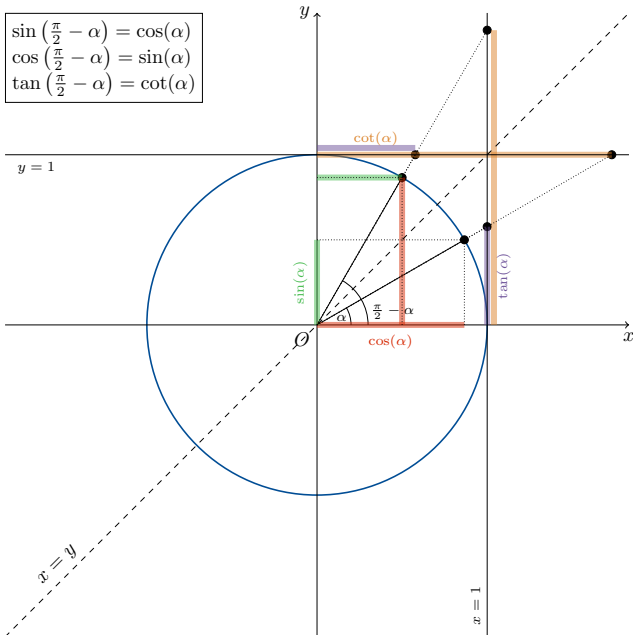
Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées



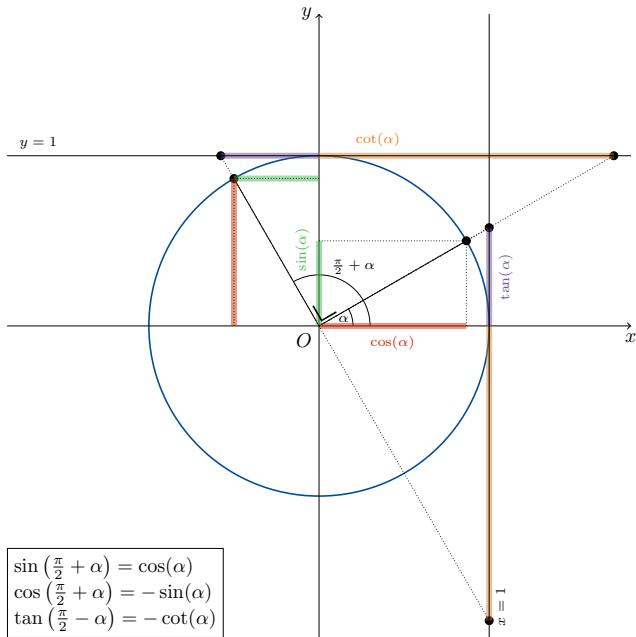
Symétrie par rapport à l'origine



Symétrie par rapport à la première bissectrice



Angle décalé de 90°



Réduction aux angles du premier quadrant

On peut utiliser les symétries pour réduire tout angle à un angle entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Exemple

On veut calculer $\sin\left(\frac{35\pi}{6}\right)$. On a

$$\frac{35\pi}{6} = \frac{(24 + 11)\pi}{6} = 4\pi + \frac{11\pi}{6}.$$

Donc, $\sin\left(\frac{35\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$. On a

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) &= \sin\left(\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= -\sin\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Donc $\sin\left(\frac{35\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

Fonctions trigonométriques dans les triangles

Triangles rectangles

Triangles quelconques

Proposition

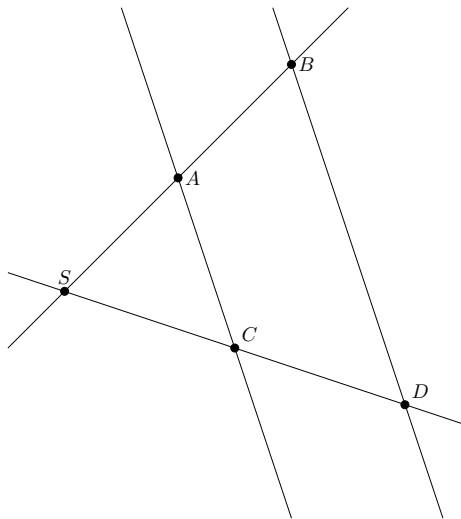
Considérons un triangle ABC , rectangle en C . Dénотons par α l'angle du triangle au sommet A . Alors on a

$$\cos(\alpha) = \frac{\|AC\|}{\|AB\|} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \alpha}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\|BC\|}{\|AB\|} = \frac{\text{longuer du côté opposé à } \alpha}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\|BC\|}{\|AC\|} = \frac{\text{longuer du côté opposé à } \alpha}{\text{longueur du côté adjacent à } \alpha}.$$

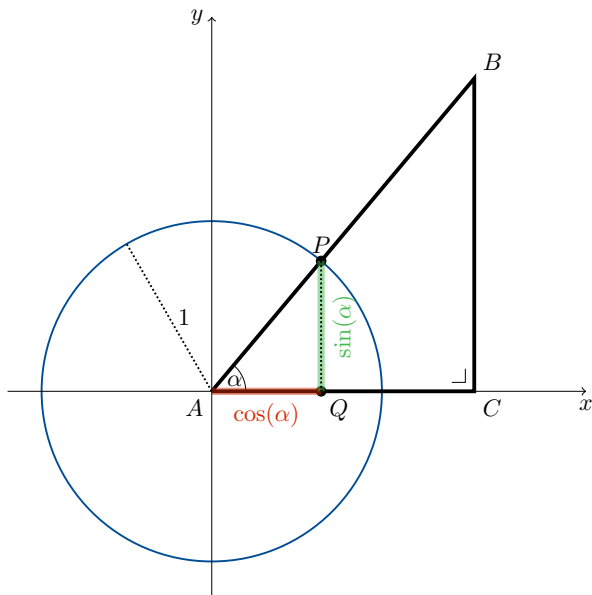
Rappel



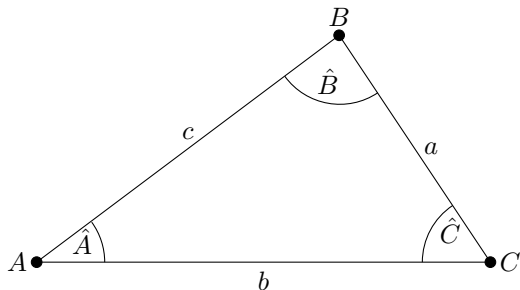
Théorème (de Thalès)

- ▶ $\frac{\|SA\|}{\|AB\|} = \frac{\|SC\|}{\|CD\|}$
- ▶ $\frac{\|SB\|}{\|AB\|} = \frac{\|SD\|}{\|CD\|}$
- ▶ $\frac{\|SA\|}{\|SB\|} = \frac{\|SC\|}{\|SD\|} = \frac{\|AC\|}{\|BD\|}.$

Trigonométrie dans triangles rectangles



Triangles quelconques: loi des sinus

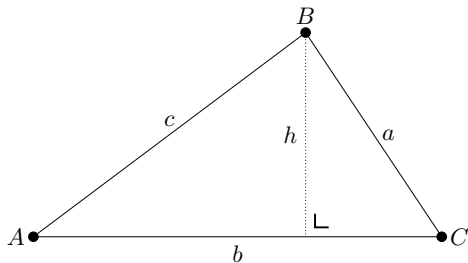


Proposition

Dans un triangle ABC , on a

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}.$$

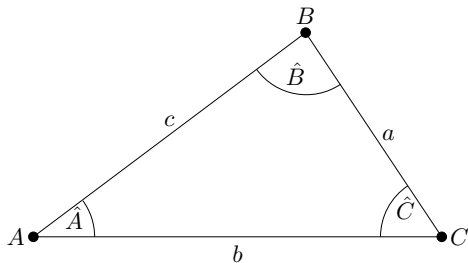
Preuve de la loi des sinus



Preuve.



Triangles quelconques: loi des cosinus ou théorème d'Al-Kashi



Théorème

Dans un triangle ABC , on a

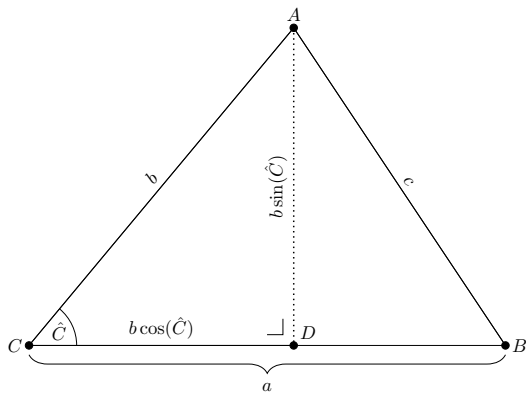
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C}).$$

Remarque

Le théorème d'Al-Kashi généralise le Théorème de Pythagore.

Preuve de la loi des cosinus

Preuve.



Formules de sommes d'angles

Formules de sommes d'angles

Théorème

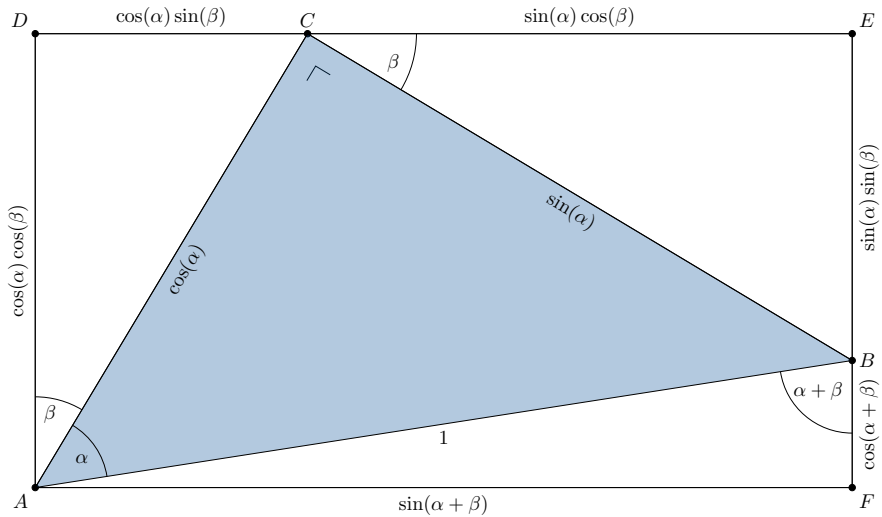
Pour tout pair d'angles $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

- ▶ $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
- ▶ $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
- ▶ $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$

! Attention

Il faut connaître ces formules par cœur.

La preuve sur le prochain slide suppose que $\alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Les autres cas se déduisent en utilisant les angles associés (exercice).



D'autres identités remarquables

D'autres identités remarquables

Différences d'angle

- ▶ $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
- ▶ $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
- ▶ $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

Multiples d'angles

- ▶ $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
- ▶ $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- ▶ $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$
- ▶ $\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$
- ▶ $\cos(3\alpha) = -3 \cos \alpha + 4 \cos^3 \alpha$

D'autres identités remarquables

Produit sin cos

- ▶ $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$
- ▶ $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$
- ▶ $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$

Somme de cos sin

- ▶ $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- ▶ $\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- ▶ $\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- ▶ $\sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

D'autres identités remarquables

Vous ne devez pas connaître par coeur ces identités, mais vous pouvez les déduire des autres résultats dans ce chapitre.

Exemple

Étudions le cosinus du double d'un angle :

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos(\alpha + \alpha) \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 2\cos^2(\alpha) - 1 \\ &= 2(1 - \sin^2(\alpha)) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2(\alpha).\end{aligned}$$