

Chapitre 5: Dérivées

Interprétation géométrique et calcul

MATHF117

Une définition naïve de la dérivée

Dérivées de quelques classes de fonctions

Dérivées et opérations

- Somme, produit quotient

- Composition

- Fonction réciproque

Quelques calculs

Tableau récapitulatif de fonctions dérivées

Analyser le comportement d'une fonction à l'aide de ses dérivées

- Croissance

- Extrema

- Concavité

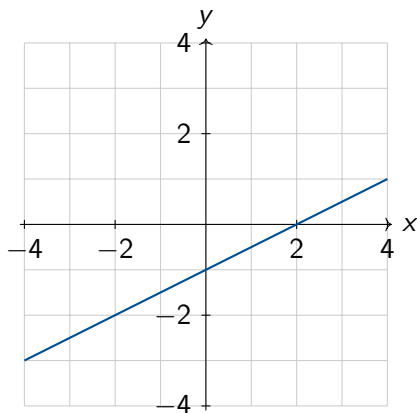
Une définition naïve de la dérivée

Pentes

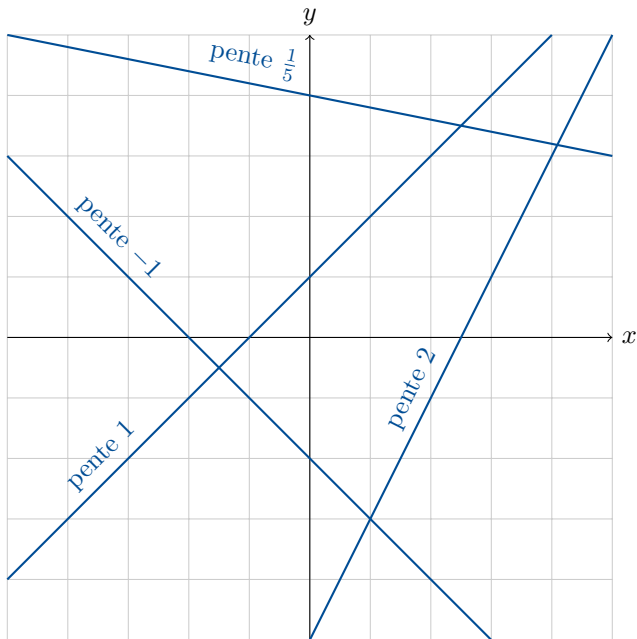
Définition

Considérons la droite D du plan passant par les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) . Supposons que $x_1 \neq x_2$. Alors la **pente** de D est le nombre

$$m := \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



Pentes



Proposition

Si D est une droite de pente m alors D est l'ensemble de points satisfaisant l'équation

$$y = mx + d$$

pour un certain $d \in \mathbb{R}$.

Preuve.



Une définition naïve de la dérivée

Définition

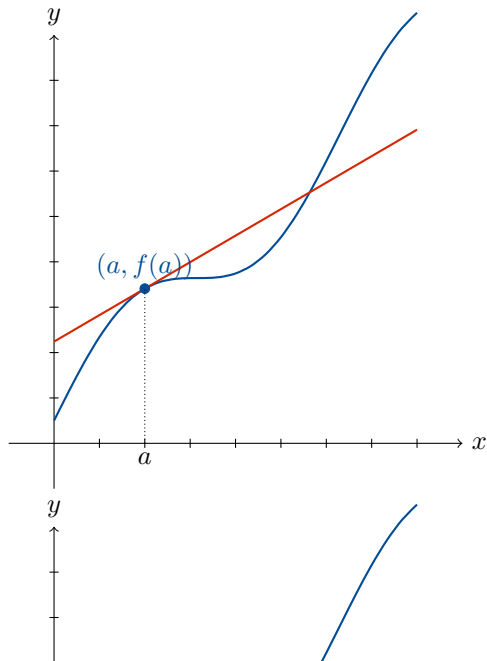
Soit une fonction $f : A \rightarrow B$ où $A, B \subseteq \mathbb{R}$ et prenons $a \in A$ à l'intérieur de A .

Alors la **dérivée de f en a** , si elle existe, est la pente de la droite tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$. On note cette valeur $f'(a)$.

Définition

La **droite tangente** à une courbe *en un point* est la droite qui "touche" la courbe au plus près au voisinage de ce point. La courbe et sa tangente forment alors un angle nul en ce point.

Une définition naïve de la dérivée



Équation de la droite tangente

Proposition

Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ et $f : A \rightarrow B$ une fonction dérivable en $a \in A$. Alors, si D est la droite tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$, elle satisfait l'équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Preuve.



La droite tangente comme une “approximation linéaire”

Remarque

Si le graphe d'une fonction est suffisamment “lisse” et on se rapproche de très très près d'un point du graphe, on dirait qu'on regarde une droite.

Le graphe et sa droite tangente deviennent indistinguables.

On dit que la droite tangente est une “approximation linéaire” de la fonction en un point.

C'est-à-dire que, tout près de a , le graphe de f ressemble au graphe de la droite tangente :

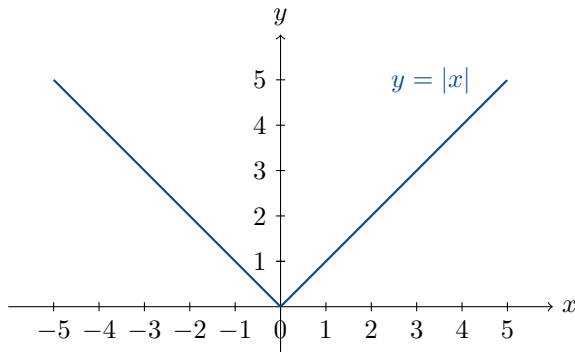
$$f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a) \quad \text{pour } x \approx a.$$

Fonctions non dérivables?

On ne donne pas la définition exacte qui permet de dire qu'une fonction est **dérivable** (cf Mathématiques II).

Exemple

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en $a = 0$.



Notation de la dérivée

Notation

On note $f'(a)$ également

$$\frac{df}{dx}(a)$$

ce qui signifie littéralement “la dérivée de f par rapport à x en a ”.

La fonction dérivée

Définition (Fonction dérivée)

Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction réelle d'une variable réelle ($A, B \subseteq \mathbb{R}$). Appelons C l'ensemble des points de A où f est dérivable. Alors $C \subseteq A$ est le domaine de définition de la fonction

$$f' : C \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f'(x)$$

appelée **fonction dérivée** ou simplement la **dérivée** de f .

Remarque

Si f désigne une fonction, f' désigne sa fonction dérivée.

Définition

Si f est dérivable dans un intervalle ouvert $]a, b[$, et si sa dérivée f' est aussi dérivable dans $]a, b[$, alors on définit la **dérivée seconde**, notée f'' par

$$f''(x) = (f')'(x); \quad x \in]a, b[$$

Si f'' admet une dérivée dans $]a, b[$, on l'appelle **dérivée troisième**, notée f''' ou f^3 et ainsi de suite, c'est-à-dire

$$f^{n+1} = (f^n)'$$

si f^n est dérivable dans $]a, b[$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Dérivées de quelques classes de fonctions

Dérivées de fonctions affines

Proposition

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto mx + d$ pour certains $m, d \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $f'(a) = m$. En d'autres mots, la fonction dérivée de f est donnée par la fonction $f'(x) = m$.

Preuve.



Dérivées de fonctions constantes

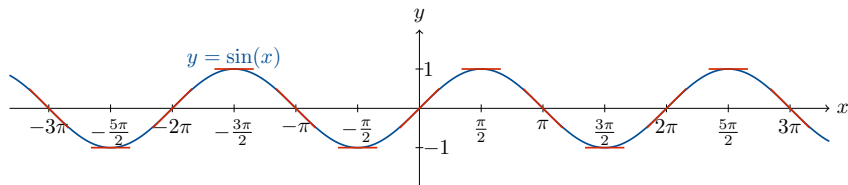
Exemple

Un cas particulier de la proposition suivante sont les *fonctions constantes* : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto d$. On trouve donc que si f est une fonction constante $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition

On a que

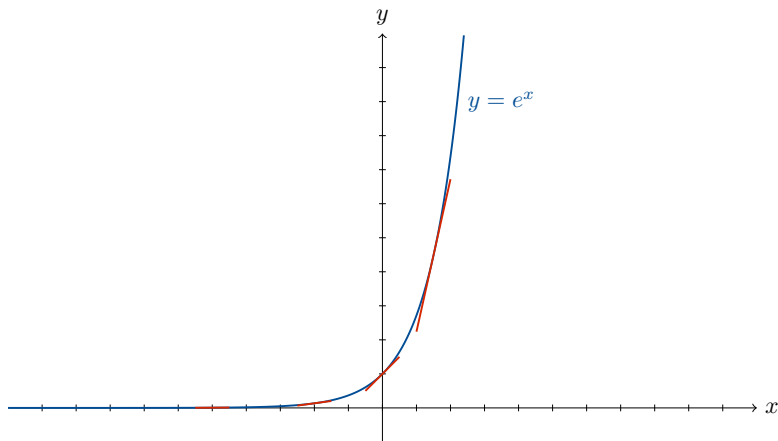
- ▶ la fonction dérivée de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$ est $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$;
- ▶ la fonction dérivée de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$ est $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -\sin(x)$.



Dérivée de la fonction exponentielle en base e

Proposition

La fonction dérivée de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^x$ est $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^x$.



Dérivées et opérations

Somme, produit quotient

Composition

Fonction réciproque

Dérivées et opérations

Proposition

Soient f et g des fonctions dérivables au point a , et $c \in \mathbb{R}$ une constante. Alors

- ▶ $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- ▶ $(cf)'(a) = cf'(a)$
- ▶ $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ (Règle de Leibniz).

De plus, si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable au point a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

! Attention

La dérivée du produit n'est donc pas le produit des dérivées, et la dérivée d'un quotient n'est pas le quotient des dérivées.

Exemples de dérivation et opérations

Exemples

- ▶ $(x + \sin(x))' = 1 + \cos(x)$
- ▶ $(x \sin(x))' = \sin(x) + x \cos(x)$
- ▶ $(4e^x)' = 4e^x$
- ▶ $(e^x \cos(x))' = e^x \cos(x) - e^x(\sin(x))$

Somme de dérivées: justification

On a

$$\begin{cases} f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a) \\ g(x) \approx g'(a)(x-a) + g(a) \end{cases} \quad \text{pour } x \approx a$$

En additionnant les deux équations, on est amené à conclure

$$f(x) + g(x) \approx (f'(a) + g'(a))(x-a) + f(a) + g(a) \quad \text{pour } x \approx a$$

et donc que $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, car si

$h(x) \approx m(x-a) + h(a)$ pour $x \approx a$ pour une fonction h et un nombre m , alors nécessairement $m = h'(a)$.

Règle de Leibniz: justification

On a

$$\begin{cases} f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a) \\ g(x) \approx g'(a)(x-a) + g(a) \end{cases} \quad \text{pour } x \approx a$$

en multipliant les deux équations on trouve, pour $x \approx a$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &\approx (f'(a)g(a) + g'(a)f(a))(x-a) \\ &\quad + f(a)g(a) + f'(a)g'(a)(x-a)^2, \end{aligned}$$

ce qui donne, pour $x \approx a$

$$f(x)g(x) \approx (f'(a)g(a) + g'(a)f(a))(x-a) + f(a)g(a),$$

car $(x-a)^2$ est négligeable par rapport aux deux premiers termes quand $x \approx a$.

En regardant le coefficient de $(x-a)$, on trouve la dérivée du produit fg en a .

Exemple: dérivée de tan

Exemple

On peut calculer

$$\begin{aligned}(\tan(x))' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' \\&= \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\&= \frac{1}{\cos^2(x)}\end{aligned}$$

Exemple: dérivée de x^n pour $n \in \mathbb{N}$

Exemple

Considérons $f(x) = x$. Alors on a que $(f \cdot f)(x) = x^2$.

$$(x^2)' = (f \cdot f)'(x) = f'(x)f(x) + f(x)f'(x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$

On peut continuer ce raisonnement :

$$(x^0)' = 0$$

$$(x^1)' = 1$$

$$(x^2)' = (x \cdot x)' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$$

$$\vdots$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Exemple: dérivée de x^n pour $x \in \mathbb{Z}$

Exemple

Soit $g(x) = x$. Considérons $\frac{1}{g}(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ qui est en fait la fonction $\frac{f}{g}$ où f est la fonction constante 1.

On a

$$\begin{aligned}(x^{-1})' &= \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{(x)^2} \\ &= \frac{-1}{x^2} = -x^{-2}.\end{aligned}$$

En répétant ce raisonnement (exercice) on peut montrer que pour tout entier négatif n on a également que $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Dérivée de x^a pour $a \in \mathbb{R}$

Proposition

Pour $a \in \mathbb{R}$, la fonction dérivée de

$$x \mapsto x^a$$

est

$$x \mapsto ax^{a-1}$$

Dérivée d'une composition

Proposition

Soient f et g des fonctions telles que f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Exemple

Prenons par exemple $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x^2$. Alors $g \circ f(x) = \sin^2(x)$. On a que $f'(x) = \cos(x)$ et $g'(x) = 2x$, donc

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = 2 \sin(x) \cos(x).$$

L'ordre de composition est importante ! On a $f \circ g(x) = \sin(x^2)$ et

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x.$$

Dérivée de composition: justification

On a

$$f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a) \quad \text{pour } x \approx a \quad \text{et}$$

$$g(y) \approx g'(f(a))(y - f(a)) + f(g(a)) \quad \text{pour } y \approx f(a)$$

En remplaçant y par $f(x)$ dans le membre de gauche, et par l'approximation de $f(x)$ dans le membre de droite on trouve, pour $x \approx a$

$$g(f(x)) \approx g'(f(a))(f'(a)(x - a) + \underbrace{f(a) - f(a)}_{=0}) + f(g(a))$$

Le coefficient de $(x - a)$ est $g'(f(a))f'(a)$.

Exemples de dérivées de compositions

Exemples

$$\blacktriangleright e^{\sin(x)} = e^{\sin(x)} \cos(x)$$

$$\blacktriangleright \left(\frac{1}{\cos^2(x)} \right)' = ((\cos(x))^{-2})' = -2 \cos(x)^{-3} (-\sin(x)) = \frac{2}{\cos^3(x)}$$

$$\blacktriangleright (\tan(x^2))' = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}$$

$$\blacktriangleright (e^{x^2})' = 2xe^{x^2}.$$

Dérivée de fonctions réciproques

Proposition

Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction réelle bijective dérivable en a telle que $f'(a) \neq 0$. Alors, la réciproque est dérivable en $f(a)$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Preuve.



Exemple de dérivée d'une fonction réciproque

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$.

Sa fonction inverse est $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$.

$$(f^{-1})'(f(x)) = (f^{-1})'(x^2) = \frac{1}{2x}.$$

Posons maintenant $y = f(x) = x^2$ (donc $x = \sqrt{y}$), où $x \in \mathbb{R}^+$.

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}.$$

Exemple

Soit $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x)$

Sa fonction inverse est $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto e^x$. On a

$$\ln'(e^x) = \frac{1}{e^x}.$$

En particulier, ceci est vrai pour $x = \ln(y)$, pourvu que $y \in \mathbb{R}_0^+$. On a alors

$$\ln'(y) = \frac{1}{y}.$$

Dérivée de arcsin

Exemple

On a que

$$(\arcsin)'(\sin(x)) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}},$$

où on a utilisé que pour tout angle $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$.

En prenant $x = \arcsin(y)$, on trouve que

$$(\arcsin)'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Exemple

De façon similaire, en utilisant que pour tout $\theta \in [0, \pi]$ on a $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ et en posant $x = \arccos(y)$ on déduit que

$$\begin{aligned}(\arccos)'(y) &= (\arccos)'(\cos(x)) = \frac{1}{-\sin(x)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\end{aligned}$$

Dérivée de arctan

Exemple

En posant $x = \arctan(y)$ on déduit que

$$(\arctan)'(y) = \arctan'(\tan(x)) = \cos^2(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Quelques calculs

Dérivées des fonctions exponentielles

Exemple

Soit $a \in \mathbb{R}_0^+$ et $a \neq 1$. On veut calculer la dérivée de la fonction exponentielle $f(x) = a^x$.

$$f(x) = a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln(a)}.$$

On calcule

$$f'(x) = e^{x \ln(a)} \ln(a) = a^x \ln(a).$$

Dérivées de fonctions logarithmiques

Exemple

Soit $a \in \mathbb{R}_0^+$ et $a \neq 1$. On veut calculer la dérivée de la fonction logarithmique $f(x) = \log_a(x)$.

$$f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

On calcule

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln(a)}.$$

Tableau récapitulatif de fonctions dérivées

Tableau récapitulatif

Fonction $f(x)$	Fonction dérivée $f'(x)$
$mx + d$ où $m, d \in \mathbb{R}$	m
x^a où $a \in \mathbb{R}$	ax^{a-1}
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
a^x où $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$	$a^x \ln(a)$
$\log_a(x)$ où $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$	$\frac{1}{x \ln(a)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Analyser le comportement d'une fonction à l'aide de ses dérivées

Croissance

Extrema

Concavité

Proposition

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]a, b[$. On a que

- ▶ si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement croissante ;
- ▶ si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement décroissante ;
- ▶ si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est constante.

Définition d'extrema

Définition

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ avec $A \subseteq \mathbb{R}$ une fonction et $c \in A$. On dit que $f(c)$ est un :

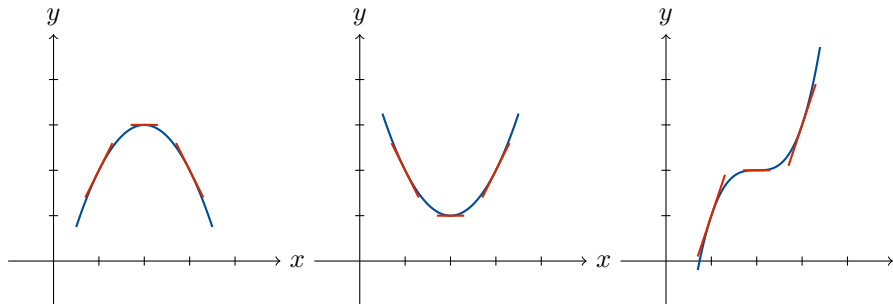
- ▶ **maximum local** s'il existe un intervalle ouvert I contenant c tel que $\forall x \in A \cap I, f(x) \leq f(c)$;
- ▶ **minimum local** s'il existe un intervalle ouvert I contenant c tel que $\forall x \in A \cap I, f(x) \geq f(c)$;
- ▶ **extremum local** si c'est un maximum local ou un minimum local.

Un extremum est global si on peut prendre $I = A$ ci-dessus.

Définition

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle à valeurs réelle. Les **points critiques** de f sont les points $a \in A$ tels que $f'(a) = 0$ ou f n'est pas dérivable en a .

Types de points critiques



Proposition

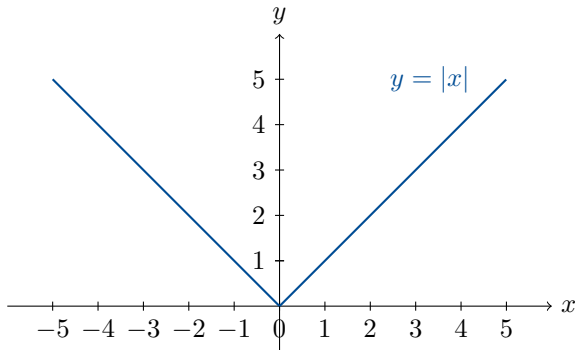
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $c \in I$ tel que $f'(c) = 0$.

- ▶ Si le signe de f' passe de positif à négatif en c , alors $f(c)$ est un *maximum local* de f .
- ▶ Si le signe de f' passe de négatif à positif en c , alors $f(c)$ est un *minimum local* de f .
- ▶ Si le signe de f' ne change pas en c , alors $f(c)$ n'est pas un *extremum local* de f .

Points critiques non dérivables

Remarque

La définition de point critique de f comprend aussi les valeurs du domaine où f n'est pas dérivable. En effet, ce sont aussi des points *candidats* pour être un extremum local.



Définition de la concavité

Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et dérivable à l'intérieur de celui-ci. On dit que f est

- ▶ **concave vers le haut** sur I si f' est décroissante sur I . Alors les droites tangentes au graphe se trouvent *en dessous* du graphe ;
- ▶ **concave vers le bas** sur I si f' est croissante sur I . Alors les droites tangentes au graphe se trouvent *au-dessus* du graphe.

Proposition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et deux fois dérivable à l'intérieur de celui-ci. Alors

- ▶ Si $f''(x) > 0$ pour tout $x \in I$ alors f est concave vers le haut sur I ;
- ▶ Si $f''(x) < 0$ pour tout $x \in I$ alors f est concave vers le bas sur I .