

Chapitre 7: Nombres complexes

MATHF117

Définition, somme et produit

Conjugaison

Module

Inverse d'un complexe

Forme polaire ou trigonométrique

Racines de complexes

Équations polynomiales et complexes

Définition, somme et produit

Définition des nombres complexes

Définition

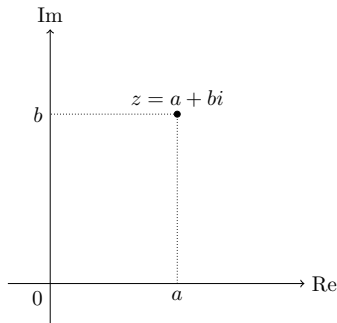
L'ensemble des **nombres complexes** est l'ensemble noté

$$\mathbb{C} = \{ a + bi \text{ tel que } a, b \in \mathbb{R} \}.$$

Si $z = a + bi$ est un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors a est sa **partie réelle**, dénotée $\operatorname{Re} z$ et b sa **partie imaginaire**, dénotée $\operatorname{Im} z$.

Exemples

- ▶ i
- ▶ $1 - i$
- ▶ $\pi + 3i$
- ▶ -5



Addition de complexes

Définition

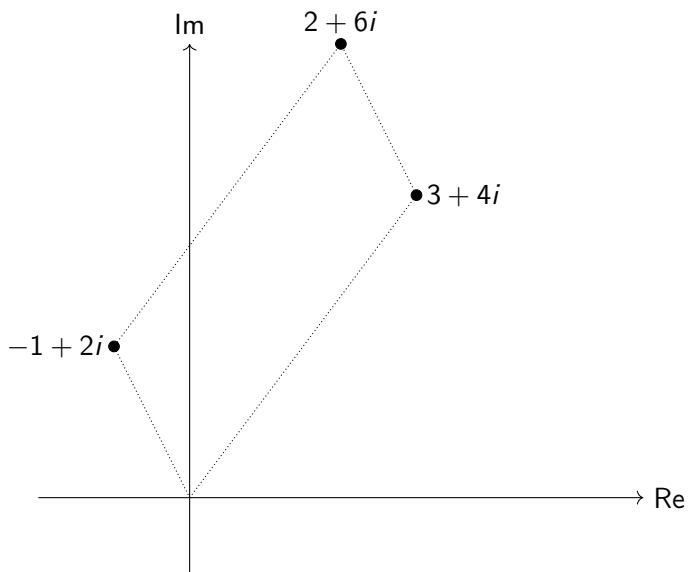
La **somme** de deux nombres complexes $z = a + bi$ et $z' = c + di$ est le nombre complexe noté

$$z + z' := (a + c) + (b + d)i.$$

Exemple

- ▶ $(1 + i) + (2 + i) = 3 + 2i$
- ▶ $(-1 + i) + (3 - i) = 2$
- ▶ $(-1 + 2i) + (1 + 2i) = 4i$

Addition de complexes



Propriétés de la somme de complexes

Proposition

Pour tout $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ on a que

- ▶ $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$ (associativité);
- ▶ $z + z' = z' + z$ (commutativité);
- ▶ $z + 0 = z$ (existence d'un neutre : 0);
- ▶ Il existe $-z \in \mathbb{C}$ tel que $z + (-z) = 0$ (existence d'un opposé).

De plus, si $z = a + bi$, alors on a $\boxed{-z = -a - ib}$.

Produit de complexes

Définition

Le produit sur $\mathbb{C}$ est défini par :

$$(a + ib)(x + iy) := ax - by + i(ay + bx).$$

En particulier,

$$i^2 = (0 + i)(0 + i) = (0 - 1) + 0i = -1.$$

Exemple

$$(2 + i)(-1 + 3i) =$$

Produit complexe comme extension de produit réel

Remarque

Vue la propriété de distributivité, on peut “oublier” la formule du produit complexe et se contenter de distribuer et d'utiliser la règle $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned}(a + ib)(x + iy) &= ax + ai y + ibx + ibiy \\ &= ax + i(ay + bx) + byi^2 \\ &= ax - by + i(ay + bx).\end{aligned}$$

Conjugaison

Conjugaison

Définition

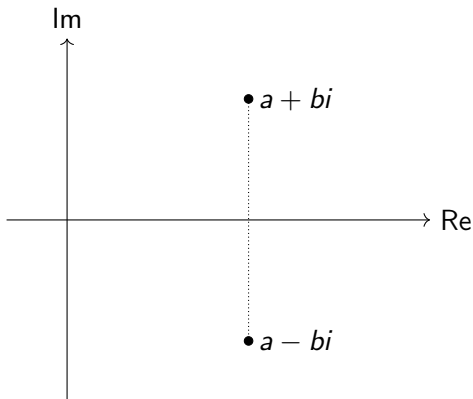
Si $z = a + ib$ est un nombre complexe, on définit son **conjugué** par

$$\bar{z} = a - ib.$$

Exemple

► $\overline{2 + i} = 2 - i$

► $\overline{2 - i} = 2 + i$



Propriétés de la conjugaison

Proposition

La conjugaison complexe vérifie, pour tout $z \in \mathbb{C}$

► $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

► $z = \overline{\overline{z}}$

(involutivité)

► $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$

► $\overline{z^2} = \overline{z}^2$, $\overline{z^3} = \overline{z}^3$, etc.

Preuve.



Module

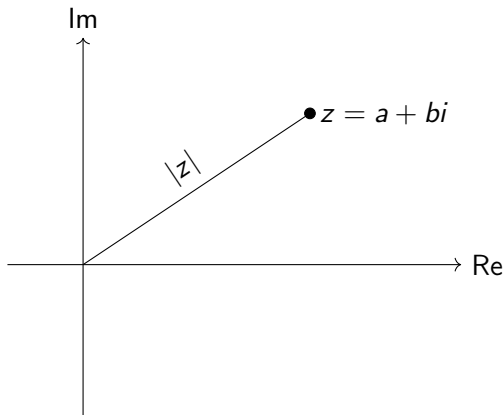
Module

Définition

Le **module** de $z = a + bi$ est le nombre réel noté $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemple

- ▶ $|-4i| = 4$
- ▶ $|1 + i| = \sqrt{2}$
- ▶ $|1 - 2i| = \sqrt{5}$



Un mot sur la notation

Remarque

Si z est réel (c'est-à-dire, sa partie imaginaire est nulle), le module de z est simplement la valeur absolue. Ceci explique pourquoi la notation $|\cdot|$ est la même pour la valeur absolue et le module.

Propriétés du module

Proposition

Les propriétés suivantes sont vérifiées pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$:

- ▶ $|zz'| = |z| |z'|$
- ▶ $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- ▶ $|z| \geq 0$
- ▶ $|z| = 0 \iff z = 0$

Preuve.



Inverse d'un complexe

Inverse d'un complexe

Proposition

Si $z = a + bi$ alors $z \cdot \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = 1$. On écrira donc

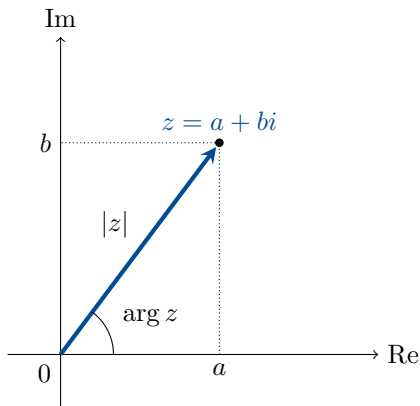
$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$$

Preuve.



Forme polaire ou trigonométrique

Argument d'un complexe



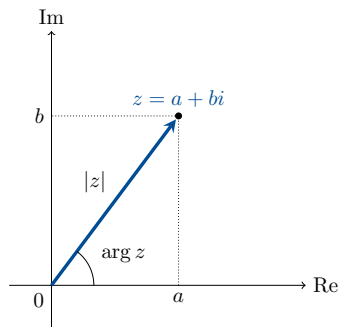
Définition

L'**argument** d'un nombre complexe z est l'angle polaire de z vu comme un point du plan.

Exemples

- ▶ $\arg i = \frac{\pi}{2}$
- ▶ $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$
- ▶ si $x \in \mathbb{R}_0^+$, $\arg x = 0$
- ▶ si $x \in \mathbb{R}_0^-$, $\arg x = \pi$

Forme polaire d'un complexe



Définition

La **forme polaire** du complexe $z = a + bi$ est l'écriture

$$z = \rho (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

où $\rho = |z|$ et $\theta = \arg z$, et $a, b \in \mathbb{R}$.

Notation utilisant la formule d'Euler

Notation

Une *notation* courante et très commode est d'écrire z sous la forme d'une exponentielle complexe, $z = \rho \exp(i\theta)$, où par définition

$$\exp(i\theta) := \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

Cette notation est appelée **formule d'Euler**.

Exemple

$$1 = \exp(i0)$$

$$i = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$$

$$-1 = \exp(i\pi)$$

$$1 + \sqrt{3}i = 2 \exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$$

Proposition

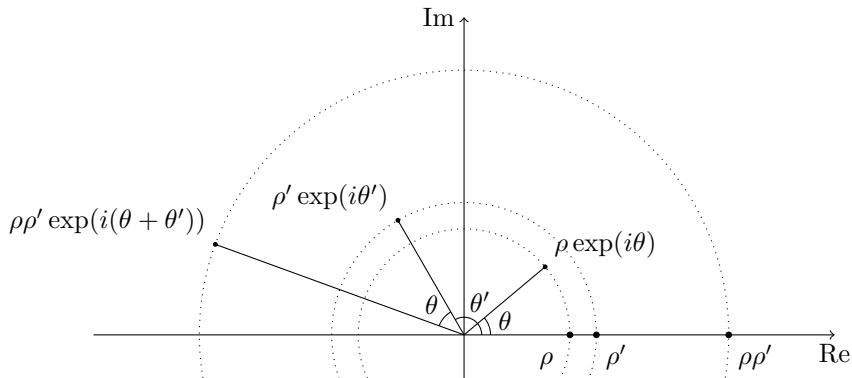
Si $z = \rho \exp(i\theta)$ et $z' = \rho' \exp(i\theta')$ sont deux nombres complexes, et n un entier, on a :

1. $\bar{z} = \rho \exp(-i\theta)$;
2. $\frac{1}{\rho \exp(i\theta)} = \frac{1}{\rho} \exp(-i\theta)$;
3. $(\rho \exp(i\theta))(\rho' \exp(i\theta')) = \rho\rho' \exp(i(\theta + \theta'))$;
4. $(\rho \exp(i\theta))^n = \rho^n \exp(in\theta)$.

Preuve.



Illustration de multiplication de complexes



Racines de complexes

Définition

Soit un entier $n \geq 1$ et z un complexe. On appelle **racine n^e** de z tout nombre complexe w tel que $w^n = z$.

Proposition

Si z est donné sous forme polaire $\rho \exp(i\theta)$ ($\rho \geq 0$), alors les racines n^e de z sont les nombres $w_0, \dots, w_{n-1}$ définis par

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \exp\left(i \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad \text{où } k = 0, \dots, n-1$$

En particulier, si $z \neq 0$, il y a exactement n racines n^e de z .

Preuve.



Exemple de racine d'un complexe

Calculons les racines carrées w_1, w_2 de $z = 8 + 6i$. On a que

$$|z| = \sqrt{64 + 36} = 10$$

Si $\theta = \arg z$ on a

$$8 = 10 \cos(\theta) \quad 6 = 10 \sin(\theta)$$

On a alors que

$$w_1 = \sqrt{10} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

$$w_2 = \sqrt{10} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) \right) = -w_1$$

Exemple de racine d'un complexe

Utilisons les formules

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha) \Rightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}$$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}$$

Ici, on a $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\frac{\theta}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \frac{8}{10}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \frac{8}{10}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Ce qui nous permet de conclure

$$w_1 = \sqrt{10}\left(\frac{3}{\sqrt{10}} + i\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 3 + i$$

$$w_2 = -3 - i$$

Illustration de racines quatrièmes de 1

$$1 = \cos(0) + i \sin(0)$$

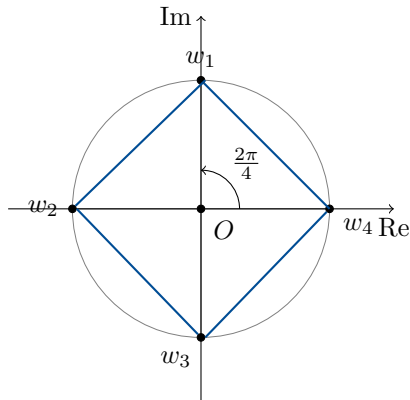
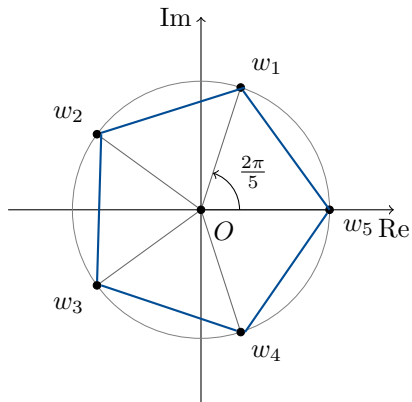


Illustration de racines cinquièmes de 1



Équations polynomiales et complexes

Équations de degré 1

L'équation

$$az + b = 0$$

pour $a, b \in \mathbb{C}$ a une seule solution dans $\mathbb{C}$:

$$z = -\frac{b}{a} = -\frac{b\bar{a}}{a\bar{a}}$$

Équations de degré 2

L'équation

$$az^2 + bz + c = 0$$

pour $a, b \in \mathbb{C}$ a deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z = \frac{-b \pm \omega}{2a}$$

où ω est tel que $\omega^2 = b^2 - 4ac$

Exemple

$$z^2 + (-1 - i)z - 2i - 2 = 0$$

Alors $(-1 - i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2i - 2) = 8 + 6i$.

On sait que $3 + i$ est racine carrée de $8 + 6i$.

On a donc comme solutions

$$z_1 = \frac{1 + i + 3 + i}{2} = 2 + i \quad z_2 = \frac{1 + i - 3 - i}{2} = -1$$

Degré supérieur

Soit $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ un polynôme.

Définition

Une racine r de P est de **multiplicité** m si on peut écrire $P(z) = (z - r)^m Q(z)$, où Q est un polynôme (forcément de degré $n - m$) dont r n'est pas une racine.

Théorème

Tout polynôme de degré n admet exactement n racines complexes (comptées avec leur multiplicité).

Il s'agit du **Théorème fondamental de l'algèbre**