

Chapitre 6: Primitives

MATHF117

Définition et introduction

Intégration immédiate

Sinus et cosinus hyperboliques

Intégration et opérations

Intégration par changement de variable

Intégration par parties

Décomposition en fractions simples

Définition et introduction

Définition d'une primitive

Définition

Une **primitive** ou **intégrale indéfinie** de f est une fonction F dérivable sur le domaine de f telle que :

$$F'(x) = f(x)$$

Exemple

- ▶ x^2 est une primitive de $2x$
- ▶ $-\sin(x)$ est une primitive de $\cos(x)$
- ▶ $e^x + 3$ est une primitive de e^x .
- ▶ e^x est également une primitive de $e^x/$

Remarque

Si F est une primitive de f alors $F + C$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire, est aussi une primitive de f .

Unicité de la primitive, à ajout de constante près

Proposition

Si F et G sont deux primitives de f sur un même intervalle ouvert I , alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $G(x) = F(x) + C$ pour tout x dans I .

Preuve.



Notation

Notation

Si F est une primitive de f , on notera

$$\int f(x)dx = F(x) \quad \left(\text{ou parfois : } \int f = F \right)$$

ou, lorsqu'on cherche **toutes** les primitives :

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \left(\text{ou parfois : } \int f = F + C \right)$$

Si F est la primitive de f , on a

$$F + C \xrightarrow{(\)'} f \quad f \xrightarrow{\int} F + C$$

Recherche de primitive comme équation différentielle

Remarque

Rechercher les primitives d'une fonction donnée $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, c'est résoudre une équation du type

$$y'(x) = f(x) \quad x \in I$$

où y est une *fonction inconnue*, et f est la fonction donnée. C'est notre premier exemple d'**équation différentielle** : une équation dont l'inconnue n'est pas un nombre, mais une fonction, et qui fait intervenir la dérivée de cette fonction.

Un exemple

Exemple

La fonction $f(x) = x^2$ admet $F(x) = \frac{x^3}{3}$ comme primitive, car

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} (x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$$

Donc on peut écrire

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

ce qui est simplement une façon d'écrire qu'on a là *toutes* les primitives de $f(x) = x^2$.

L'intégration, c'est compliqué

Remarque

Dans la plupart des cas, nous chercherons les primitives d'une *fonction élémentaire*.

Bien que dans nos exemples, les primitives obtenues sont *encore* des fonctions élémentaires, c'est loin d'être toujours le cas. Les primitives d'une fonction élémentaire "prise au hasard" ne sont presque sûrement jamais élémentaires.

Exemple

L'intégrale indéfinie

$$\int e^{-x^2} dx$$

n'est *pas* une fonction élémentaire. Pourtant, les primitives existent.

Intégration immédiate

Sinus et cosinus hyperboliques

Intégration immédiate

La première technique pour trouver des primitives, est par **intégration immédiate**. Il s'agit simplement de se rappeler des formules de dérivation !

Intégration immédiate: puissances

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad r \neq -1, x \in \mathbb{R}_0^+$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \quad x \in \mathbb{R}_0$$

Intégration immédiate: fonctions trigonométriques

$$\int (\sin(x)) dx = -\cos(x) + C \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int (\cos(x)) dx = \sin(x) + C \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) + C \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Intégration immédiate: fonctions trigonométriques réciproques

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C \quad x \in [-1, 1]$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = -\arccos(x) + C \quad x \in [-1, 1]$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C \quad x \in \mathbb{R}$$

Intégration immédiate: fonctions exponentielles

$$\int e^x dx = e^x + C \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \quad a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$$

Sinus et cosinus hyperboliques

Définition

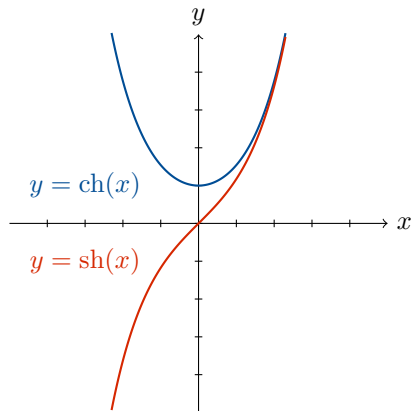
La fonction **cosinus hyperbolique** est définie par

$$\operatorname{ch} : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty[: x \mapsto \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

et la fonction **sinus hyperbolique**

$$\operatorname{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Graphes de sh et ch



Proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- ▶ $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
- ▶ $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$, c'est-à-dire ch est une fonction paire
- ▶ $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$, c'est-à-dire sh est une fonction impaire
- ▶ $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh}(x)$
- ▶ $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch}(x)$

Définition

Les fonctions cosinus et sinus hyperbolique ont des fonctions réciproques :

$$\operatorname{argch} : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto \operatorname{argch} x$$

et

$$\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{argsh} x.$$

Dérivées de argsh et argch

Proposition

On a les fonctions dérivées suivantes :

- ▶ $\operatorname{argch}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$ pour $x \in]1, +\infty[$
- ▶ $\operatorname{argch}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$ pour $x \in \mathbb{R}$

Preuve.



Intégration immédiate: sinus et cosinus hyperboliques

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \operatorname{argch} x + C \quad x \in]1, \infty[$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx = \operatorname{argsh} x + C \quad x \in \mathbb{R}$$

Intégration et opérations

Linéarité de l'intégration

Proposition (Linéarité de l'intégration)

Supposons que f et g sont des fonctions admettant des primitives F et G . Alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g.$$

Preuve.



Exemples d'intégration de combinaisons linéaires

Exemple

Calculons la primitive suivante.

$$\begin{aligned}\int (x^2 + x^3 + \sqrt{x})dx &= \int x^2 dx + \int x^3 dx + \int \sqrt{x} dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^{3/2}}{3/2} + C \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C\end{aligned}$$

On a utilisé la linéarité de l'intégrale et l'intégration immédiate.

Exemple: intégration d'un polynôme

Exemple

$$\begin{aligned}\int P(x)dx &= \int (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)dx \\&= a_0 \int dx + a_1 \int xdx + a_2 \int x^2dx + \cdots + a_n \int x^ndx \\&= a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\end{aligned}$$

Intégration par changement de variable

Formule d'intégration par changement de variables

Proposition (Changement de variable)

Soient f et h des fonctions continûment¹dérivable, alors

$$\int h(f(x)) \cdot f'(x) dx = \left(\int h(u) du \right) \Big|_{u=f(x)},$$

où la notation utilisée à droite signifie qu'après l'intégration, on remplace tous les u 's par l'expression $f(x)$.

Preuve.



Exemple d'intégration par substitution

Exemple

Calculons $\int e^{x^2} 2x dx$.

On prend $f(x) = x^2$ et $h(u) = e^u$.

Alors $h(f(x))f'(x) = e^{x^2} 2x$.

Vu que

$$\int h(u) du = \int e^u du = e^u + C$$

on a

$$\begin{aligned} \int e^{x^2} 2x \, dx &= \int h(f(x))f'(x) dx \\ &= \left(\int h(u) du \right) \Big|_{u=f(x)} = (e^u + C) \Big|_{u=x^2} = e^{x^2} + C. \end{aligned}$$

Remarque

On peut utiliser le *moyen mnémotechnique* suivant : si $u = f(x)$ alors

$$\frac{du}{dx} = f'(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$$

! Attention

Cette seconde égalité n'a aucun sens ! La notation " $\frac{d}{dx}$ " signifie "la dérivée par rapport à x ", et " $\int dx$ ", la primitive de la fonction définie en x . Écrire " dx " en isolation, n'a aucun sens mathématique. C'est une astuce mnémotechnique à garder pour les feuilles de brouillon.

Exemple d'intégration par substitution

Exemple

Calculons

$$\int 3x^2(x^3 + 5)^9 dx$$

On remarque qu'en posant $u = x^3 + 5$, on obtient $\frac{du}{dx} = 3x^2$.

$$\int 3x^2(x^3 + 5)^9 dx = \int \underbrace{(x^3 + 5)^9}_{=u^9} \cdot \underbrace{3x^2 dx}_{=du} = \int u^9 du$$

De $\int u^9 du = \frac{u^{10}}{10} + C$, on arrive à

$$\int 3x^2(x^3 + 5)^9 dx = \frac{(x^3 + 5)^{10}}{10} + C.$$

Mélange de variables

! Attention

Ne jamais mélanger ancienne et nouvelle variable au sein de l'intégrale !

Exemple d'intégration par substitution

Exemple

Pour calculer

$$\int \sin^4 x \cos x dx$$

on pose $u = \sin x$, et comme $\frac{du}{dx} = \cos(x)$, on obtient

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Exemple d'intégration par substitution

Calculons $\int e^{x^3} x^2 dx$

Intégration par parties

Formule d'intégration par parties

Proposition (Formule d'intégration par parties)

Soient f et g des fonctions continûment dérivables. Alors

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Preuve.



Exemple d'intégration par parties

Exemple

Pour calculer

$$\int x \cos x dx$$

posons

$$g(x) = x, \quad f'(x) = \cos x$$

et donc

$$g'(x) = 1, \quad f(x) = \sin x$$

de sorte que le calcul devient

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= (\sin x)x - \int (\sin x)1 dx \\ &= x \sin x - (-\cos x) + C \\ &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

Exemple d'intégration par parties

Exemple

On calcule

$$\int \ln x dx = \int 1 \ln x dx$$

en posant

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln x, & f'(x) &= 1 \\ g'(x) &= \frac{1}{x}, & f(x) &= x \end{aligned}$$

Alors

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

pour $x \in]0, \infty[$.

Exemple d'intégration par parties

Calculons $\int e^x \cos(x) dx$.

Décomposition en fractions simples

Fonctions rationnelles

Rappelons qu'une fonction rationnelle est une fonction du type

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

où P et Q sont des polynômes.

Un résultat surprenant est que l'intégrale indéfinie d'une telle fonction,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

est *toujours* une fonction élémentaire (mais pas toujours une fonction rationnelle !)

Rappel: polynômes irréductibles

Définition

Un polynôme est **irréductible** s'il est non constant et ne peut pas s'écrire sous la forme d'un produit de deux polynômes non constants.

En d'autres termes, un polynôme est irréductible s'il n'est pas factorisable !

Proposition

Les polynômes irréductibles sont exactement la réunion des polynômes de degré 1 avec l'ensemble des polynômes de degré 2 n'ayant pas de racine (ne s'annulant pas).

Fractions simples

Définition

Une **fraction simple** est une fonction rationnelle dont le dénominateur est une puissance d'un polynôme irréductible de degré n (n vaut 1 ou 2) et dont le numérateur a un degré strictement inférieur à n .

En d'autres termes, les fractions simples sont de la forme :

$$\frac{A}{(Bx + C)^k} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax + B}{(Cx^2 + Dx + E)^k}$$

avec $D^2 - 4CE < 0$, pour certaines constantes réelles A, B, C, D, E et un entier $k > 0$

Exemples de fractions simples

Exemple

Voici quelques fractions simples :

$$\frac{27}{(-3x + 1)^3}$$

$$\frac{2x - 4}{(2x^2 + 2x + 4)^4}.$$

L'intérêt des fractions simples pour l'intégration

1. Il est relativement simple de trouver la primitive de toute fraction simple.
2. Toute fonction rationnelle se décompose comme une somme de polynômes et fractions simples.

Remarque

Nous avons déjà vues toutes les techniques nécessaires pour trouver la primitive d'une fraction simple *sauf* une fraction simple de la forme

$$\frac{Ax + B}{(Cx^2 + Dx + E)^k}$$

pour un $k \geq 2$. Ce cas de figure ne se produira pas dans les exercices.

Exemple d'intégration d'une fraction simple

Exemple

Si on veut calculer

$$I = \int \frac{1}{(x-1)^5} dx,$$

On pose $u = x - 1$, alors $\frac{du}{dx} = 1$ et vu que

$$I = \int \frac{1}{u^5} du = \frac{u^{-4}}{-4} + C,$$

on trouve que

$$I = \int \frac{1}{(x-1)^5} dx = \frac{-1}{4(x-1)^4} + C$$

Exemple d'intégration d'une fraction simple

Si on veut calculer

$$I = \int \frac{3x - 1}{x^2 + 4x + 6} dx,$$

1. Écrire le dénominateur comme une somme d'un carré et une constante
2. Changement de variable

Exemple d'intégration d'une fraction simple (continué)

3. Scinder l'intégrale $I = J + K$
4. Calculer J
5. Calculer K en utilisant $\int \frac{1}{1+y^2} dy = \arctan(y)$

Décomposition en fractions simples

Proposition

Toute fonction rationnelle est la somme

1. d'un polynôme (éventuellement constant, voire nul), et
2. de fractions simples dont le dénominateur divise celui de la fonction rationnelle.

De plus, cette décomposition est unique.

Pour trouver la décomposition

1. si nécessaire, appliquer l'algorithme de division Euclidienne pour obtenir la somme d'un polynôme avec une nouvelle fonction rationnelle, dont le numérateur est de degré inférieur à celui du dénominateur ;
2. factoriser le dénominateur en ses composantes irréductibles ;
3. écrire toutes les fractions simples possibles pouvant intervenir dans la décomposition et déterminer les constantes.

Exemple de décomposition en fractions simples

1. Considérons la fonction rationnelle

$$\frac{3x^5 + 2x^2 - 3}{-x^3 + 4x}.$$

On applique l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{r|l} 3x^5 & + 2x^2 & - 3 \\ - 3x^5 + 12x^3 & & \\ \hline & 12x^3 + 2x^2 & \\ & - 12x^3 & + 48x \\ \hline & & 2x^2 + 48x - 3 \end{array}$$

On trouve donc que

$$3x^5 + 2x^2 - 3 = (-3x^2 - 12)(-x^3 + 4x) + 2x^2 + 48x - 3.$$

Donc

$$\frac{3x^5 + 2x^2 - 3}{-x^3 + 4x} = -3x^2 - 12 + \frac{2x^2 + 48x - 3}{-x^3 + 4x}.$$

Exemple de décomposition en fractions simples (continué)

2. Il faut décomposer le dénominateur facteurs irréductibles.

$$-x^3 + 4x = -x(x-2)(x+2).$$

3. On cherche A, B, C tels que

$$\frac{2x^2 + 48x - 3}{-x^3 + 4x} = \frac{2x^2 + 48x - 3}{-x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{-x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$$

On met sur le même dénominateur

$$\begin{aligned} & \frac{2x^2 + 48x - 3}{-x(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{A(x-2)(x+2) + B(-x)(x+2) + C(-x)(x-2)}{-x(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{(A-B-C)x^2 - 2(B-C)x - 4A}{-x(x-2)(x+2)}. \end{aligned}$$

Exemple de décomposition en fractions simples (continué)

En comparant les coefficients de polynômes du numérateur :

$$\begin{cases} 2 = A - B - C \\ 48 = -2(B - C) \\ -3 = -4A \end{cases} .$$

On trouve qu'on doit avoir

$$A = \frac{3}{4} \qquad B = \frac{-101}{8} \qquad C = \frac{91}{8} .$$

Ce qui nous permet de conclure que

$$\frac{3x^5 + 2x^2 - 3}{-x^3 + 4x} = -3x^2 - 12 - \frac{3}{4x} - \frac{-101}{8x - 16} + \frac{91}{8x + 16} .$$

Exemple d'intégration par décomposition en fractions simples

Calculons $\int \frac{1}{1-x^2} dx$

1. Le degré du numérateur est déjà inférieur au degré du dénominateur : on ne doit pas faire de division Euclidienne.
2. On décompose le dénominateur en facteurs irréductibles.
3. On écrit comme somme de fractions simples

Exemple d'intégration par décomposition en fractions simples (continué)

4. Intégrer les fractions simples