



Racines



1.2. Ci-dessous, on suppose $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

Simplifier

b. $\frac{\sqrt[4]{64a^6}}{\sqrt[4]{162a}}$

important pour les condit° d'existence

- Racine n° avec n pair
→ $a \geq 0$
- dénominateur → $a \neq 0$

① Décomposition en facteurs premiers

$$\begin{array}{r|l} 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 64 = 2^6$$

$$\begin{array}{r|l} 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 162 = 2 \cdot 3^4$$

$$\frac{\sqrt[4]{64a^6}}{\sqrt[4]{162a}} = \frac{\sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2 \cdot a^4 \cdot a^2}}{\sqrt[4]{2 \cdot 3^4 \cdot a}}$$

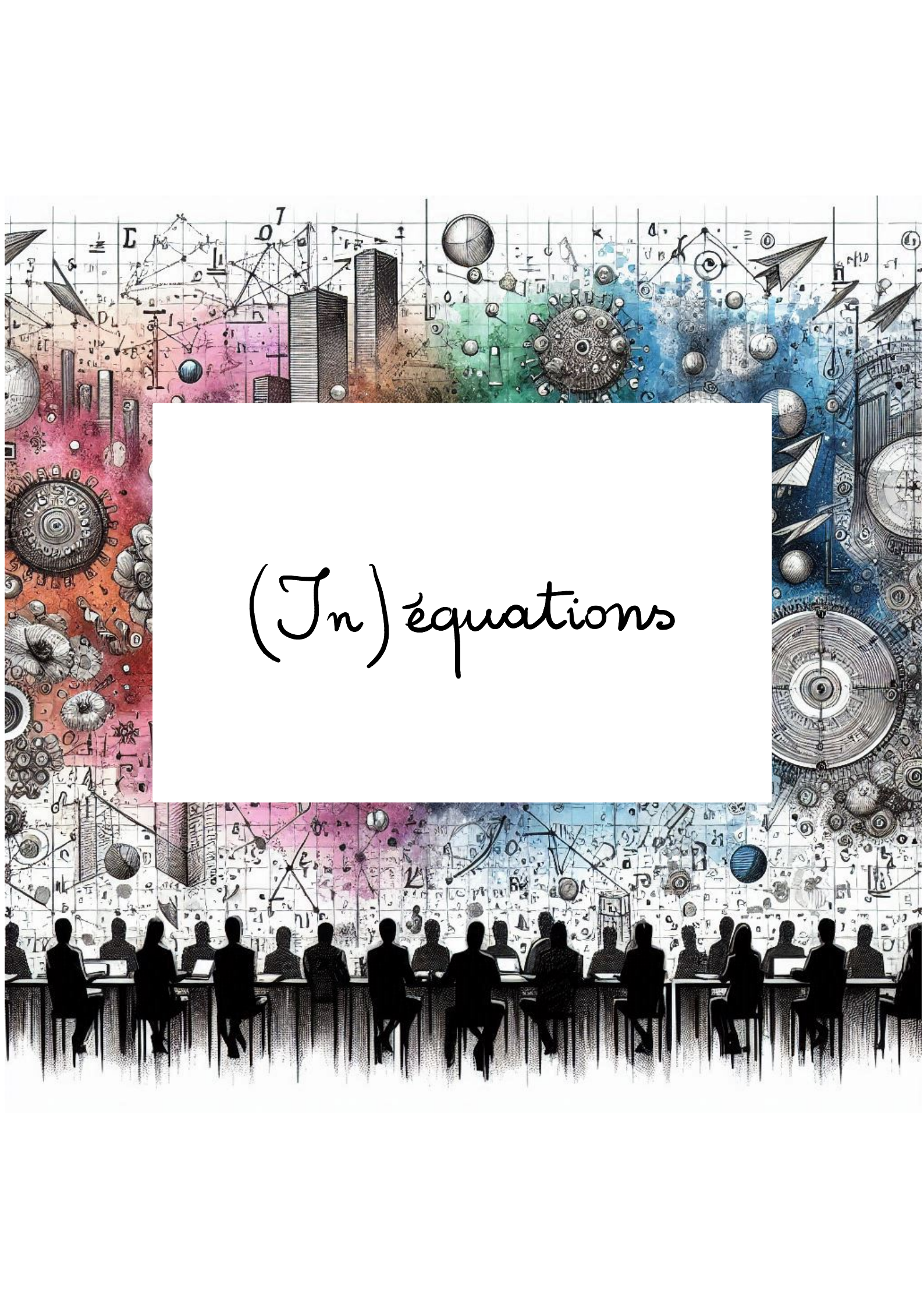
$$= \frac{2|a| \sqrt[4]{2^2 \cdot a^2}}{3 \sqrt[4]{2a}}$$

en général : $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$ ($k \in \mathbb{N}_0$)

ici, $a > 0$ donc $|a| = a$

$$= \frac{2a}{3} \sqrt[4]{\frac{2^2 a^2}{2a}}$$

$$= \frac{2a \sqrt[4]{2a}}{3}$$



(I_n) équations

EQUATION

$$-4x + \frac{3}{2} = 12$$

↑
inconnue

↑
égalité,
signe '='

INÉQUATION

$$-4y + 12 > \frac{1}{3}$$

↑
inconnue

↑
inégalité,
signe '>', '≥', '<', '≤'.

⚠ Le sens de l'inégalité change lorsqu'on multiplie par quelque chose de négatif

CONDITIONS D'EXISTENCE

* fractions → dénominateur non-nul

* racines n^e → radicande positif
(n pair)

SOLUTIONS

* 

$$S = \{a, b, c, d\}$$

(ordonné du
+ petit au + grand)

* 

$$S =]a, b[\cup [c, d]$$

1.5. Trouver les valeurs réelles x telles que

$$g. \left| \frac{x-1}{5x+2} \right| = 3$$

$$c. \frac{x^2-3x}{x+2} = 0$$

$$c) \underline{CE}: \begin{array}{l} x+2 \neq 0 \\ \Leftrightarrow x \neq -2 \end{array}$$

$$\frac{x^2-3x}{x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3$$

$$S = \{0, 3\}$$

factorisation
(mise en
évidence)

$$g) \underline{CE}: \begin{array}{l} 5x+2 \neq 0 \\ 5x \neq -2 \\ x \neq -2/5 \end{array}$$

$$\left| \frac{x-1}{5x+2} \right| = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{5x+2} = 3 \quad \textcircled{1}$$

$$\text{ou } \frac{x-1}{5x+2} = -3 \quad \textcircled{2}$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \quad x-1 = 3(5x+2) \\ x-1 = 15x+6 \\ -1-6 = 15x-x \\ -7 = 14x \\ \frac{-7}{14} = x \\ x = -1/2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{2} \quad x-1 = -3(5x+2) \\ x-1 = -15x-6 \\ x+15x = -6+1 \\ 16x = -5 \\ x = -5/16 \end{array}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{5}{16} \right\}$$

1.6. Trouver les valeurs réelles x telles que

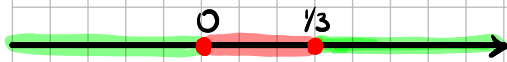
a. $\frac{1}{x} < 3$

g. $\left| \frac{x-1}{5x+2} \right| > 3$

c. $\frac{x^2-3x}{x+2} > 0$

a) CE: $x \neq 0$

$\frac{1}{x} < 3 \cdot x$
 $\hookrightarrow$ change selon le signe de x



① si $x > 0$:
 $1 < 3x$
 $\frac{1}{3} < x$

② si $x < 0$:
 $1 > 3x$
 $\frac{1}{3} > x$

$\rightarrow$ toujours vrai si $x < 0$

$S =]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$

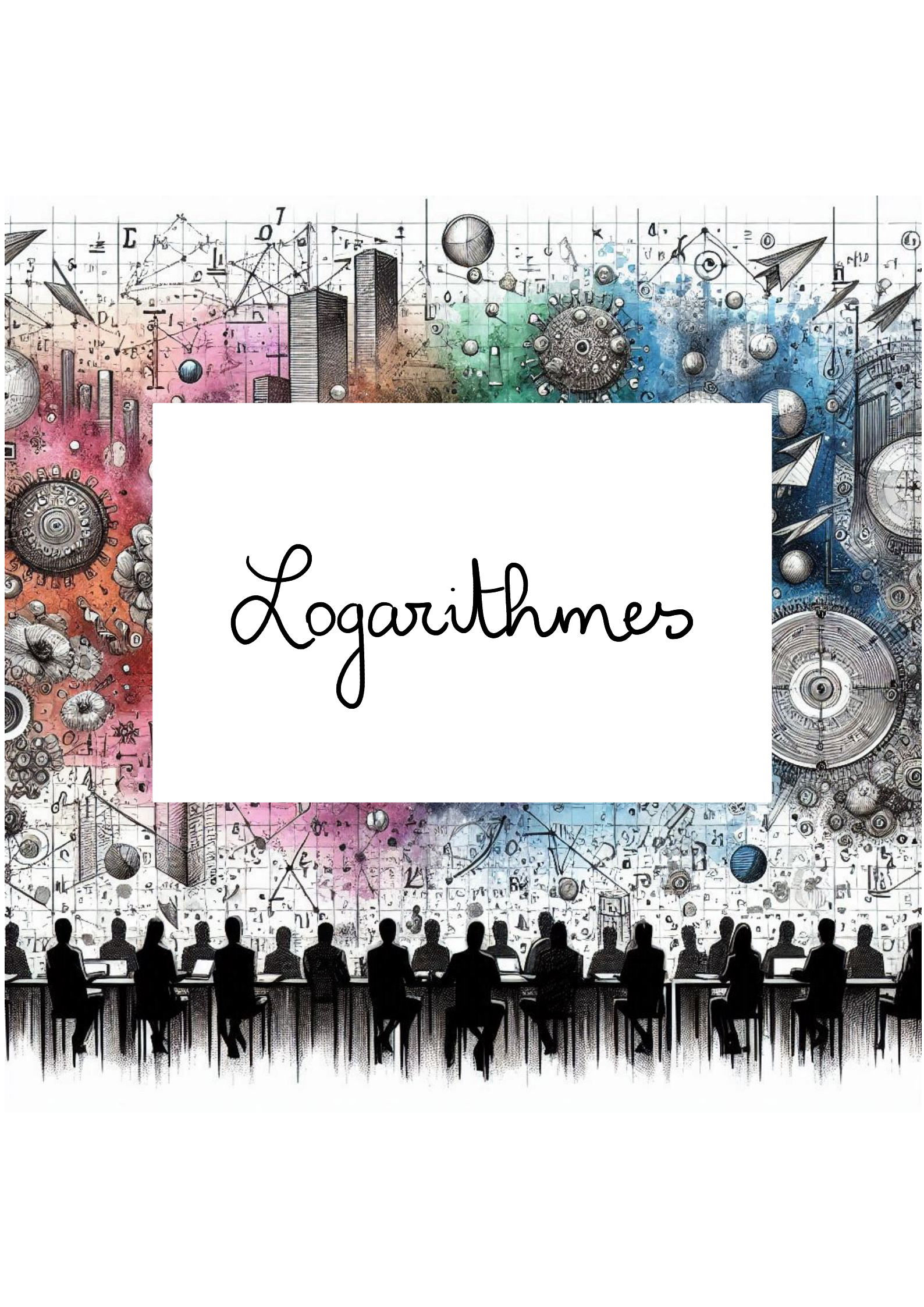
g) CE: $x \neq -\frac{2}{5}$

$\left| \frac{x-1}{5x+2} \right| > 3$

		$-\frac{2}{5}$		1	
$x-1$	-	-	-	0	+
$5x+2$	-	0	+	+	+
	$\frac{+(x-1)}{+(5x+2)} > 3$ $x-1 < 3(5x+2)$ $-1-6 < 15x-x$ $-7 < 14x$ $-\frac{1}{2} < x$ 	$\neq$	$\frac{-(x-1)}{5x+2} > 3$ $-x+1 > 3(5x+2)$ $1-6 > 15x+x$ $-\frac{5}{16} > x$ 	? $0 > 3$ $\downarrow$ Non!	$\frac{x-1}{5x+2} > 3$ $x-1 > 3(5x+2)$ $-1-6 > 15x-x$ $-\frac{1}{2} > x$ $\downarrow$ Non car $x > 1$

$S =]-\frac{1}{2}; -\frac{2}{5}[\cup]-\frac{2}{5}; -\frac{5}{16}[$

$\infty S =]-\frac{1}{2}; -\frac{5}{16}[\setminus \{-\frac{2}{5}\}$

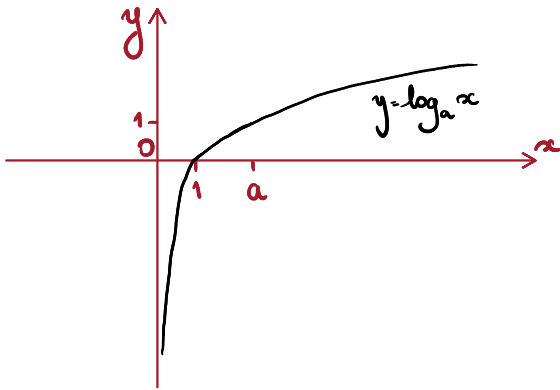


Logarithmes

LOGARITHMES

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

base l'exposant qu'il faut donner à a pour obtenir b .



CONDITIONS D'EXISTENCE

$$a > 0, a \neq 1$$

$$b > 0$$

PROPRIÉTÉS (sous les bonnes conditions d'existence)

$$\log_a (bd) = \log_a b + \log_a d$$

$$\log_a (b/d) = \log_a b - \log_a d$$

$$\log_a (b^d) = d \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_d b}{\log_d a} = \frac{1}{\log_b a}$$

1.7. Calculer sans faire usage de tables ou de machines :

b. $\log_3(27)$;

j. $\log_8(16)$;

b) $3^? = 27$

$$\log_3 27 = 3$$

j) $8^? = 16$

$$\log_8 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^4}{\log_2 2^3}$$

$$= \frac{4}{3}$$

1.8. Calculer x tel que

b. $\log_x 8 = -1.5$

CE: $x > 0, x \neq 1$

$$\log_x 8 = -1.5 = -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} = (8)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

L'ensemble des solutions est $S = \left\{ \frac{1}{4} \right\}$

4.5. Calculer en fonction de $a = \log_{10} 2$:

a. $\log_{10} 5$;

$$= \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - a$$

1.15. Résoudre les équations suivantes :

c. $\log_5(5^x - 7) = \log_{25} 324 + 2 - x$;

c) CE : ✓

$$\log_5(5^x - 7) = \log_{25} 324 + 2 - x$$

$$\Leftrightarrow \log_5(5^x - 7) = \frac{\log_5 324}{\log_5 25} + \log_5 5^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow \log_5(5^x - 7) = \frac{1}{2} \log_5 324 + \log_5 5^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow \log_5(5^x - 7) = \log_5 324^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow 5^x - 7 = 18 \cdot 5^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow 5^x - 7 = \frac{18 \cdot 25}{5^x}$$

$$\Leftrightarrow (5^x)^2 - 7(5^x) - 18 \cdot 25 = 0$$

On pose $t = 5^x$
On a alors

$$t^2 - 7t - 18 \cdot 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t + 18)(t - 25) = 0$$

$$t = -18 \quad \text{ou} \quad t = 25$$

impossible car
 $t = 5^x > 0$

$$\downarrow$$

$$25 = 5^x$$

$$x = 2$$

→ CE : $5^2 - 7 = 25 - 7 > 0$: OK.

L'ensemble des solutions est $S = \{2\}$

4.12. Résoudre les équations exponentielles suivantes :

b. $3^{2x+1} + 9^x = 324$

$$b) \quad 3^{2x+1} + 9^x = 324$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 9^x + 9^x = 18^2$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 9^x = (2 \cdot 9)^2$$

$$\Leftrightarrow 9^x = 9^2$$

L'ensemble des solutions est $S = \{2\}$



Ensembles



ENSEMBLES USUELS

$\mathbb{N}$
naturels

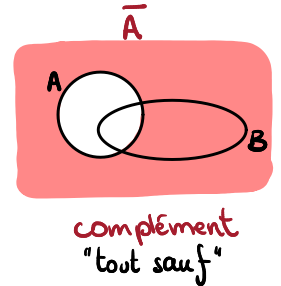
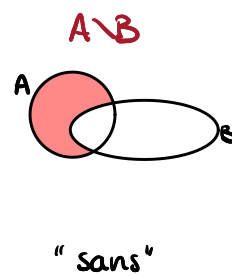
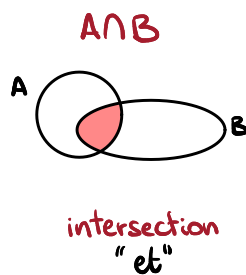
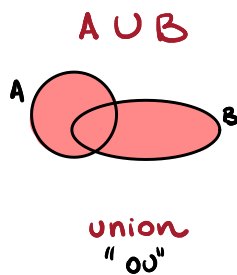
$\mathbb{Z}$
entiers

$\mathbb{R}$
réels

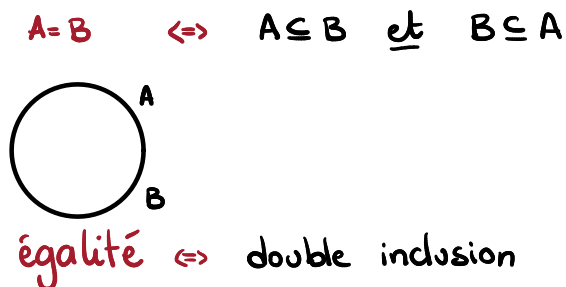
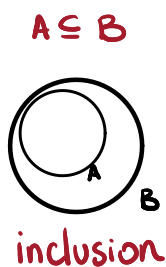
VISUALISATION

Diagrammes de Venn

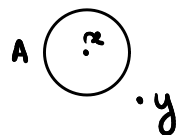
« OPÉRATIONS »



COMPARAISON



ÉLÉMENT



$x \in A$ x appartient à A

$y \notin A$ y n'appartient pas à A

PRODUIT

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\}$$

↓
tel que

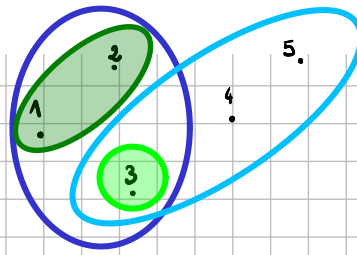
1.21. Déterminer les ensembles suivants de $\mathbb{R}$:

c. $\{1, 2, 3\} \setminus \{3, 4, 5\}$

b. $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\}$

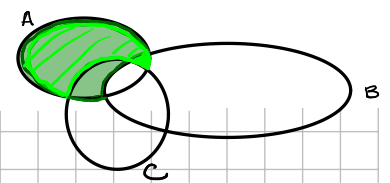
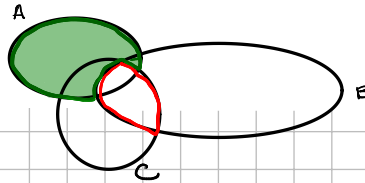
b. $\{3\}$

c. $\{1, 2\}$



1.23. Soient A, B, C des ensembles quelconques. Montrer les lois de distributivité suivantes

b. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$



Procédons par double inclusion :

① Montrons que $A \setminus (B \cap C) \supseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Soit $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Alors $x \in A \setminus B$ ou $x \in A \setminus C$.

i) Si $x \in A \setminus B$, alors $x \in A$ mais $x \notin B$. Donc en particulier, $x \in A$ et $x \notin B \cap C$, c'est-à-dire que $x \in A \setminus (B \cap C)$.

ii) Si $x \in A \setminus C$, alors $x \in A$ mais $x \notin C$. Donc en particulier, $x \in A$ et $x \notin B \cap C$, c'est-à-dire que $x \in A \setminus (B \cap C)$.

Dans les 2 cas, $x \in A \setminus (B \cap C)$. Nous en concluons que $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cap C)$.

② Montrons que $A \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Soit $x \in A \setminus (B \cap C)$. Alors $x \in A$ mais $x \notin B \cap C$, c'est-à-dire qu'un des 3 cas suivants est vérifié :

i) $x \in A$, $x \notin B$ et $x \notin C$. Alors en particulier $x \in A$ et $x \notin C$. Donc $x \in A \setminus C$ et donc $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

ii) $x \in A$, $x \in B$ et $x \notin C$. Alors en particulier $x \in A$ et $x \notin C$. Donc $x \in A \setminus C$ et donc $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

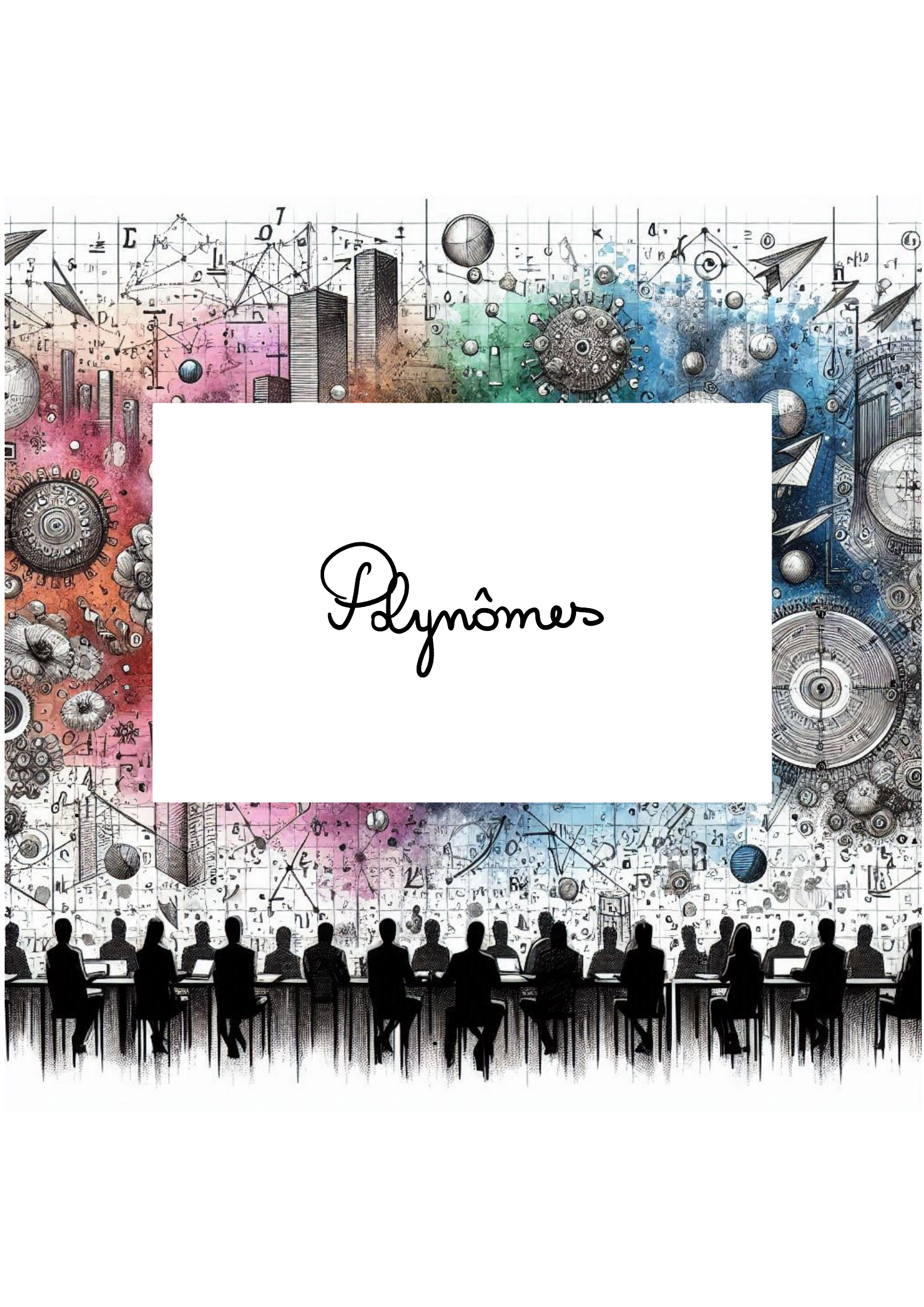
iii) $x \in A$, $x \notin B$ et $x \in C$. Alors en particulier $x \in A$ et $x \notin B$. Donc $x \in A \setminus B$ et donc $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Dans les 3 cas, $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Nous en concluons que $A \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Etant donné que $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \supseteq A \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, nous avons que $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

1.26. Soient $A = \{1, 3, 5\}$ et $B = \{2, 4\}$. Déterminer

b. $A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}$



Polynômes



1.30. Effectuer les divisions euclidiennes des polynômes P par Q suivantes.

a. $P(X) = X^4 - X^3 + 3X$ et $Q(X) = X^2 + 2$

$$\begin{array}{r}
 X^4 - X^3 + 0X^2 + 3X + 0 \\
 - (X^4 + 2X^2) \\
 \hline
 -X^3 - 2X^2 + 3X + 0 \\
 - (-X^3 - 2X) \\
 \hline
 -2X^2 + 5X + 0 \\
 - (-2X^2 - 4) \\
 \hline
 5X + 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 X^2 + 2 \\
 \hline
 X^2 - X - 2
 \end{array}$$

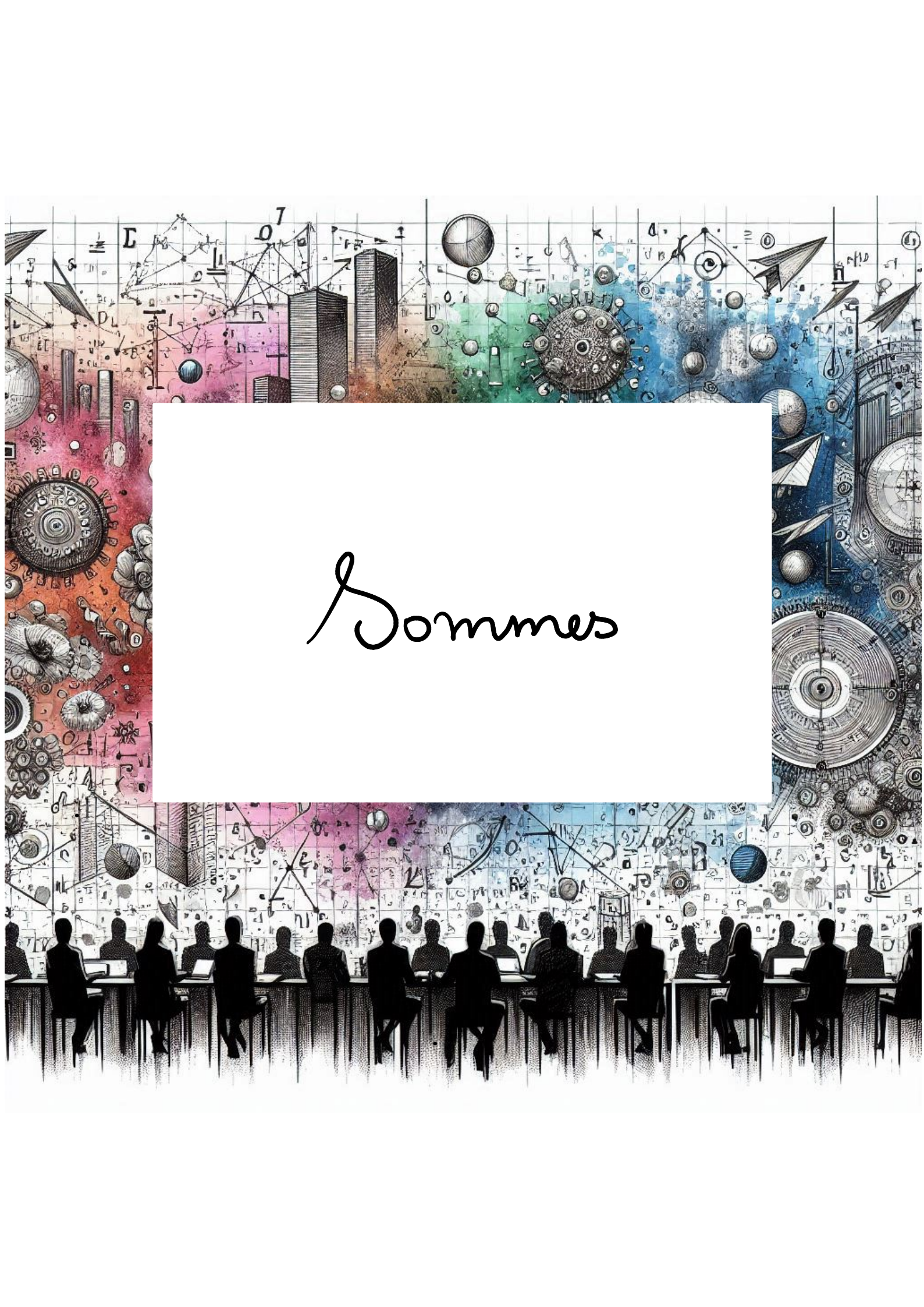
degré inférieur
à $X^2 \rightarrow$ arrêt

• $X^2 \cdot (X^2 + 2) = X^4 + 2X^2$

• $-X(X^2 + 2) = -X^3 - 2X$

• $-2(X^2 + 2) = -2X^2 - 4$

$\Rightarrow X^4 - X^3 + 3X = (X^2 + 2) \cdot (X^2 - X - 2) + (5X + 4)$



Sommus

1.33. Calculez les sommes suivantes. On fixe $a \in \mathbb{R}$.

$$\text{b. } \sum_{i=10}^{11} (-i^3) = (-10^3) + (-11^3)$$

$$\text{b'. } \sum_{i=10}^{14} (-i^3) = (-10^3) + (-11^3) + (-12^3) + (-13^3) + (-14^3)$$

$$= - \sum_{i=10}^{14} i^3 = - (10^3 + 11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3)$$

$$= - \left(\sum_{i=1}^{14} i^3 - \sum_{i=1}^9 i^3 \right)$$

$$= - \left(\left(\frac{14 \cdot 15}{2} \right)^2 - \left(\frac{9 \cdot 10}{2} \right)^2 \right)$$

$$\text{formule: } \sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$